# 大气运动的螺-极分解和 Beltrami 流 *

刘式适　刘式达

（北京大学地球物理系，北京　100871）

**摘　要**　本文首先将不可压缩流体速度场的螺-极分解用来描写三维大气运动的垂直速度；涡度和螺度；其次，叙述了 Beltrami 流的概念，并论证了对于无摩擦的大气运动满足广义地转关系的定常解就是大气运动的 Beltrami 流；最后，应用小参数方法讨论了定常准地转模式中的螺度，研究指出：大气运动的螺度紧密地与稳定层结条件下的垂直运动和温度平流有关：上升运动和暖平流对应于正螺度，下沉运动和冷平流对应于负螺度。

**关键词**　螺-极分解　Beltrami 流　螺度

## 1　引言

对于流体的二维运动有所谓的 Helmholtz 速度分解定理[1]，利用它，解决了流体力学和大气动力学中的许多问题。但是，大气运动是三维的，三维问题不仅显示出大气运动的复杂性，而且三维动力系统的理论证明：它有确定性的浑沌解[2]。因此，对于三维运动的速度分解成为人们关心的一个问题。况且，三维流体运动不同于二维运动，它具有能显示流动耦合(linkage)或连结(knottedness)特征的螺度(helicity)，这是二维运动所没有的[3]。在大气动力学的研究中，螺度被广泛应用于对流系统锋生和边界层中[4~9]显示出它的生命力。

我们首先叙述三维不可压缩流体速度场的螺-极分解（toroidal-poloidal decomposition），然后分析在螺极分解下的涡度与螺度，最后说明与大气运动密切相关的 Beltrami 流及它们在准地转模式中的应用。

## 2　速度场的螺-极分解

对于二维$(x, y)$运动，其速度场为$\vec{V}_h(u, v)$，相应的水平散度和垂直涡度分量分别为

$$D \equiv \nabla_h \cdot \vec{V}_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\zeta \equiv \vec{k} \cdot \nabla_h \times \vec{V}_h = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2}$$

其中，$\vec{k}$为$z$方向上的单位矢量，而$\nabla_h$为二维 Hamilton 算子，即

1994-12-08 收到，1995-12-25 收到修改稿

* 本文得到国家教委博士点基金的资助

$$\nabla_h \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3}$$

这里$\vec{i}$和$\vec{j}$分别为$x$和$y$方向上的单位矢量。

在$D \neq 0$和$\zeta \neq 0$的条件下，二维速度场可引入速度势 $\varphi$ 和流函数 $\psi$，有下列二维速度场的 Helmholtz 分解式：

$$\vec{V}_h = \nabla_h \varphi - \nabla_h \psi \times \vec{k}. \tag{4}$$

上式也可改写为

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5}$$

在 Helmholtz 分解下，速度场的水平散度和垂直涡度分量可分别只用速度势和流函数来表征。即有

$$D = \nabla_h^2 \varphi, \qquad \zeta = \nabla_h^2 \psi, \tag{6}$$

其中

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

为二维 Laplace 算子。

尽管二维速度场的 Helmholtz 分解有着重要的应用，但分解本身未包含对天气演变有重大意义的垂直运动$w$。

对于三维速度场$\vec{V}(u,v,w)$，若流体是三维不可压缩的或是 Boussinesq 条件下的流体，它有

$$\nabla \cdot \vec{V} \equiv D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

其中

$$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

为三维 Hamilton 算子。

由(7)式可知，存在一个矢量场$\vec{A}$使得

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}, \tag{9}$$

$\vec{A}$称为矢势（vector potential)或管量（solenoidal vector)。

事实上，利用(6)式中的$D = \nabla_h^2 \varphi$（注意，此时 $\varphi$，$\psi$ 也是三维变量)，则(7)式对$z$积分有

$$w = \nabla_h^2 \left(\int - \varphi \delta z\right) = \nabla_h^2 \chi, \tag{10}$$

