第21卷 第6期
1997 年 11 月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol. 21, No. 6
Nov. 1997

预报方程时变参数的一种新递推方案*

曹 杰 谢应齐 严华生

（云南大学地球科学系，昆明 650091）

摘 要 针对经典递推算法的平稳性和初值敏感性问题，根据描述运动变化的一般性原理，导出一种新的递推算法，并将其引入到气候预报中。理论和实践证明，该方案成功地解决了经典递推算法存在的平稳性和初值敏感性问题。初步的预报应用结果也表明，该方案具有明显的优越性。

关键词 递推算法 平稳性 初值敏感性 气候预报

1 引言

由于各类递推预报方法诸如多层递阶方法、卡尔曼滤波方法等较充分地考虑了系统的时变性，克服了非时变模型存在的不足，因此在系统控制和系统预报等领域得到了广泛的应用，并收到了较好的效果。不过，由于其均强调了 $t-1$ 时刻各参数变化对 t 时刻各参数变化的作用，结果不可避免地带来平稳性和初值敏感性问题，这为以后解决系统控制和系统预报等问题带来了一定的困难，甚至可能导致失败。因此，本文针对目前广泛应用的经典递推算法的不足，根据描述运动变化的一般性原理，导出一种新的递推算法，并将其应用到气候预报领域。该方案的特点是强调了平均状况对递推的 t 时刻状况的影响。理论和实践证明，该方案成功地解决了经典递推算法存在的平稳性和初值敏感性问题。初步的预报应用结果也同时表明，该方案具有明显的优越性。

2 基本原理

不失一般性，考虑时变参数的单输出系统

$$y_t = f[Y_{t-1}, U_t, \theta(t), t] + e_t, \tag{1}$$

其中 $\theta(t)$ 是 m 维的时变参数，y_t 是一维的输出，e_t 是随机噪声。

系统（1）的一个特殊情形是

$$y_t = \varphi(t)^\tau \theta(t) + e_t, \tag{2}$$

式中 τ 表示转置。对于这个系统，如果 $\varphi(t)$ 可由观测值完全确定，e_t 是白噪声，参数 $\theta(t)$ 是时变的，则经典的时变参数递推算法可写为

1996-09-18 收到，1996-12-28 收到修改稿
* 本文得到云南省教委科研基金资助

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+\frac{\delta}{\|\varphi(t)\|^2}\varphi(t)[y_t-\varphi(t)^{\tau}\hat{\theta}(t-1)], \tag{3}$$

式中 δ 是适当的常数。显然当 $\delta=1$ 时，

$$\varepsilon[t,\hat{\theta}(t)]=y_t-\varphi(t)^{\tau}\hat{\theta}(t)=0, \tag{4}$$

但是不难看出，对于初值$\hat{\theta}(0)$的不同取值，尽管观测数据相同，并且它们都将使（4）式成立，但所得到的参数估值序列$\{\hat{\theta}(t)\}$通常是不平稳且是不相同的。即经典的时变参数递推算法存在平稳性和初值敏感性问题。其原因就在于经典的时变参数递推算法强调了 $t-1$ 时刻各参数变化对 t 时刻各参数变化的影响。其结果可能导致系统控制和系统预报问题解决的失败。

为克服这一问题，我们根据描述运动变化的一般性原理

$$A(t)=\bar{A}+A'(t), \tag{5}$$

其中$A(t)$为任一随时间变化的系统，$\bar{A}$为该系统的平均状态，具有非时变或慢时变性特征，$A'(t)$为该系统随时间的时变或快时变部分。则对系统（2）而言，就可以在满足约束条件

$$y_t=\varphi(t)^{\tau}\hat{\theta}(t), \tag{6}$$

并同时使指标函数

$$J=\|\hat{\theta}(t)-\bar{\theta}\|^2 \tag{7}$$

达到最小的条件下，导出一类新的递推算法。

为此，只需利用拉格朗日乘子法，使函数

$$J^*=\|\hat{\theta}(t)-\bar{\theta}\|^2+\lambda[y_t-\varphi(t)^{\tau}\hat{\theta}(t)] \tag{8}$$

达到最小即可。即对于（8）式有

$$\frac{\partial J^*}{\partial\hat{\theta}(t)}=2[\hat{\theta}(t)-\bar{\theta}]-\lambda\varphi(t)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial\lambda}=y_t-\varphi(t)^{\tau}\bar{\theta}=0. \tag{10}$$

由（9）式得

$$\hat{\theta}(t)=\bar{\theta}+\frac{\lambda}{2}\varphi(t), \tag{11}$$

同时有

$$2\varphi(t)^{\tau}[\hat{\theta}(t)-\bar{\theta}]=\lambda\|\varphi(t)\|^2, \tag{12}$$

