第20卷 第6期 大 气 科 学 Vol. 20, No. 6
1996 年 11 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Nov. 1996

全球大气位温的两个不等价约束及其服从 Gamma 分布的证明*

马 力 张学文

（新疆气象科研所，乌鲁木齐 830002）

摘 要 本文对全球大气位温积分守恒和热力学总熵守恒的物理含义及其不等价性进行了讨论。认为，作为对大气热力学状态较完整的描述，应将大气热力学总熵守恒这一约束条件补入数值预报模式中去。利用最大熵原理和上述两个约束条件，在理论上对大气位温服从 Gamma 分布这一从实际资料中揭示出来的事实进行了证明，得到了理论与实际完全吻合的结果。

关键词 位温 最大熵原理 分布函数

1 引言

在数值天气预报中，人们不仅用一组动力、热力学方程来描述模式大气的运动，而且还选用一些积分型的约束条件对模式进行约束。如，要求大气在运动过程中，能量、涡度、位温等一些物理量对全球大气的积分具有守恒性。

在气象学中经常用到的位温 θ 是气温 T 与气压 P 的函数

$$\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{0.286}, \tag{1}$$

而上述位温积分守恒是指

$$\int_z \int_A \theta \rho \mathrm{d}a \mathrm{d}z = C_1^{\prime} \text{（常数）}, \tag{2}$$

式中 ρ 是大气密度，a 为面积，z 为垂直高度。本文要指出，作为对非绝热大气热力学状况的更完整描述，还应补入全球大气的熵 S 积分守恒这样一个约束条件：

$$\int_0^M S \mathrm{d}m = C'_2 \text{（常数）}, \tag{3}$$

并且位温守恒与熵守恒是两个不等价的约束。

在文献[1]的研究中发现，某一时刻（或多年平均）的大气位温值与其占有的大气质量的多少之间存在着 Gamma 分布（或称 Pearson III 型）关系（见图 1）。即

1994-07-15 收到，1996-01-10 收到三改稿

* 国家自然科学基金资助课题

$$f(\theta)=13.5\frac{(\theta-\theta_0)^2}{(\bar{\theta}-\theta_0)^2}\exp\left(-3\frac{\theta-\theta_0}{\bar{\theta}-\theta_0}\right),\tag{4}$$

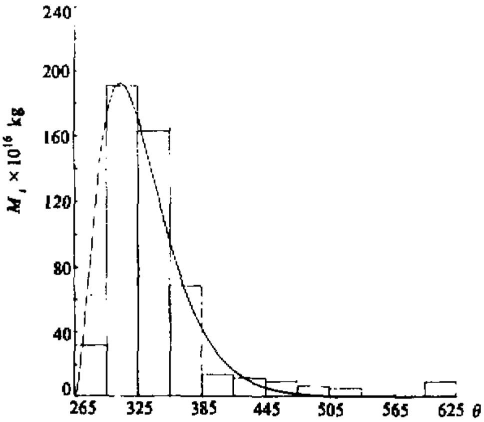

图1 全球大气多年平均位温分布

式中$f(\theta)$是概率分布函数，其物理意义是某一时刻全球大气中当位温$\theta\to\theta+\Delta\theta$时大气质量$\Delta m$为

$$\Delta m=Mf(\theta)\Delta\theta,\tag{5}$$

$\bar{\theta}$、θ_0分别是位温对全球大气质量的平均值和最低值。前述有关位温的两个积分型约束，恰好是用最大熵原理对位温服从Gamma分布进行证明所需要的约束条件。本文将给出这一证明过程。

2 极值原理与约束条件

2.1 极值原理

近代科学的进展，使一些科学家相信，一切物质的运动总是服从于“极值原理”，即某些物理量总是力图达到最大或最小值[2, 3]。应当承认这个观点有很高的概括力，又有大量的实例得到印证。

牛顿的运动方程，大家认为它是适用于地球大气的。可是理论力学证实牛顿运动方程也可以等价地表示为最小作用原理[4]。因而当我们承认牛顿公式可以用于大气之时，也就等于承认了最小作用原理——极值原理的一个极重要特例也适用于大气了。