其中，$\chi$ 可称为对流速度势（convective velocity potential)它与速度势 $\varphi$ 的关系为

$$\chi = -\int \varphi \delta z, \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial \chi}{\partial z} = -\varphi. \tag{11}$$

这样，在条件(7)式下的三维速度场可表为

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}, \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z}, \qquad w = \nabla_h^2\chi. \tag{12}$$

上式也可改写为

$$\vec{V} = \vec{\varepsilon}\psi + \vec{\sigma}\chi, \tag{13}$$

其中，

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0\right), \tag{14}$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}, \nabla_h^2\right). \tag{15}$$

比较(9)式和(12)式可知

$$\vec{A} = -\psi\vec{k} - \nabla\times(\chi\vec{k}) = -\frac{\partial\chi}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\vec{j} - \psi\vec{k}. \tag{16}$$

这样，我们既可以由 $\psi$ 和 $\chi$ 确定三维速度场；又可以反过来，根据$D$和 $\zeta$ 确定出 $\varphi$ 和 $\psi$，再确定 $\chi$。

三维速度场$\vec{V}$的涡度和螺度分别为

$$\vec{\omega} \equiv \nabla\times\vec{V} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{17}$$

$$\Lambda \equiv \vec{\omega}\cdot\vec{V} = \xi u + \eta v + \zeta w. \tag{18}$$

以(12)式代入(17)式和(18)式，则求得在螺-极分解下的涡度与螺度分别是

$$\xi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\chi, \qquad \eta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\chi,$$

$$\zeta = \nabla_h^2\psi, \tag{19}$$

$$\Lambda = J\left(\nabla^2\chi, \frac{\partial\chi}{\partial z}\right) - J\left(\psi, \frac{\partial\chi}{\partial z}\right) - \nabla_h\psi\cdot\nabla_h\nabla^2\chi$$

$$+ \nabla_h\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\nabla_h\frac{\partial\chi}{\partial z} + (\nabla_h^2\psi)(\nabla_h^2\chi), \tag{20}$$

其中，

$$J(A,B) \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y} \tag{21}$$

为 Jacobi 算子。

## 3　Beltrami 流

在无摩擦的均匀不可压缩流体（或 Boussinesq 流体)的运动中，若其速度$\vec{V}$处处与涡度$\vec{\omega} \equiv \nabla\times\vec{V}$平行，这样的定常流动称为 Beltrami 流，设 $\lambda$ 是一标量函数或为一常

数，则 Beltrami 流满足

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{V} = \lambda \vec{V}, \tag{22}$$

因而有

$$\vec{\omega} \times \vec{V} \equiv (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0. \tag{23}$$

大气运动方程可以写为

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \times \vec{V} = \vec{g} - \alpha \nabla p - \nabla \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) + \vec{F}, \tag{24}$$

其中$\vec{\Omega}$为地球自转角速度，$\vec{g}$和$\vec{F}$分别为重力和摩擦力，$p$和$\alpha$分别为压强和比容。

考虑无粘运动($\vec{F}=0$)，注意$\vec{g} = -\nabla\varphi$($\varphi$为重力位势)，$-\alpha\nabla p = -\nabla\left(\int\alpha\delta p\right)$，则大气运动方程(24)可以改写为

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \times \vec{V} = -\nabla E, \tag{25}$$

其中

$$E = \frac{1}{2}\vec{V}^2 + \varphi + \int\alpha\delta p, \tag{26}$$

为动能，位能和压力能之和。

对于定常运动，方程(25)化为

$$\vec{\omega} \times \vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\nabla E. \tag{27}$$

对于 Beltrami 流，上式化为

$$2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\nabla E. \tag{28}$$

它称为广义的地转关系，由此关系可知

$$\vec{V} \cdot \nabla E = 0. \tag{29}$$

即广义的地转关系要求三维流场沿着等$E$线运动，即$E(x, y, z)=$常数为三维流场的流线，反过来，由(28)式亦可导得 Beltrami 流。

所以，无摩擦的大气运动方程满足广义地转关系(28)式的定常解就是 Beltrami 流；或者说，无摩擦的大气运动方程满足 Beltrami 流关系的定常解满足广义地转关系。

