

# 子波变换在大气科学中的应用研究

胡增臻 石 伟

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100080)

**摘 要** 子波变换是在 80 年代初才开始发展起来的崭新的数学分析方法。它适宜于分析研究信号的局部性质。子波变换在地震资料分析、图像处理、声音信号分析、分形、抽样、湍流以及大气和海洋科学的诸多研究领域中得到了广泛的应用, 与传统数学方法相比显示出巨大的优越性。本文在简要介绍子波变换的定义和一些基本概念的基础上, 结合实例给出子波变换在大气科学中的应用研究。最后, 讨论了使用子波变换时应注意的问题并展望了它的应用潜力。

**关键词** 子波变换 Fourier 变换

## 1 引言

子波变换 (Wavelet Transforms, 简称 WT; 也有人称为小波变换) 由法国 Elf-Aquitaine 公司的石油工程师 Morlet 于 1980 年在进行地震数据分析工作时首创的<sup>[1]</sup>。在随后的 10 余年成为国际上极为活跃的科学研究领域。目前它已被广泛地应用于地震资料分析、图像处理、语言信号分析、分形、抽样、湍流以及大气和海洋科学等诸多研究领域。

1991 年, Mahrt<sup>[2]</sup>在分析有切变和加热的边界层中的涡旋非对称性时, 将 WT 引入了大气科学中。最近几年, WT 广泛应用于大气科学的许多研究领域, 如分析低层冷锋<sup>[3]</sup>、大气和森林交界面的相干结构<sup>[4]</sup>、微锋 (microfronts) 及相联系的相干事件<sup>[5]</sup>、降水场空间结构<sup>[6]</sup>、简化重力赤道模式 (reduced gravity equatorial model) 中混合波 (Yanai wave) 的色散<sup>[7]</sup>、卫星红外辐射资料中的周期加倍和时间频率的局域化<sup>[8,9]</sup>、ENSO 循环<sup>[10]</sup>、降水变化<sup>[11,12]</sup>、以及其他方面<sup>[14~16]</sup>。

## 2 WT 和 FT

### 2.1 WT 的定义及有关的基本概念

1946 年, Gabor<sup>[1]</sup>为了研究信号在局部范围内的频率特征, 在 Fourier 变换 (Fourier transform, 简称 FT) 中引入了窗口函数  $g(t)$ ,  $g(t)$  在有限区间外恒等于零或很快趋于零 (图 1), 称

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt$$

为函数  $f(t)$  关于窗口函数  $g(t)$  的窗口 Fourier 变换 (Window Fourier transform, 简称 WFT) 或 Gabor 变换 (图 1)、 $G_f(\omega, \tau)$  反映了信号  $f(t)$  在  $t = \tau$  附近的频谱特征, 而且当窗口函数  $g(t)$  满足一定的标准化条件时, 有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} g(t-\tau) G_f(\omega, \tau) d\tau.$$

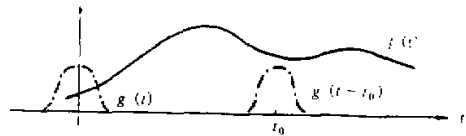


图 1 WFT 示意图

所以  $G_f(\omega, \tau)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ ) 确实包含了  $f(t)$  的全部信息。虽然 WFT 的窗口位置随参数  $\tau$  而变 (平移), 但其形状与大小则与频率无关而保持不变, 这不符合实际问题中高频信号的分辨率应比低频信号高, 也就是说变换的窗口大小应随频率而变, 频率愈高窗口应愈小。此外, 在数值计算中, 必须将连续依赖于参数的变换进行离散化, FT 离散化后即得按正交的三角函数系展开的 Fourier 级数。已经证明, 对于 WFT 不论如何离散化均不可能使它成为一组正交基。WFT 的种种缺陷使它未能得到广泛应用和进一步发展。

WT 继承和发展了 WFT 的局部化思想, 它除了窗口大小随频率增高而缩小外, 还存在着离散的正交基等优良性质。WT 的原始概念最早是 Morlet 于 1980 年在进行地震数据分析工作时引进的<sup>[1]</sup>。在随后的 10 余年中经过众多数学家的一系列工作, WT 有了很大的发展, 已经有了比较系统的理论和计算方法, 并有一系列有关的专著和论文集报告集出版<sup>[1,17]</sup>, 这进一步推动了 WT 的深入发展和在许多研究领域中的应用<sup>[1~12]</sup>。子波变换是以群论和平方可积表示为基础的一些崭新的数学方法。这些数学方法使我们能够将一个信号或一个场尽可能在各个方向开折 (unfold) 成空间或尺度, 其基础是仿射群 (即平移与伸缩) 下的不变性。这使我们能够将一个信号分解成对空间或尺度的贡献。这些方法使用了在空间中局域化的、被称为子波的一些分析函数。在用信号将所选的分析子波进行卷积之前使该子波膨胀或收缩, 即可得到尺度的分解。函数  $f(x)$  的 WT 定义为

$$W_f(a, b) = \langle f, I_{a,b}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(a) f(x) I\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

其中,  $\langle f, I_{a,b}(x) \rangle$  表示  $f(x)$  在  $I_{a,b}(x)$  上的投影; 函数  $P(a)$  的确定是使  $W_f(a, b)$  满足归一化条件;  $I((x-b)/a)$  是子波基 (basic wavelet) 或称为母子波 (mother wavelet); 通过平移 ( $x \rightarrow x-b$ ) 和伸缩 ( $x \rightarrow x/a$ ) 可产生相应的子波族  $I_{a,b}(x)$ ,  $a, b \in R$ ,  $a \neq 0$ 。

WT 又被称为数学上的显微镜 (microscope), 它把低维信号放在高维空间中去观察, 通过子波  $P(a)I((x-b)/a)$  在位置  $b$  为最大的性质, 可以研究  $f(x)$  在各时刻或各位置上的奇异性。通过伸缩尺度  $a$  的调节, 可以探讨  $f(x)$  在不同尺度上的演变情况。图 2 是 Morlet 母子波以及经平移和伸缩后的子波示意图<sup>[8]</sup>。