在气象上最早提出极值原理者可能是Lorenz[5]。他考虑的是大气热机效率是否达到最大的问题。

热力学第二定律是适用于一切物质系统的，它实际上也是极值原理的又一个极重要特例。它的基本思路是孤立系统的熵总是处于极大值。

随着信息论的兴起，人们又进而认识到有些非热力学的物理系统不仅也存在着熵这一物理量，而且也服从最大熵原理[6]。

基于以上认识，在熵气象研究中曾把与熵密切相关的分布函数概念引入气象学[7]，揭示了近30种气象上的分布函数[8]，用最大熵原理论证过某些分布函数为什么符合某种解析式。可以认为这些都是极值原理（最大熵原理）在大气科学中的实例。

2.2 两个约束条件的含义

前面谈到，位温对全球大气质量积分守恒可表达为（2）式。这里对（2）式两边都除以大气总质量M，则有

$$\int_0^M\theta\frac{\mathrm{d}m}{M}=\frac{C_1''}{M},$$

式中$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}a\mathrm{d}z$是大气质量微元。再对（5）式取$\Delta\theta\to0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}m}{M}=f(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

将此代入上式，得

$$\int_0^{\theta}\theta f(\theta)\mathrm{d}\theta=C'_1, \tag{6}$$

式中$C'_1=C''_1/M$。由于大气总质量是常数，所以C'_1也是常数。(6) 式的含义是全球大气位温的算术平均值守恒。也就是说，我们周围的地球大气并没有因为太阳辐射而一天天地变热并膨胀，也没有因为它向外放出辐射而一天天地变冷并收缩，而是恒定的。

我们知道熵 S 是描述大气热力学状态的函数，它与位温的关系是

$$S=c_p\ln\theta+1.156, \tag{7}$$

式中c_p是单位质量大气的定压比热，S是单位质量的熵。当我们承认大气天天都在变化的同时，也承认了在短期天气预报尺度内，地球大气的总质量、总能量、总热力状态并无大的变化。而总热力状态不变化的精确含义就是全球大气的热力学总熵守恒，即 (3) 式。

对 (3) 式做如下适当的变换后可以看出，全球大气的热力学总熵守恒，实际上是大气位温的几何平均值守恒：

将 (7) 式代入 (3) 式，得

$$\int_0^{M}(c_p\ln\theta+1.156)\mathrm{d}m=C'_2,$$

两边同除以大气总质量M并离散化，得

$$\sum_{i=1}^{N}(c_p\ln\theta_i+1.156)\frac{\Delta m_i}{M}=\frac{C'_2}{M}, \tag{8}$$

式中N是把大气分成质量为$\Delta m_1,\Delta m_2\cdots$的$N$块，所以

$$M=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i,$$

由 (8) 式，得

$$c_p\ln\sqrt[M]{\prod_{i=1}^{N}\theta_i^{\Delta m_i}}+1.156=\frac{C'_2}{M}, \tag{9}$$

注意到在统计学中对变量x的几何平均值$\bar{x}'$的定义

$$\bar{x}'=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i},$$

故 (9) 式中的$\sqrt[M]{\prod_{i=1}^{N}\theta_i^{\Delta m_i}}$实际上是位温的几何平均值$\bar{\theta}'$，而热力学总熵的算术平均值$\bar{S}$就等价于位温的几何平均值的对数。即

$$\bar{S}=C'_2/M=c_p\ln\bar{\theta}'+1.156.$$

2.3 两个约束条件的不等价性

（3）式和（6）式两个约束条件是不等价的，首先从空气块在运动过程中绝热性的角度考虑。假如空气块在运动过程中是绝热的，由于位温的保守性，则（6）式所表示的全球位温平均守恒就等价于（3）式所表示的大气热力学总熵守恒。但是，大家知道绝热大气仅是对实际大气的一级近似。实际大气由于太阳对地球下垫面和大气的不均匀加热（日变化、季变化），云的变化和降水析出，都导致空气块产生非绝热过程。在这种情况下，全球大气位温守恒与热力学总熵守恒就不等价了。作为对大气热状况较完整的描述，还应加入大气热力学总熵守恒这个约束条件。

再者，从统计学的角度不难看出，由于变量的几何平均值与算述平均值的含义不同，因而这两个平均值在数值上一般地讲是不相等的。也可以说，如果规定（限定）算术平均值为某一常数，则其几何平均值仍有变成其他各种值的自由。