对于$\lambda=$常数的 Beltrami 流，由(22)式有

$$\xi = \lambda u, \qquad \eta = \lambda v, \qquad \zeta = \lambda w. \tag{30}$$

以(12)式和(19)式代入有

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\chi = \lambda\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}\right), \tag{31a}$$

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\chi = \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z}\right), \tag{31b}$$

$$\nabla_h^2\psi = \lambda\nabla_h^2\chi. \tag{31c}$$

在 $\lambda$ = 常数的条件下，方程(31c)有一特解

$$\psi = \lambda\chi. \tag{32}$$

(32)式代入(31a)式和(31b)式，得到

$$\nabla^2\chi + \lambda^2\chi = 0. \tag{33}$$

即 Beltrami 流的对流速度势满足三维 Helmholtz 方程。再利用(11)式和(32)式可知：速度势和流函数也分别满足三维 Helmholtz 方程，即

$$\nabla^2\varphi + \lambda^2\varphi = 0, \tag{34}$$

$$\nabla^2\psi + \lambda^2\psi = 0. \tag{35}$$

将(12)式两边取 $\nabla^2$ 运算，并利用(33)式和(35)式，得到

$$\nabla^2\vec{V} + \lambda^2\vec{V} = 0. \tag{36}$$

即 Beltrami 流的三维速度场也满足三维 Helmholtz 方程[10]。

由于在 Beltrami 流中涡度与速度处处平行，因而它具有最大的非零螺度，且螺度为

$$\Lambda \equiv \vec{\omega}\cdot\vec{V} = \lambda\vec{V}\cdot\vec{V} = \lambda\vec{V}^2. \tag{37}$$

因为三维的定常速度场$\vec{V}(u, v, w)$可以表为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x, y, z), \tag{38a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x, y, z), \tag{38b}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x, y, z). \tag{38c}$$

所以，它为一个三维的非线性自治动力系统。例如，

$$\chi = \frac{1}{2}A\sin x\cos y, \qquad \psi = 2\chi = A\sin x\cos y, \tag{39}$$

其中$A$为常数，上式与(32)式比较知 $\lambda = 2$，而且由(12)式和(19)式分别求得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = A\sin x\sin y, \tag{40a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v = A\cos x\cos y, \tag{40b}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w = -A\sin x\cos y. \tag{40c}$$

和

$$\xi = 2u = 2A\sin x\sin y, \tag{41a}$$

$$\eta = 2v = 2A\cos x\cos y, \tag{41b}$$

$$\zeta = 2w = -2A\sin x\cos y. \tag{41c}$$

显然，它是 Beltrami 流。

方程组(40)是非线性动力系统，使其右端为零，可求得它的定常解为

$$x = \pm m\pi, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{42a}$$

$$y = \pm \frac{1}{2} n\pi, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{42b}$$

在平面$(x, y)$上，上述定常解的部分位置及其相应的轨线见图 1。

在图 1 中的黑点是鞍点（saddle point)，而由 4 个鞍点构成的闭合圈内是封闭的涡旋流线可以称为方形螺旋流（square helical flow)，它很像大气小尺度重力内波形成的对流圈。

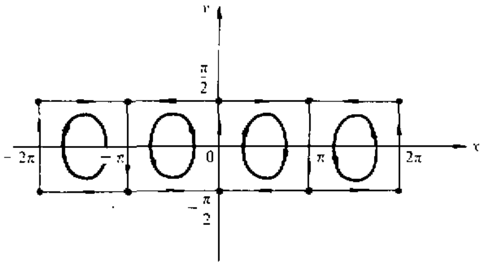

图 1 系统(40a)的定常涡旋

由于三维非线性自治动力系统可以出现浑沌，所以，Beltrami 流中的涡旋含有浑沌的主要信息，这样，可以把 Beltrami 流视为是涡旋与湍流相联系的渠道[10]，即所谓 Lagrange 湍流[11]。