子波的容许性条件是

$$(1) \text{ 零平均值: } \int_{-\infty}^{\infty} I(x) dx = 0,$$

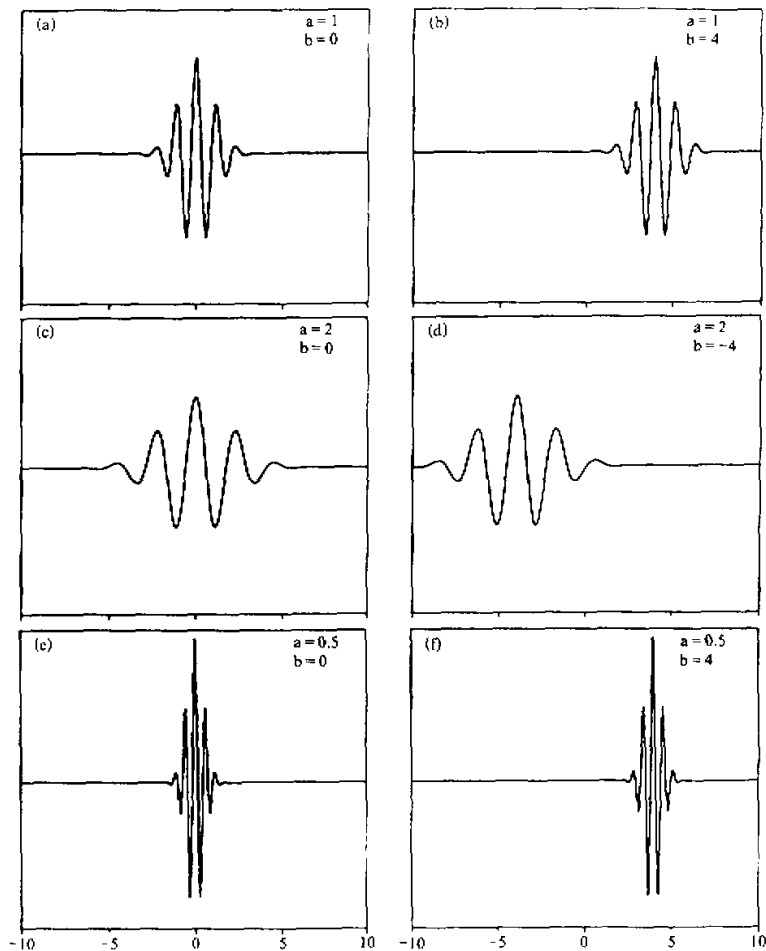


图3 Morlet 母子波 (a) 和经过平移与伸缩后的子波示意图(b)~(f),  $k_{\psi} = 5.4^{[1]}$

(2) 紧支集:  $\int |\omega|^{-1} |\hat{I}(\omega)|^2 d\omega < \infty$ , 其中  $\hat{I}(\omega)$  是  $I(x)$  的 FT,

(3)  $\frac{1}{L} \int I(x) I(x) dx = 1$ , 其中  $L$  是  $I(x)$  的支集。

WT 有相似性, 尺度分解只应当通过唯一的一个母函数的平移和伸缩而得到, 所有的分析子波都应当是彼此相似的。WT 的自相似性, 特别适合于研究像湍流、气候、地震资料等这种无明显特征尺度, 即有自相似标度律的现象<sup>[6,13]</sup>。此外, WT 还有可逆性<sup>[7]</sup>, 根据信号的子波系数能精确地恢复信号, 即

$$f(x) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_f(a, b) I_{a,b}}{a^2} da db,$$

其中,  $\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\omega} d\omega$ .

WT 是在一个给定尺度下的一个分析子波与所要分析的信号之间的内积, 因此, 子波系数中既包含了有关函数  $f(x)$  的信息, 也包含了子波本身的信息。于是, 选取适当的子波成为一个十分重要的问题。子波的选取取决于想从信号中提取的信息的种类。目前, 广泛应用的实值子波有以下几个<sup>[1]</sup>:

(1)  $I_m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} [\exp(-|x|^2/2)]$ , 它是 Gauss 分布的  $m$  阶导数 (图 3

c、d)。其中, 当  $m=2$  时, 称为 Marr 子波, 又称为“墨西哥帽 (Mexican hat) 子波” (图 3d)。

(2)  $I(x) = \exp(-|x|^2/2) - (1/2)\exp(-|x|^2/8)$ , 它是两个 Gauss 分布的差 (图 3e)。

(3)  $\hat{f}(k) = \exp[-(|k| - |k_\psi|)^2/2]$ , 它被称为 Halo 子波。

应用比较广泛的复值子波有以下几个<sup>[1]</sup>:

(1)  $I(x) = \exp(\sqrt{-1}k_\psi x) \exp[-(|x|^2/2)]$ , 它是最常用的 Morlet 子波 (图 3a)。它是波矢量  $k_\psi$  的一个平面波, 通过单位宽度的一个 Gauss 包络予以调制。

(2)  $I_m(x) = \Gamma_{(m+1)} \frac{(\sqrt{-1})^m}{(1 - \sqrt{-1}x)^{1+m}}$ , 这是 Paul 子波 (图 3b), 常用在量子力学中。

## 2.2 WT 和 FT 的比较

自从 Fourier 关于热的理论工作以来, 许多的研究工作中最常用的基函数就是三角函数, 因为它们构成平方可积函数的函数空间  $L^2(0, 2\pi)$  的正交基。由此可将任何函数  $f(x) \in L^2(0, \pi)$  分解成一些 Fourier 矢量的一个线性组合, 通过 Fourier 系数

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

来确定线性组合的系数。这样把原来对函数  $f(x)$  的研究转化为对权函数 (FT 展开系数)  $\hat{f}(\omega)$  的研究。经典的 Fourier 分析是一种线性频域分析, 许多在时间域中看不清的问题, 通过频率域的分析就变得很清楚了。因此, 自 1822 年 Fourier 提出 Fourier 分析方法以来, 这种方法就成了应用最为广泛而且十分有效的一种数学方法。由于三角函数永远是振荡的, 因此  $f(x)$  中的信息在全部谱系数中完全非局域化了, 即在时空域中没有任何分辨能力。事实上,  $\hat{f}(\omega)$  是关于频率为  $\omega$  的谐波分量的振幅, 它是由  $f(x)$  的整体决定的, 这使得无法由  $\hat{f}(\omega)$  了解  $f(x)$  在某一点附近的性质。但是 FT 并未失去关于  $f(x)$  的任何信息, 只不过是把它在全域上“铺展”开了, 给出资料中每个谐波的平均振幅和位相。

尽管就实际问题而言, WT 和 FT 类似, 但在保持信号中存在的局域性方面, 二者是完全不同的。与 FT 相反, WT 保持着信号中存在的局域性, 并且使我们能够局域地重构一个信号, 于是就可能只重构它的一部分或者给出只对一给定尺度范围的局域贡献, 即给出每个谐波的振幅和位相的“瞬时”估计或局地值, 从而可以提供信号的各种特征