3 大气位温服从 Gamma 分布的证明

3.1 证明

这里所谓的最大熵原理，实际上已经超出了热力学原理，是含义更广的最大熵原理[8]。简单地说，最大熵原理是一个物质系统的某一物理量在物质中的分布总是自动达到状态最丰富的程度。而此时物质系统所呈现的概率分布形态则是最可几的，也是最易出现的。

在这里，物质系统就特指全球大气，物理量就特指空气块的位温。而状态的丰富程度H与物理量θ的分布函数$f(\theta)$的关系是

$$H=-\int_{\theta_0}^{\infty}f(\theta)\ln f(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{10}$$

信息论中把如上积分（$f(\theta)$要有分布函数的含义）称为熵（可以不是热力学熵）。由此不难得出“状态最丰富的程度”就是使H达极大值。

从数学上看，H实际上是$f(\theta)$的泛函，而用最大熵原理求分布函数的问题就成了泛函求极值的问题。

在求泛函的极值时，要附加上一些约束条件。根据（5）式和文献[7]知，分布函数（是相对分布函数）具有概率密度的性质，故它有归一性，即

$$\int_{\theta_0}^{\infty}f(\theta)\mathrm{d}\theta=1, \tag{11}$$

θ_0是θ的下限。利用上式和（5）、（7）式，可以把（3）、（6）两式改写成

$$\int_{\theta_0}^{\infty}(\theta-\theta_0)f(\theta)\mathrm{d}\theta=C_1, \tag{12}$$

$$\int_{\theta_0}^{\prime} \ln(\theta-\theta_0)f(\theta)\mathrm{d}\theta = C_2. \tag{13}$$

C_1、C_2是与C'_1、C'_2有关的另两个常数。

为了在满足上述三个约束条件下求 H 的极值，可以采用拉格朗日（lagrange）乘子法。为此先另构造一个泛函 J，让它是（10）式与上述三个式子的线性组合，即

$$J = \int_{\theta_0}^{x} [-\ln f(\theta) - \beta_0 - \beta_1(\theta-\theta_0) + \beta_2\ln(\theta-\theta_0)]f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

此式中β_0、β_1、β_2是三个待定常数。由前面的三个约束式知，H达极大值时，J也达极大值（仅是加了三个常数）。

令上式中的被积函数为F，则得到欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial f} = -\ln f(\theta) - \beta_0 - \beta_1(\theta-\theta_0) + \beta_2\ln(\theta-\theta_0) - 1 = 0.$$

解欧拉方程，便可得到 J 的极值点$f(\theta)$

$$f(\theta) = \mathrm{e}^{-(1+\beta_0)}(\theta-\theta_0)^{\beta_2}\mathrm{e}^{-\beta_1(\theta-\theta_0)}. \tag{14}$$

这个式子就是状态的丰富程度H达极值时$f(\theta)$应当满足的关系。可以认为它正是我们所要求的结果。

不过，为了证明$f(\theta)$是H的极大值点还需做如下工作：对 F 求二阶偏导数，得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = -\frac{1}{f(\theta)}.$$

由于$f(\theta)$与概率密度有相同的性质，故$f(\theta)$仅能为正值，所以$(\partial^2 F/\partial f^2) < 0$。这表明$f(\theta)$是$H$的极大值点。

另外，把（14）式代入（11）式，得

$$\int_{\theta_0}^{x} \mathrm{e}^{-(1+\beta_0)}(\theta-\theta_0)^{\beta_2}\mathrm{e}^{-\beta_1(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta = 1.$$

注意到

$$\int_{\theta_0}^{x} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x),$$

上述积分变成了

$$\mathrm{e}^{1+\beta_0} = \Gamma(\beta_2+1)/\beta_1^{\beta_2+1}.$$

将此代入（14）式，得

$$f(\theta) = \frac{\beta_1^{\beta_2+1}}{\Gamma(\beta_2+1)}(\theta-\theta_0)^{\beta_2}\mathrm{e}^{-\beta_1(\theta-\theta_0)}. \tag{15}$$