## 4 定常准地转模式

在绝热和无摩擦的条件下，对大气大尺度运动，取 Rossby 数$Ro$为小参数，则应用摄动法求得大尺度运动的零级近似方程组为

$$u^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y}, \qquad v^{(0)} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x}, \qquad f_0 \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = g\frac{\theta'}{\theta_0}, \tag{43a}$$

$$w^{(0)} = 0, \qquad D^{(0)} = 0, \tag{43b}$$

其中，$\psi^{(0)}$为准地转流函数，$(u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)})$为三维速度场的零级近似，$f_0$为 Coriolis 参数（常数)，$g$为重力加速度，$\theta_0$和$\theta'$分别为静止大气的位温及相应的位温偏差，$D^{(0)}$为水平散度的零级近似。

而求得的大尺度运动的一级近似方程组为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f+\zeta^{(0)}) = f_0\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}, \tag{44a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\right) + N^2 w^{(1)} = 0, \tag{44b}$$

其中，$w^{(1)}$为$w$的一级近似，$\zeta^{(0)} \equiv \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = \nabla_h^2 \psi^{(0)}$为垂直涡度分量的零级近似，$N = \sqrt{g\frac{\partial \ln\theta_0}{\partial z}}$为 Brunt-Vaisala 频率。

方程组(44)消去$w^{(1)}$可得到准地转位涡度守恒定律

$$\frac{\partial q}{\partial t}+J(\psi^{(0)},q)=0,\tag{45}$$

其中

$$q=f+\nabla_h^2\psi^{(0)}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial z^2},\tag{46}$$

为准地转位涡度。

对于风场$(u,v)$的一级近似，可设

$$u^{(1)}=-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x},\qquad v^{(1)}=\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}.\tag{47}$$

因而有

$$u\equiv u^{(0)}+Rou^{(1)}=-\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial y}+Ro\left(-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right)=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x},\tag{48a}$$

$$v\equiv v^{(0)}+Rov^{(1)}=\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial x}+Ro\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y},\tag{48b}$$

其中，

$$\psi=\psi^{(0)}+Ro\psi^{(1)},\qquad \varphi=Ro\varphi^{(1)}.\tag{49}$$

由(48)式求得水平散度为

$$D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=RoD^{(1)}=\nabla_h^2\varphi,\tag{50}$$

其中

$$D^{(1)}\equiv\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}=\nabla_h^2\varphi^{(1)}\tag{50}$$

为水平散度的一级近似。而由连续性方程(7)和(50)式求得

$$w=w^{(1)}=\int-D\delta z=\nabla_h^2\chi,\tag{52}$$

其中

$$\chi=-\int\varphi\delta z=\chi^{(1)},\qquad 或\quad \varphi=-\frac{\partial\chi}{\partial z}=-\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial z}.\tag{53}$$

这样(48a)式、(48b)式和(52)式就构成准地转模式中的三维速度场。

但由(44b)式，在定常条件下有

$$w=w^{(1)}=-\frac{f_0}{N^2}\left(u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}=-\frac{f_0}{N^2}J\left(\psi^{(0)},\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\right).\tag{54}$$

因而，由$\psi^{(0)}$就完全可以确定$u^{(0)}$, $v^{(0)}$和$w^{(1)}$。同样，由$\psi^{(0)}$也可确定三维涡度场的零级近似，它们分别为

$$\xi^{(0)}\equiv\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}-\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z}=-\frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial x\partial z},\tag{55a}$$

$$\eta^{(0)}\equiv\frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}-\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial y\partial z}.\tag{55b}$$

$$\zeta^{(0)} \equiv \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = \nabla_h^2 \psi^{(0)}. \tag{55c}$$