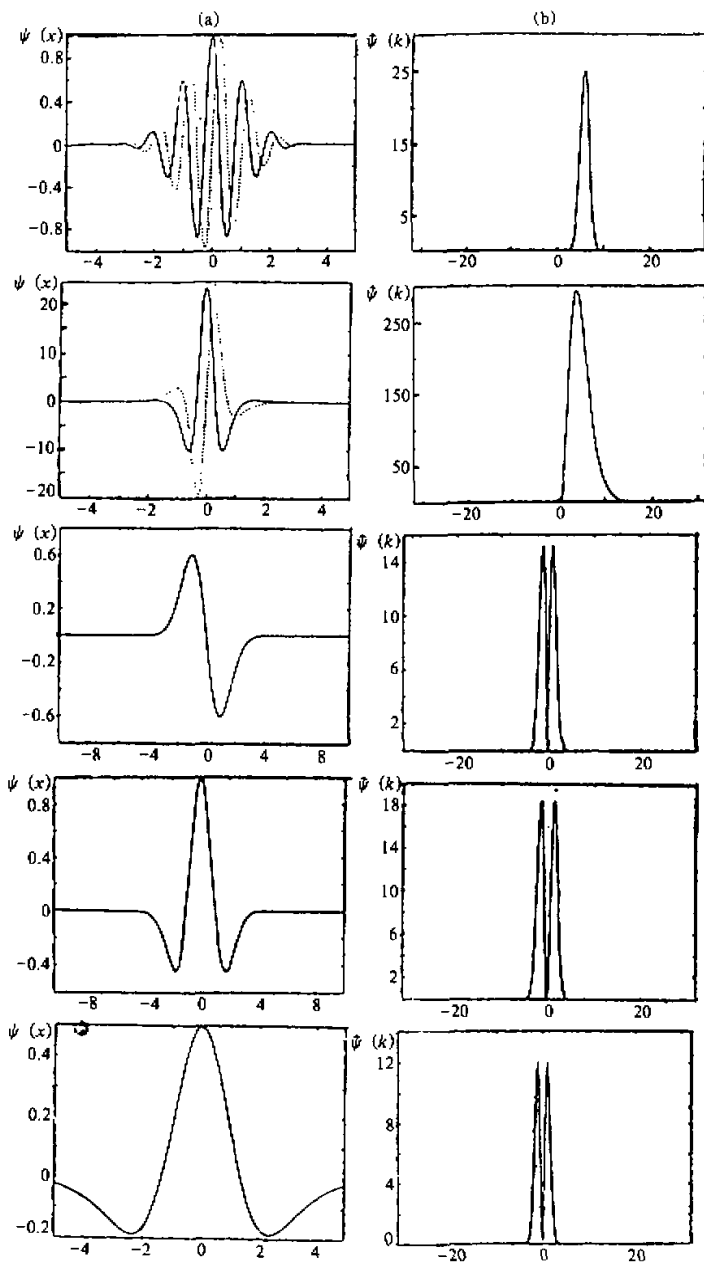


图3 常用于连续WT的子波 $\psi$ 的一些例子(实线为实部,虚线为虚部)。图中左、右分别为 $\psi(x)$ 和 $\hat{\psi}(k)$

(a)  $k_w = 6$ 时的 Morlet 子波, (b)  $m = 4$ 时的 Paul 子波, (c) Gauss 分布的 $l$ 阶导数, (d) Marr 子波 (Gauss 分布的2阶导数), (e) Gauss 分布的差(2个 Gauss 分布的差)<sup>[1]</sup>

在所在位置的信息,这使得 WT 可以用来仔细研究非定常的空间或依时信号的特性。实际上,在信号的局域行为与其子波系数的局域行为之间存在着联系。例如,如果函数  $f(x)$  是局域光滑的,则相应的子波系数就很小,而如果  $f(x)$  含有一个奇点,则在该奇点附近子波系数的振幅将急剧增大。如果该信号在某一尺度或位置处并不振荡,则子波系数为零,而 Fourier 系数可能不为零。如果子波系数偶然发生误差,只影响受扰动位置附近局域重构的信号,而 FT 则会在重构的信号中将误差处处铺展开,从而影响全域的信号。此外,由于三角级数的交错特征,FT 对相对误差也特别敏感,WT 则不是这样,甚至有可能修正连续子波系数中存在的误差,这主要是与连续 WT 的再生核性质相联系的。

在分析急剧变化(如突变)或有奇点的信号时,WT 和 FT 的差异尤为突出。如 WT 不但可以揭示突变点,而且还可以揭示突变发生的时间尺度,这更有利于研究突变的机理。而 FT 无法提取出  $f(x)$  中有关奇异性和突变点的信息。图 4 给出了一个示范性例子<sup>[7]</sup>,图 4a 是一个单频信号曲线,但在资料中部频率发生了变化,图 4b 是一个由双频信号组成的曲线,这两个十分不同的信号却有非常相似的功率谱,二者都有相同的两个显著的峰值(图 4c、d)。因为在 Fourier 分析过程中关于信号演变的信息丧失了,如果事先不了解这一点,就很难知道哪一个信号将产生哪一个功率谱。WT 可以产生“瞬时”系数,因而就能给出有关非定常过程演变的信息(图 4e、f)。

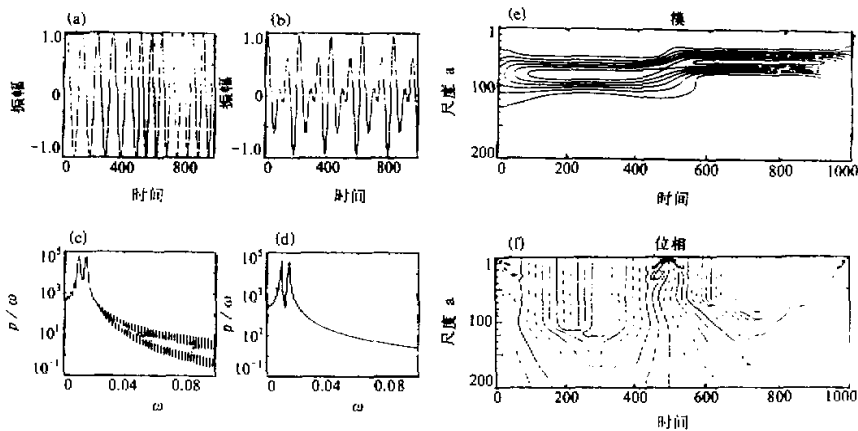


图 4 说明 Fourier 分析局限性的示意图<sup>[7]</sup>。十分不同的信号却有非常相似的功率谱:(a) 单色信号,但在资料中部频率发生变化;(b) 双频信号;(c) 是 (a) 的原始功率谱;(d) 是 (b) 的原始功率谱;(e)、(f) 分别是信号 (a) WT (Morlet 子波  $g(r) = e^{ir} e^{-r^2/2}$ ) 的模和位相

### 3 WT 在大气科学中的应用研究

WT 在湍流研究方面已有较多的应用,如 Argoul 等<sup>[13]</sup>通过 WT 第一次给出了 Richardson 串级过程的清晰图象,揭示了它的分数维特征。研究还表明其能量串级过