考虑到

$$\varphi(t)^{\tau}\hat{\theta}(t)=y_t, \tag{13}$$

因此有

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{\|\varphi(t)\|^2}[y_t-\varphi(t)^{\tau}\bar{\theta}], \tag{14}$$

由（11）式即可得出

$$\hat{\theta}(t)=\bar{\theta}+\frac{1}{\|\varphi(t)\|^2}\varphi(t)[y_t-\varphi(t)^\tau\bar{\theta}],\tag{15}$$

（15）式即为本文提出的递推算法方案。以上各式中的$\bar{\theta}$可由

$$y_t=\varphi(t)^\tau\bar{\theta}\tag{16}$$

根据最小二乘法获得。并且由最小二乘法的基本性质可知，$\bar{\theta}$所揭示的是系统（2）的大范围变化的平均趋势。

根据平均值的定义

$$\bar{\theta}=\frac{1}{T}\int_0^T\hat{\theta}(t)\mathrm{d}t,\tag{17}$$

式中 T 由计算$\bar{\theta}$时的样本个数决定。

对（15）式积分得

$$\int_0^T\frac{1}{\|\varphi(t)\|^2}\varphi(t)[y_t-\varphi(t)^\tau\bar{\theta}]\mathrm{d}t=0,\tag{18}$$

而对（3）式积分则得

$$\int_0^T\frac{1}{\|\varphi(t)\|^2}\varphi(t)[y_t-\varphi(t)^\tau\hat{\theta}(t-1)]\mathrm{d}t=\int_0^T\hat{\theta}(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\hat{\theta}(t-1)\mathrm{d}t,\tag{19}$$

通常（19）式是不等于零的。

对于（15）式而言，其后验残差为

$$\varepsilon[t,\hat{\theta}(t)]=y_t-\varphi(t)^\tau\hat{\theta}(t)=y_t-\varphi(t)^\tau\bar{\theta}-\varphi(t)^\tau\frac{1}{\|\varphi(t)\|^2}\varphi(t)[y_t-\varphi(t)^\tau\bar{\theta}]=0.\tag{20}$$

可见，由新递推算法（15）式所得的递推序列比经典递推算法（3）式所得的递推序列具有更优越的平稳性；且由于初始值的合理固定，因此从根本上避免了经典递推算法的初值敏感性问题，同时还保持了经典递推算法后验残差一致小的性质，为以后系统控制和系统预报问题的解决奠定了坚实的基础。其根本原因就在于新递推算法遵循了描述运动的一般性原理，强调了各参数平均状态对 t 时刻各参数变化的影响。

3 计算步骤

（1）对给定系统输出y_t和 m 维系统输入 $\varphi(t)$ 共 n 组数据对，则对系统

$$y_t=\sum_{i=1}^m\varphi_i(t)^\tau\hat{\theta}_i(t)\tag{21}$$

在假设$\hat{\theta}(t)$不随时间变化的条件下，可变为在

$$y_t=\sum_{i=1}^m\varphi_i(t)^\tau\bar{\theta}_i\tag{22}$$

的条件下，应用最小二乘法，即可获得系统各参数的平均状态值$\bar{\theta}_i$, $i=1,2,\cdots,m$。

(2) 对于系统 (6) 的时变参数有如下跟踪公式：

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}_1(t)\\ \hat{\theta}_2(t)\\ \vdots\\ \hat{\theta}_m(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\theta}_1\\ \bar{\theta}_2\\ \vdots\\ \bar{\theta}_m\end{bmatrix}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)^2}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_m(t)\end{bmatrix}\left[y_t-\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)^{\mathrm{T}}\bar{\theta}_i\right], \tag{23}$$

于是获得时变参数的一系列估值。

(3) 应用一定的数学手段分析并发现各时变参数的变化规律后，即可解决该系统的控制或预报问题。

4 实例分析

本文以昆明 1951～1993 年 5 月降水量作为系统输出，以 3 月西太平洋副高强度指数、2 月和 3 月极涡强度指数、3 月乌拉尔山地区平均高度和 1 月印缅地区五点高度和等 5 个因子作为系统输入。于是，由上述计算步骤，首先获得各参数的平均状态值

$$\bar{\theta}_1=-0.16392,\quad \bar{\theta}_2=-0.14094,\quad \bar{\theta}_3=-0.06621,$$
$$\bar{\theta}_4=1.40225,\quad \bar{\theta}_5=-0.13102,$$