而且由此可以求得三维螺度场的零级近似为

$$\begin{aligned}\Lambda^{(0)} &\equiv \xi^{(0)} u^{(0)} + \eta^{(0)} v^{(0)} + \zeta^{(0)} w^{(0)} = -\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial z}\left(-\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y}\right) + \left(-\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y \partial z}\right)\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \\ &= -J\left(\psi^{(0)}, \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\right) = \frac{N^2}{f_0} w.\end{aligned} \tag{56}$$

因此，在稳定层结下($N^2 > 0$)，上升运动($w > 0$)为正螺度($\Lambda^{(0)} > 0$)；下沉运动($w < 0$)为负螺度($\Lambda^{(0)} < 0$)。

注意(43a)式中$f_0 \dfrac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = g\dfrac{\theta'}{\theta_0}$，则(56)式可以改写为

$$\Lambda^{(0)} = -\frac{g}{f_0 \theta_0} J(\psi^{(0)}, \theta') = \frac{g}{f_0 \theta_0}(-\overline{V}_h^{(0)} \cdot \nabla_h \theta'). \tag{57}$$

由此便知，螺度$\Lambda^{(0)}$也与大气斜压性或温度平流有关，暖平流($-\overline{V}_h^{(0)} \cdot \nabla_h \theta' > 0$)为正螺度($\Lambda^{(0)} > 0$)；冷平流($-\overline{V}_h^{(0)} \cdot \nabla_h \theta' < 0$)为负螺度($\Lambda^{(0)} < 0$)，这与 Tan 和 Wu[9]的结论是一致的。

在定常情况，准地转位涡度方程(45)可以改写为

$$J(\psi^{(0)}, q) = 0. \tag{58}$$

应用$\beta$平面近似$f = f_0 + \beta_0 y$（$\beta_0$为 Rossby 参数，为常数）和(46)式，(58)式可化为

$$J\left(\psi^{(0)}, \nabla_h^2 \psi^{(0)} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial z^2} + f_0 + \beta_0 y\right) = 0. \tag{59}$$

由此得到

$$\nabla_h^2 \psi^{(0)} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial z^2} + \beta_0 y = F(\psi^{(0)}), \tag{60}$$

其中$F(\psi^{(0)})$为$\psi^{(0)}$的任意函数，令

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = \frac{N}{f_0} z, \tag{61}$$

并取

$$F(\psi^{(0)}) = -K^2 \psi^{(0)}, \tag{62}$$

其中，

$$K^2 = k^2 + l^2 + n^2, \tag{63}$$

$k$、$l$、$n$分别为$x$、$y$、$z$方向上的波数，则方程(61)化为下列非齐次的 Helmholtz 方程：

$$\nabla_1^2 \psi^{(0)} + K^2 \psi^{(0)} = -\beta_0 y, \tag{64}$$

其中

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}. \tag{65}$$

在一定条件下，Helmholtz 方程(64)的解可以表为

$$\psi^{(0)} = -\frac{\beta_0}{K^2} y_1 + \sum_j A_j e^{i(kx_1 - ly_1 + nz_1)}. \tag{66}$$

我们选

$$\begin{aligned}\psi^{(0)} &= -\frac{\beta_0}{K^2} y_1 + A\sin kx_1 \sin ly_1 \sin nz_1 \\ &= -\frac{\beta_0}{K^2} y + A\sin kx\sin ly\sin\frac{N}{f_0} nz.\end{aligned} \tag{67}$$

这样，由(43a)式和(54)式求得

$$u^{(0)} = -\frac{\beta_0}{K^2} - Al\sin kx\cos ly\sin\frac{N}{f_0} nz, \tag{68a}$$

$$v^{(0)} = \quad Ak\cos kx\sin ly\sin\frac{N}{f_0} nz, \tag{68b}$$

$$w^{(1)} = -\frac{\beta_0 kn}{NK^2} A\cos kx\sin ly\cos\frac{N}{f_0} nz. \tag{68c}$$