程与非均质的 Cantor 集的确定性构造规则十分相似。Farge<sup>[1]</sup>系统总结了 WT 在湍流中的应用。大气科学中的许多现象是多种时空尺度系统相互作用的结果,许多时间序列的频率和振幅是随时间变化的,严格的周期现象几乎是不存在的,Fourier 分析的应用有很大的局限性。因此自 1991 年 Mahrt 将 WT 引入到了大气科学中以来的几年中,WT 在大气科学中的应用越来越广泛深入。这些工作显示了用 WT 研究大气科学问题有很大的优越性和巨大潜力。下面从中小尺度和气候研究两方面,简要介绍 WT 在大气科学中的应用。

### 3.1 WT 在中小尺度研究中的应用

1991 年, Mahrt 在研究有切变和加热的边界层中的涡旋非对称性时,在大气科学中首次使用了 WT<sup>[2]</sup>。Mahrt 根据几次飞机低空飞行的观测资料,利用一些统计量研究了平均切变对涡旋上升气流非对称性的影响。这种非对称包括有低速水平运动的上升气流与有快速水平运动的下沉气流之间微锋的形成。使用的 WT 公式和 Haar 基函数是

$$W\{f(x), a, b\} = a^{-1/2} \int h[(x-b)/a] f(x) dx,$$

$$h\left(\frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases} -1, & \frac{x-b}{a} = -\frac{1}{4}, \\ 1, & \frac{x-b}{a} = \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

与结构函数相比, Haar-WT 的方差是这种涡旋中主要尺度的一个更好的指示因子。同时, Mahrt 的分析研究还指出,有最大 WT 值的伸缩尺度对应变化的相干尺度或影响宽度,而不是变化本身的宽度。此外,由于在 WT 中大于和小于窗口的尺度都会被消除或部分消除,因此, Haar-WT 有带通滤波器的作用,更便于集中研究某一给定的尺度;相比之下,结构函数更类似于一个高通滤波器。在分析主要事件中的某一尺度现象时, Haar-WT 较结构函数更有效。

Gamage 和 Hagelberg (简称 GH) 利用局域变换分析研究了微锋及相伴随的相干事件<sup>[5]</sup>。用一个一般的局域变换研究了条件抽样方法的特性。定义了一个协方差变换 (Covariance transform) 用来度量信号与有紧支集 (Compact support) 可伸缩和平移的生成函数之间的协方差。分析表明,这个局域变换在分析包含有突发 (sharp edges) 事件,如锋或微锋时,比有能量守恒性质的转换如 FT,甚至 WT 更好。使用的局域变换公式是

$$W_f(a, b)|_p = a^{-p} \int_{-x}^x f(x) h\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

其中参数  $p$  是标准化因子。当  $p=1/2$  时是 WT, 此时上述方程定义了一个保范映射。当  $p=1$  时,在 GH 的文章中定义为协方差变换<sup>[5]</sup>,这是一个非保范映射,即  $W_f(a, b)|_1$  在协方差位相平面的  $L^2$  范数不等于信号的范数。函数  $f$  和  $h$  的协方差和相关系数为

$$\text{cov}_{gh}(a, b) = \frac{1}{a} \int_{b-a/2}^{b+a/2} f(x) h\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

$$R_{fh}(a, b) = \frac{\text{cov}_{fh}(a, b)}{[\text{cov}_{ff}(a, b)\text{cov}_{hh}(a, b)]^{1/2}},$$

当  $p=1$  时, 有

$$W_f(a, b)|_1 = \text{cov}_{fh}(a, b) = R_{fh}(a, b)[\text{cov}_{ff}(a, b)\text{cov}_{hh}(a, b)]^{1/2}.$$

在上式中,  $R_{fh}$  用来度量在  $b$  附近  $f$  和  $h$  在形状上的相似性。 $R_{fh}$  为正值说明是同位相相似,  $R_{fh}$  为负值说明是反位相相似。但  $R_{fh}$  只能度量信号形状的相似性, 而与信号的振幅无关, 也就是说不能将“噪声水平 (noise level)”的信号与“事件 (events)”区分开来。 $\text{cov}_{ff}(a, b)$  是  $b$  附近信号方差的一个度量, 它可以将“噪声水平”的信号和“事件”区分开来。这是因为  $W_f(a, b)|_1$  既可以度量  $b$  附近的函数基  $h$  和信号  $f$  之间的相似性, 又可以度量  $f$  的方差。考虑到研究的对象是有微锋这种不连续现象存在的事件, 因此, 函数基  $h$  采用 Haar 函数。此时有

$$D^2(a)|_1 = \int_0^\infty [W_f(a, b)|_1]^2 db = \int_0^\infty [R_{fh}]^2 [\text{cov}_{ff}] db.$$

通过上式可计算出有函数  $h$  属性的最相干事件的尺度。在 GH 的文章中, 通过计算风速  $u, v, w$  的  $D^2(a)|_1, W_f(a, b)|_1, W_f(a, b)|_{1/2}, W_f(a, b)|_2$ , 并与其他变换方法 (VITA 等) 进行比较, 显示了协方差变换在揭示资料中的微锋事件和相干结构及其尺度时的优越性。

Gao 和 Li (简称 GL) 用子波分析方法研究了大气和森林交界面上的相干结构<sup>[4]</sup>。使用的子波公式是

$$(W_{\psi_f})(a, b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

$\psi(t')$  采用墨西哥帽子波函数  $\psi(t') = (1 - t'^2) \exp(-t'^2/2)$ 。通过分析落叶林中和它上部的温度和垂直速度资料表明, 子波方法可以为分析森林附近有相干结构相伴的热力学和流场提供一个客观方法。WT 表明不连续的冷暖中心是与有组织的上升和下沉运动相联系的, 这些上升和下沉运动在不同高度上有类似的形态不同的振幅。对不同高度上温度和垂直速度子波方差计算表明, 局地最大值对应某种时间尺度, 这对于客观确定结构的特征时间尺度是很有用的。通过这种方法确定的位于树冠中的温度和垂直速度结构的特征时间尺度分别是 56~60 s 和 40~44 s, 这与以前用多层探测方案确定的时间尺度十分相近。树冠以上的温度结构有较短的持续期, 随着高度增高时间尺度的递减率是与平均风速随高度的增加而增大成比例的。相干结构的水平尺度是 83~112 m。

Kumar 和 Foufoula-Georgiou (简称 KFG)<sup>[6]</sup>在介绍了 WT 知识的基础上, 运用正交子波 (Haar 子波) 研究了空间降水的尺度和振荡特征。由于一直没有振荡在多维空间的明确定义, 所以到目前为止对降水场自相似特征的研究很少。KFG 的研究表明 WT 提供了分解二维空间非均质和各向异性的降水场的一个方便和协调的方法。用这一分解产生的分量可以探讨降水场的振荡。在一些不太严格的假定下, 分量场可以看成是均质的, 进而可以进行二阶分析, 为了解过程的属性提供进一步的信息。WT 作为一个