这就是初步从最大熵原理求得的位温 θ 的分布函数$f(\theta)$的解析式，在概率论中称其为 Gamma 分布。这正是我们把位温分布称为 Gamma 分布的原因。

3.2 参数估计

前面求得的位温分布函数表达式（15）中有β_1、β_2两个待定参数。现在要利用关于位温的两个积分约束即（12）和（13）式来确定β_1、β_2的值。把（15）式代入（12）、（13）式，得

$$\begin{cases}(\beta_2+1)/\beta_1=C_1,\\ \psi(\beta_2+1)-\ln\beta_1=C_2.\end{cases} \tag{16}$$

式中$\psi(\beta_2+1)$是ψ函数，它是

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Gamma(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}-1}{t-1}-C,$$

C是欧拉常数，其值约为0.5772156。

（16）式中含有两个等式和两个未知数β_1、β_2，它原则上是可解的，但实际上很难求得解析解。因此采用迭代法求其数值解。下面是迭代方程

$$\beta=\exp\left[\int_0^1\frac{t^{\beta-1}-1}{t-1}\mathrm{d}t-C+\ln C_1-C_2\right],$$

这里定义$\beta=1+\beta_2$。利用文献[1]中的数据知$\theta_0=250$ K，$\bar{\theta}=335.365$，算出$C_1=\bar{\theta}-\theta_0=85.365$和$C_2=4.3154895$。将它们代入迭代方程，计算得出了$\beta\approx3$，$\beta_1=3/C_1$。把它们代入（15）式，得

$$f(\theta)=\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{3}{\bar{\theta}-\theta_0}\right)^3(\theta-\theta_0)^2\mathrm{e}^{-\frac{3(\theta-\theta_0)}{(\bar{\theta}-\theta_0)}}, \tag{16}$$

由于$\Gamma(3)=2!=2$，故上式与最初的经验公式即（4）式完全相等。至此就完成了全球大气位温服从Gamma分布的证明。

4 结论与讨论

（1）从物理含义和统计学两个角度论证了全球大气位温积分守恒与大气热力学总熵守恒是两个不等价的约束。作为对大气热力状况的更完整描述，应在数值天气预报中补入大气热力学总熵守恒这样一个约束条件。这，物理依据是充足的，无疑为数值预报模式提供了新内容。

（2）用最大熵原理证明了大气位温分布服从Gamma分布，这使得理论证明与从实际资料计算得到的结果完全吻合。这一成功至少说明了两点：第一，进一步证实了最大熵原理适用于大气；第二，涉及位温的积分型约束仅有两个，即全球大气位温守恒和大气热力学总熵守恒。并且这两个约束条件相互之间是不能替代的。

参　考　文　献

1 张学文、马力，1992，大气的热力学总熵，大气科学，16（3），339～344.

2 近藤次郎，1985，数学模型，北京：机械工业出版社，439～446.

3 汤懋苍，1989，理论气候概论，北京：气象出版社，109～111.

4 Longair. M.S., 1984. Theoretical concepts in physics, Cambridge University Press, 83～91.

5 Lorenz，E.N.，1976，大气环流的性质和理论（中译本），北京：科学出版社，94.

6 Jaynes, E.T., 1957. Information Theory and statistical Mechanics, *Physical Review*, **106**, **4**, 620～630.

7 张学文，1986，相对分布函数和气象熵，气象学报，**44**（2），214～219.

8 张学文、马力，1992，熵气象学，北京：气象出版社，17～67，108～173.

Demonstration of Gamma Distribution of the Potential Temperature in the Global Atmosphere

Ma Li　and　Zhang Xuewen

(*Xinjiang Institute of Meteorology, Urumqi* 830002)

Abstract　The physical means of the integral conservation of potential temperature and the conservation of thermodynamical total entropy in the global atmosphere and the non-equivalence relation between them have been discussed in this paper. It is pointed out that the characteristics of the conservation of thermodynamical total entropy in the global atmosphere should be used as a constraint in numerical models so that the thermodynamical state of the atmosphere could be kept intact in the model. By using maximum entropy principle and these two constraints mentioned above, we have demonstrated theoretically that the potential temperature in the global atmosphere is in obedient to the Gamma distribution which could also be derived from experimental data.

Key words　potential temperature　maximum entropy principle　distribution function