注意(52)式，则

$$\nabla_h^2 \chi = -\frac{\beta_0 kn}{NK^2} A\cos kx\sin ly\cos\frac{N}{f_0} nz. \tag{69}$$

由此不难求得

$$\chi = \frac{\beta_0 kn}{NK^2 K_h^2} A\cos kx\sin ly\cos\frac{N}{f_0} nz. \tag{70}$$

再由(53)式求得

$$\varphi = \frac{\beta_0 kn^2}{f_0 K^2 K_h^2} A\cos kx\sin ly\sin\frac{N}{f_0} nz. \tag{71}$$

在(70)式和(71)式中

$$K_h^2 = k^2 + l^2. \tag{72}$$

## 5 结论

（1）对于三维大气运动，应用螺-极分解可以较好地表征大气垂直运动、涡度和螺度，这是速度场的 Helmholtz 分解与连续性方程相结合的结果。

（2）对于无摩擦的三维大气运动，它满足广义地转关系的定常解就是大气运动的

Beltrami 流，至于大气大尺度运动，其主要成份是二维运动，它只满足通常的地转风关系。

（3）定常准地转模式中的螺度紧密地与大气垂直运动有关，即对于定常的大气大尺度运动，稳定层结下的上升运动对应正螺度，下沉运动对应负螺度；同样，螺度也紧密地与温度平流有关，暖平流对应正螺度，冷平流对应负螺度。

## 参 考 文 献


1 刘式适、刘式达，1991，大气动力学，北京：北京大学出版社.
2 Schuster, H.G., 1984, Deterministic Chaos, An Introduction, Springer-Verlag.
3 Moffatt, H.K., 1989, Topological approach to problems of vortex dynamics and turbulence, Amer. Inst Aeron. Astron. Inc.
4 Etling, D., 1985, Some aspects of helicity in atmosphere flows, *Beitr. Phys. Atmos.*, **58**, 88～100.
5 Lilly, D.K., The structure, energetics and propagation of rotating convective storm, Part II: Helicity and storm stabilization, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1663～1680.
6 Wu, R.S. and Blumen, W., 1982, An analysis of Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1774～1782.
7 Wu, R.S. and Tan, Z.M., 1989, Conservative laws on generalized vorticity and potential vorticity and its application, *Acta. Meteor. Sinica*, **47**, 437～442.
8 Wu, R.S., Lilly, D.K. and Kerr, R.M., 1992, Helicity and thermal convection with shear, *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1800～1809.
9 Tan, Z.M. and Wu, R.S., He Licity Dynamics of Atmospheric flow, *Adv. Atmos. Sci.*, **11**, 175～188.
10 Shi, C.C. and Huang, Y.N., 1993, Beltrami flows with constant and variable proportional factors, in *Some New Trends on Fluid Mechanics and Theoretical Physics*, Beijing: Peking University Press.
11 Aref, H., Janes, S.W., Mofina, S. and Zawadzki, I., 1989, Vortices, kinematics and chaos, *Physica*, D., **37**, 423～440.


# Toroidal–Poloidal Decomposition and Beltrami Flows in Atmosphere Motions


Liu Shikuo and Liu Shida

*(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)*



**Abstract** Firstly, the toroidal-poloidal decomposition for incompressible velocity fields is used to describe the vertical velocity, vorticity and helicity in the three-dimensional atmosphere motions. Secondly, the Beltrami flows, $\nabla \times \vec{V} = \lambda \vec{V}$, are stated and it is demonstrated that the Beltrami flows for inviscid atmosphere motions are steady solutions of the motion equations satisfying the generalized geostrophic relations. Finally, applying the small parameter method to the steady quasi geostrophic model, we show that the helicity of atmosphere motions are related closely both to the vertical velocity with stable stratificaitons and the temperature advection, the helicity is positive for the ascending motion and warm advection; while the helicity is negative for the descending motion and cold advection.



**Key words** toroidal-poloidal decomposition Beltrami flows helicity