空间尺度分析方法, 对研究过程的尺度属性也是一个方便的工具。通过使用正交子波, KFG 研究了一个飓风风暴个例中自相似的存在。

Garage 和 Blumen (简称 GB) 使用 WT、FT 和 EOF 分解方法对低层冷锋做了比较分析<sup>[3]</sup>。在边界层中观测到的大气冷锋是一个不同物理属性空气的相对狭窄的过渡带, 在锋带附近经常可以观测到波动式的属性或涡旋结构。利用高塔和飞机观测的 3 次冷锋对应的数据集 (BAO-1, BAO-2, STORM), 比较了使用全域 (EOF, FT) 和局域 (WT) 变换分析结果的差异 (图 5)。由图 5 可以看出, 在 FT 中由于使用的是全域上的周期函数基, 所以不可能给出任何局地的属性, 而且也不可能给出任何局地相干结构的任何有关位置的信息, 而只包含尺度信息。当用于分析有狭窄过渡带的资料时, FT 甚至无法给出清晰的尺度信息。FT 不能反映偶极式或阶梯式变化的结构。FT 是严格的周期基函数, 因此不可能反映非周期的局地相干结构。EOF<sub>1</sub> 解释了 96% 的方差贡献, 反映了过渡带的主要特征, 是对观测资料中过渡带宽度的一个集合平均估计。EOF<sub>2</sub> 解释 2% 的方差表示了资料中非严格锁相的影响和偶极子变化的影响。EOF<sub>3</sub> 和更高阶的分量解释很小的方差贡献, 不包含任何有意义的特性。因而 EOF 对资料集合可以提供最好的 (全域) 基底, 然而不能提供存在于资料中的任何局地性质和随机分布。

在比较了正弦波、斜坡函数、双曲正切函数和阶梯函数等 4 个反对称子波后, GB 选择了双曲正切作为子波基。WT 系数可以度量子波与资料的相似性, 反映资料在子波上的投影。大 WT 系数可以给出相干结构的位置、尺度, 并与解释的方差成比例。从图 5d<sub>1</sub>、d<sub>2</sub> 和 d<sub>3</sub> 可以看出, WT 给出了较 FT 和 EOF 多得多的信息, 从图中可以很清楚辨别出过渡带的位置、宽度以及一些重要二级属性的位置和尺度大小。图 5d<sub>1</sub> 中标注 1 指狭窄的过渡带, 它与大的涡旋式结构相联系, 标注 2 指强突发事件, 标注 3 指减弱的波动模, 标注 4 指小尺度扰动。图 5d<sub>2</sub>、d<sub>3</sub> 也有大致类似的特征。因此, WT 是一个客观分析工具, 它可以提供偶极式相干结构的位置和尺度的相对清晰的信息以及其他一些小尺度特性。

总之, 通过比较研究发现, Fourier 分析不适用流场中存在与锋带动力学相联系的相对孤立的锋面梯度和非周期、不连续扰动的现象。EOF 对事件有最大的解释方差, 提供最佳的方差分解, 但不能揭示局地能量扰动的贡献。EOF 和 Fourier 分析不能揭示与局地结构有关的信息, 而 WT 可以提供场中最显著结构的位置、尺度及形状。此外, WT 和 Fourier 展开的基底函数都是事先给定, 单个事件即可, 而 EOF 展开的基底函数自定, 资料需要若干事件集合。

### 3.2 WT 在气候研究中的应用

气候问题是当今大气科学的一个热点研究课题, 也是各国政府、科学界和人民广泛关注的一个重大科学问题。WT 已开始应用于气候研究中, 揭示了许多有意义的气候事实<sup>[7~12]</sup>。

Meyers 等<sup>[7]</sup>在介绍了 WT 的定义和一些基本概念的基础上, 运用 Morlet 子波  $g(r) = e^{icr} e^{-r^2/2}$ , 研究了简化重力赤道模式中混合波 (Yanai waves, mixed Rossby-gravity waves) 的色散, 并比较了做 WT 前资料预处理的几种方案的差异。混合波周期大约 25 d 左右, 水平波长大约  $10^6$  m, 波向西向上传播, 群速度向东向下传播, 位相

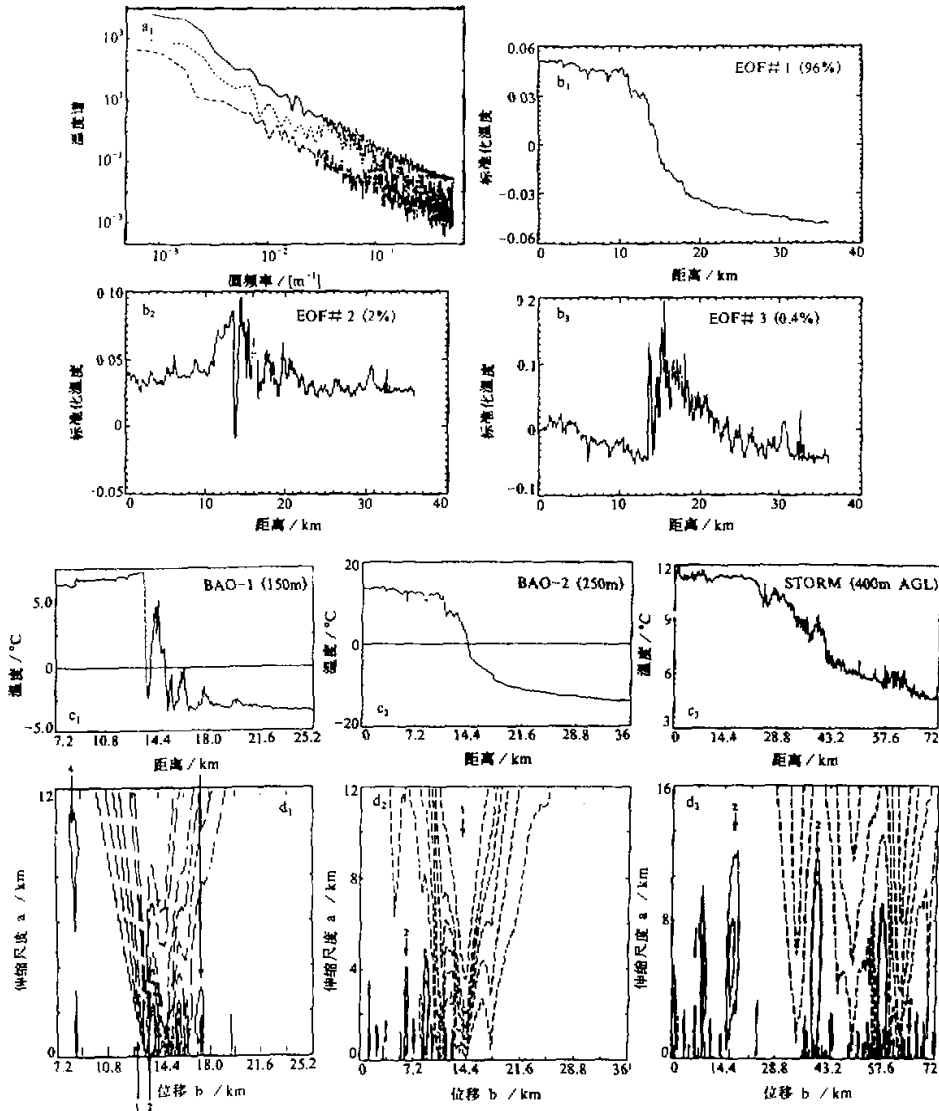


图 5 ( $a_1$ ) Fourier 温度谱, BAO-1 (200 m, 实线), BAO-2 (200 m, 短虚线), STORM (400 m, 长虚线), 横坐标是圆频率, 纵坐标是温度谱 ( $^{\circ}\text{C}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ ). ( $b_1$ )、( $b_2$ ) 和 ( $b_3$ ) 是 3 个资料集的温度 EOF 分解的 3 个空间场, 横坐标是距离 (km), 纵坐标是无量纲的振幅, 解释的方差在右上角. ( $c_1$ )、( $c_2$ ) 和 ( $c_3$ ) 对应于 BAO-1 (150 m), BAO-2 (250 m) 和 STORM (400 m) 的温度曲线. ( $d_1$ )、( $d_2$ ) 和 ( $d_3$ ) 是与 ( $c_1$ )、( $c_2$ ) 和 ( $c_3$ ) 对应的子波分析结果, 纵坐标是伸缩尺度  $a$  (km), 横坐标是位移  $b$  (km); 标注 1 是指锋的过渡带, 标注 2 是指资料中的大振幅突发事件, 标注 3 是指减弱波的模, 标注 4 是小尺度结果<sup>[2]</sup>

速度和群速度分别是  $33 \sim 73 \text{ cm/s}$  和  $16 \text{ cm/s}$ ，曾在卫星图像中观测到在热带东太平洋沿赤道锋附近有类似的波动。通过计算变换的时间演变，可在波数的有限域中直接度量混合波的群速度和频散。子波计算的结果在高波数时与线性理论结果十分一致，但在低波数时计算的群速度减慢，这可能与边界的影响有关。

Weng 和 Lau 用正交连续 WT 证实了在模拟和实际资料中的周期加倍和时间-频率局域化特征<sup>[8]</sup>。首先用 Haar WT 分析了一个简单非线性动力学系统模拟的不连续时间序列的特征，然后用复 Morlet WT 根据间隔为 3 h 的 2 年 (1987~1988 年) 日本静止气象卫星红外辐射资料，研究了热带对流时间-频率的局域性。分析指出在卫星红外辐射资料中存在时间局域化的多时间尺度。红外辐射变化的两种状况分别对应干、湿两个阶段，在湿阶段中从半日、日、天气尺度到季节内尺度变化的多时间尺度活跃。特别是在一个湿阶段的强季节内变化周期中，天气尺度变化异常活跃 (图 6)。卫星资料中的显著周期有  $1/2 \text{ d}$ 、 $1 \text{ d}$ 、 $2 \sim 3 \text{ d}$ 、 $4 \sim 6 \text{ d}$ 、 $10 \sim 15 \text{ d}$ 、 $20 \sim 30 \text{ d}$ 、 $50 \sim 60 \text{ d}$  等，有明显的周期倍增现象，而在这个周期倍增关系中，主要频率间的位相关系似乎也是确定的，但受到外部强迫和内部频率分裂的影响。不同时间尺度振荡间的这种锁相关系意味着天气尺度和季节内尺度变化可能是热带大气自激振荡和天文学的外强迫 (年、日辐射变化) 相互作用而产生的混合振荡。各种时间尺度最终可能与日和年尺度太阳辐射变化的谐波或次谐波有关。

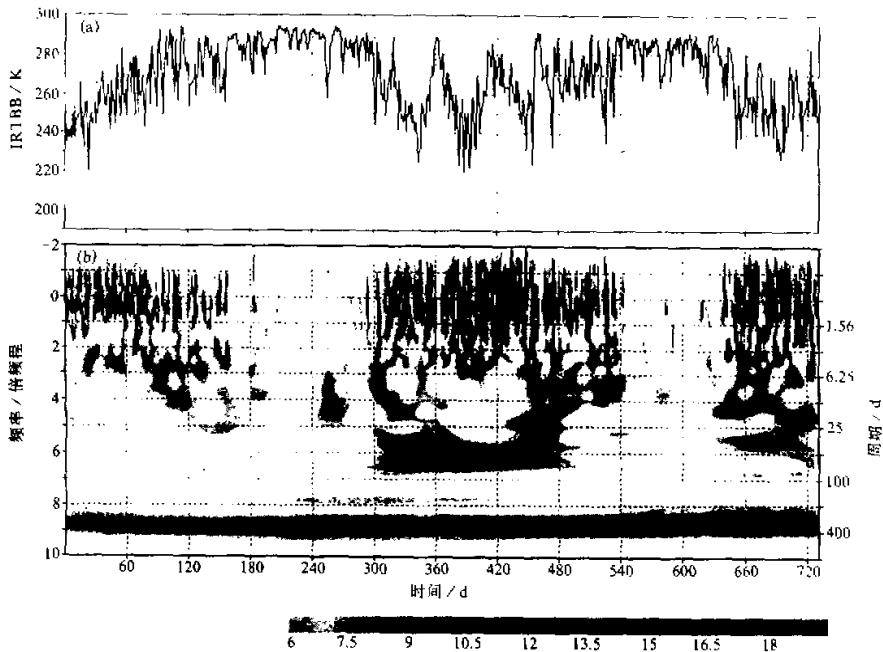


图 6 (a) 1987~1988 年 ( $108^{\circ}\text{E}$ ,  $7^{\circ}\text{S}$ ) 处逐日 IR TBB (红外黑体温度) 时间序列。

(b) 是复 Morlet 子波系数的模的时间-频率图

资料间隔 3 h, 共 5848 个点

Weng 和 Lau<sup>[9]</sup>最近进一步发展了前面的工作<sup>[8]</sup>。根据间隔为 3 h 的 9 年 (1980~1988 年) 日本静止气象卫星红外辐射资料, 利用 WT 研究比较了热带西太平洋上不同位置 and 不同下垫面 (海洋性陆地和海洋) 的两个站的对流演变特征以及由外部强迫和大气内部动力学导致的不同时间尺度的相互作用。结果表明, 位于海洋性陆地和海洋上的这两个站的对流活动的季节变化特征有明显的差异: 如主要时间尺度、强度、多时间尺度间的关系等均有不同。反映出外部强迫对陆地上和海洋上的多时间尺度相互作用有不同的作用。

石伟<sup>[10]</sup>利用墨西哥帽高斯型实数 WT ( $g(t)=(1-t^2)e^{-t^2/2}$ ) 对 1470~1989 年共 520 年的 ENSO 序列进行了分析。指出在 WT 呈现振荡的地方很容易分辨出局地的奇异点。每个奇异点都是一次厄尔尼诺或拉尼娜事件的转折点。WT 分析还发现, 在 ENSO 历史的演变过程中, 不仅包括人们经常提到的 3~5 年周期, 而且也存在一个周期较长、强度与前者相当的慢过程。这是通过功率谱及最大熵谱分析等传统分析方法所看不到的。

Hu 和 Nitta<sup>[12]</sup>利用 WT 研究了印度和华北夏季降水变化对时间尺度的依赖性。图 7 是华北 (北京和天津) 1891~1990 年夏季降水的序列及其用墨西哥帽子波做的 WT 结果和功率谱分析结果。由图 7 可见, 华北夏季降水在不同年代起主导作用的时间尺度有明显差异。例如, 在 1945~1960 年, 4~7 年尺度变化很明显, 而在 1891~1905 年和 1920~1960 年, 年代际尺度变化十分明显, 而功率谱分析结果 (图 7c) 表明, 尽管存在几个峰值, 但只有 3.5 年的周期接近 95% 信度水平的检验, 这个周期可能与 ENSO 有一定联系。功率谱分析给出的周期是指全域 (1891~1990 年) 上的平均周期, 因周期是随时间变化的, 所以功率谱分析给出的周期都比较弱, 而子波分析结果除了可以给出存在的不同周期外, 还可以说明这些周期随时间变化的情况。此外, 通过分析印度和华北夏季降水的子波结果, 发现两者在 4~7 年, 14 年以上时间尺度上有显著

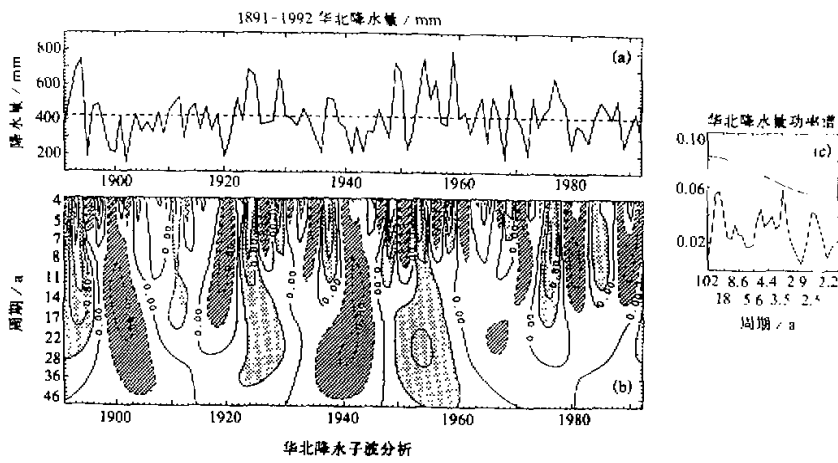


图 7 (a) 华北 1891~1990 年夏季降水量 (mm); (b) WT 的结果 (等值线间隔 4; 斜线区为小于 -0.4 的区, 点线区为大于 0.4 的区); (c) 功率谱分析结果 (虚线为 95% 信度)

相关,而在 7~14 年的时间尺度上相关不显著。同时还发现,不同时间尺度的降水变化与不同的 500 hPa 异常环流型相联系。

叶瑾琳<sup>[11]</sup>用近百年的降水资料,通过子波分析研究了萨赫勒地区、日本南部—长江流域、中国华南—印度半岛东部、热带非洲、东北亚等 5 个地区的降水变化规律。指出,萨赫勒地区 70 年代的干旱主要是高频(4 年左右周期)振荡造成的,而 80 年代的干旱则主要是由 40 年左右的长周期变化造成的,同样 50 年代后期到 60 年代初的降水偏多也是几十年的周期振荡占主导地位;日本南部—长江流域的降水变化主要是由 3 年左右周期的高频振荡造成的,而 30 几年的振荡造成了 30 年代的干旱期和 50 年代的多雨期;中国华南在 20 年代上半期由中高频造成的多雨转入后半期由高频变化造成的少雨,从 50 年代由中高频造成的干旱又转到 1960 年前后主要由高频造成的多雨,而在 70 年代前半期,降水偏多在高频和中频上都有表现,在从 60 年代的多雨转入 80 年代的干旱过程中,30 多年的周期振荡比较清楚;热带非洲地区以高频变化为主,这在 30 年代的多雨与 70 年代后期到 80 年代初的多雨中尤为突出,60 年代的降水偏多则主要是中频变化所致,40 年代的降水偏少与 60 年代的偏多与 30 多年的振荡密切相关;东北亚地区以中低频变化为主,降水偏多与偏少以 10 几年的周期轮回出现,此外,子波分析还表明东北亚地区降水的几十年振荡变化与萨赫勒地区的降水变化非常相似。

此外,WT 在大气科学中还有其他一些应用,如用二维复子波分析非定常风产生的表面波场<sup>[14]</sup>;用 WT 研究非均质流中波的阻塞和截获<sup>[15]</sup>;用 WT 研究大气湍流中的相干结构的条件抽样<sup>[16]</sup>;等等。限于篇幅,这里不一一介绍了,有兴趣者可参见有关文献。

## 4 存在的问题和展望

WT 知识从数学理论到应用的转化延误是极小的。高斯在 18 世纪末发现了快速 FT,但直到本世纪 60 年代初由贝尔实验室的两位工程师重新发现后才得到应用。目前,应用数学和物理学几乎仍完全建立在 19 世纪的纯数学中。WT 可能是建立在过去 50 或 60 年间数学上的发展之开端。目前,WT 已成为数学界的一个热点研究课题。经过 10 几年的发展,WT 已经有了初步的比较系统的理论与计算方法,除了伸缩和平移外,还引入了旋转并推广到了  $n$  维<sup>[1]</sup>。WT 已应用在自然科学的各个领域,显示了明显优越性和广阔的应用前景。但同时也应该看到 WT 是一种很年轻的技术,和以前其他技术一样并不能解决所有问题。

(1) WT 分析局域现象并不一定都是最优的,例如,在分析相干结构的长度时,协方差变换较 WT 更优越<sup>[5]</sup>。WT 不能完全替代传统的 FT,特别是当函数中有全域性的周期分量时,用 FT 较 WT 更合适。FT 和 WT 结合使用可能是解决问题的最佳途径。

(2) 根据 WT 的定义知,WT 的系数与所取的子波基有密切关系。了解所研究的问题,根据研究对象的特征,选取适当的子波基十分重要。例如,Haar WT 缺乏平滑且只有一阶矩等于零,不能探测高阶变化,因此,适宜于分析离散尺度的资料。相反,Morlet WT 是连续的,它可以连续地在时间和频率上局域化信号。复 Morlet WT 还可以提供信号的振幅和位相。具体地说就是如果已知信号的特征和型式,那么子波也应该

有同样的特征和型式。此外, 根据研究对象的尺度选择适当的伸缩尺度  $a$  和平移  $b$  也是很关键的。

(3) 边界干扰作用很大。在资料的开头和结尾时的 WT 有很大歪曲。消除这种歪曲的一个简便而有效的办法是把资料按某种规律向两端外延。

(4) 从理论上讲根据信号的子波系数能精确地恢复信号, 但在实际情况下, 只有离散型子波能根据信号的子波系数精确地恢复信号, 而对连续型子波, 一般情况下只能近似地恢复信号。

未来几年, WT 在多分辨率 (multiresolution) 分析、奇异性分析、二维和三维信号分析等方面预计会有更大发展。此外, 通过少的自由度的描述来提取场的主要特征, 子波系数可以简化对复杂的非线性现象的研究, 这种简化对应于把 Navier-Stokes 方程投影到相干结构或在物理空间上有很好局域性的函数基上, 这有利于更深入地揭示非线性现象的本质, 这是一个困难而十分有意义的课题。

### 参 考 文 献

- 1 Farge, M., 1992, Wavelet transforms and their applications to turbulence, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, **24**, 395~457.
- 2 Mahrt, L., 1991, Eddy asymmetry in the sheared heated boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **48**, 472~492.
- 3 Gamage, N. and W. Blumen, 1993, Comparative analysis of low-level cold fronts: Wavelet, Fourier, and Empirical Orthogonal Function Decompositions, *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2867~2878.
- 4 Gao, W. and B. L. Li, 1993, Wavelet analysis of coherent structures at the atmosphere-forest interface, *J. Appl. Meteor.*, **32**, 1717~1725.
- 5 Gamage, N. and C. Hagelberg, 1993, Detection and analysis of microfronts and associated coherent events using localized transforms, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 750~756.
- 6 Kumar, P. and E. Foufoula-Georgiou, 1993, A new look at rainfall fluctuations and scaling properties of spatial rainfall using orthogonal wavelets, *J. Appl. Meteor.*, **32**, 209~222.
- 7 Meyers, S.D., B.G. Kelly and J.J. O'Brien, 1993, An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: with application to the dispersion of Yanai waves, *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2858~2866.
- 8 Weng, H. and K.-M. Lau, 1994, Wavelets, period-doubling and time-frequency localization with application to organization of convection over the tropical Western Pacific, *J. Atmos. Sci.*, **51**(17), 2523~2541.
- 9 Weng, H. and K.-M. Lau, 1994, Comparison between temporal regimes in organization of convection over maritime continent and oceanic area in the tropical Western Pacific, *Abstract Collection in International Symposium on Global Change in Asia and Pacific Regions*, III: 64~64, August 8~10, 1994, Beijing, China.
- 10 石伟, 1993, ENSO 系统与气候变化, 北京大学地球物理系博士研究生学位论文.
- 11 叶瑾琳, 1995, 中国及东亚季风区夏季降水的年际变率, 北京大学地球物理系博士研究生学位论文.
- 12 Hu, Z.-Z. and Ts. Nitta, 1996, Wavelet analyses of summer rainfall variations in North China and India and their associations with 500 hPa height in Northern Hemisphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **74**, (in press)
- 13 Argoul, F., et al., 1989, Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade, *Nature*, **338**, 51~53.
- 14 Spedding, G.R., F.K. Bowand, N.E. Huang and S.R. Long, 1993, A 2-D complex wavelet analysis of an unsteady wind-generated surface wave field, *Dyn. Atmos. Oceans*, **20**, 55~77.
- 15 Long, S.R., R.J. Lai, N.E. Huang and G.R. Spedding, 1993, Blocking and trapping of waves in an inhomogeneous flow, *Dyn. Atmos. Oceans*, **20**, 79~106.
- 16 Turner, B.J. and M.Y. Leclerc, 1994, Conditional sampling of coherent structure in atmospheric turbulence using the wavelet transform, *J. Atmos. Oceanic. Technol.*, **11**(1), 205~209.
- 17 Young, R.K., 1993, *Wavelet Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1~223.

## Application Study of Wavelet Transform in Atmospheric Sciences

Hu Zengzhen and Shi Wei

(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** Wavelet transform (WT) is a completely new mathematical analysis method developed in the early 1980's. It is suitable for studying local characteristics of signal. WT has been widely used in analysis of seismic data, image processing, analysis of sonic signal, fractal, sampling, turbulence, and many studies in atmospheric sciences and oceanography. Comparing with the traditional methods of mathematical analysis, enormous superiority of WT has been demonstrated. In this paper, on the basis of brief introduction of the definition and some fundamental concepts of WT, the application study of WT in atmospheric sciences are given with examples. At last, problem in use of WT and the potentiality are discussed.

**Key words** wavelet transform Fourier transform

~~~~~

## 第四届“赵九章优秀中青年科学工作奖”评选揭晓

第四届“赵九章优秀中青年科学工作奖”评选已经揭晓，国家地震局地球物理所的赵凤新和中国科学院大气物理所的胡非荣获特等奖；中国科学院地球物理研究所的胡健行、刘鹏程、陈耿雄，大气物理研究所的李俊、陈文，兰州高原大气物理研究所的张强，空间中心的王世金，以及南京大学大气科学系的谈哲敏、北京大学地球物理系的傅绥燕和国家地震局地球物理研究所的丁志峰等 10 人获优秀奖。

这届评选工作于 1996 年年初开始，获奖者都是经过报名、初审、同行专家评审、学科组复审，最后由“赵九章优秀中青年科学工作奖”委员会讨论、表决而产生的。

“赵九章优秀中青年科学工作奖”是为纪念我国卓越科学家赵九章教授而设立的，专门奖励在上述领域研究和应用中表现突出、成绩显著的中青年科技工作者。

颁奖仪式已于 1996 年 10 月 15 日赵九章先生诞辰 89 周年之日举行。

(关 成)