则根据本文提出的新方案获得各参数的递推序列；同时根据递推算法的经典方案，取 $\delta=1$ 并取与新方案同样的初值，即取

$$\hat{\theta}_1(0)=\bar{\theta}_1,\quad \hat{\theta}_2(0)=\bar{\theta}_2,\quad \hat{\theta}_3(0)=\bar{\theta}_3,\quad \hat{\theta}_4(0)=\bar{\theta}_4,\quad \hat{\theta}_5(0)=\bar{\theta}_5,$$

获得各参数的递推序列。为清楚起见，我们应用两种方案所获得各参数递推序列值绘制各参数的变化曲线图。其中纵坐标表示各参数的值，横坐标表示年份，虚线表示经典递推方案各参数的递推值，实线表示新方案各参数的递推值。

比较图 1a～e 可发现，在每一个图形中，实线的变化均明显地比虚线的变化显得平稳。可见，新方案的递推序列在平稳性方面比经典递推方案更具优越性。

再根据递推算法的经典方案，取 $\delta=1$ 并取 $\hat{\theta}_1(0)=-0.10$，其余初值不变，则获得又一组各参数的递推值。

为说明经典递推方案的初值敏感性，我们取经典递推方案不同初值所得的两组对应各参数递推序列的差值绘制图形（为清楚起见，各差值均扩大十倍）

比较图 2a～e 可看出，仅当某一初始值有微小变化时，其影响波及所有参数，导致各个参数均发生变化。可见，经典递推方案存在初值敏感性问题。

5 预报应用

对应用经典递推方案和新的递推方案而获得的各参数的变化序列，以所得模型的 AIC 值最小为准则，分别建立自回归模型，于是得到各参数的外推预报值（表 1、表 2）。

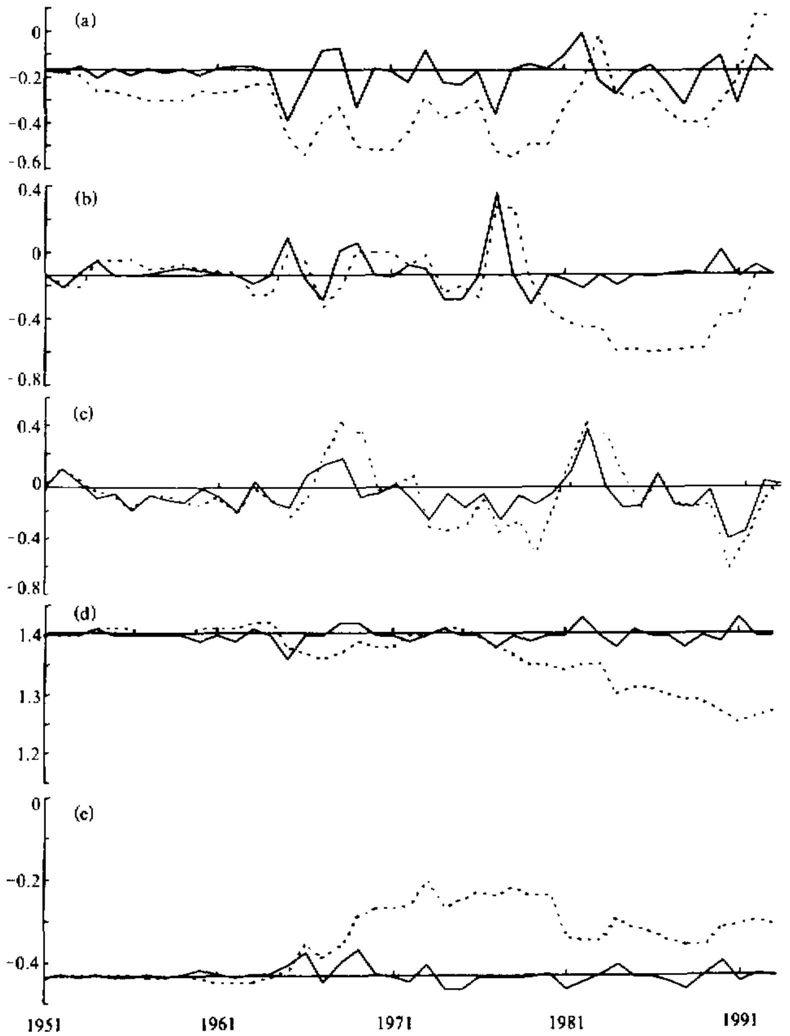

图1 各参数随时间变化曲线图

(a) 第1个参数, (b) 第2个参数, (c) 第3个参数, (d) 第4个参数, (e) 第5个参数

实线为新方案各参数的递推值，虚线为经典递推方案各参数的递推值

表1 经典递推方案参数预报值

年份	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
1994	-1.7257×10^{-2}	-0.1545	-8.3460×10^{-3}	1.2620	-0.3073
1995	-8.8594×10^{-2}	-0.1692	-5.8393×10^{-2}	1.2588	-0.3074

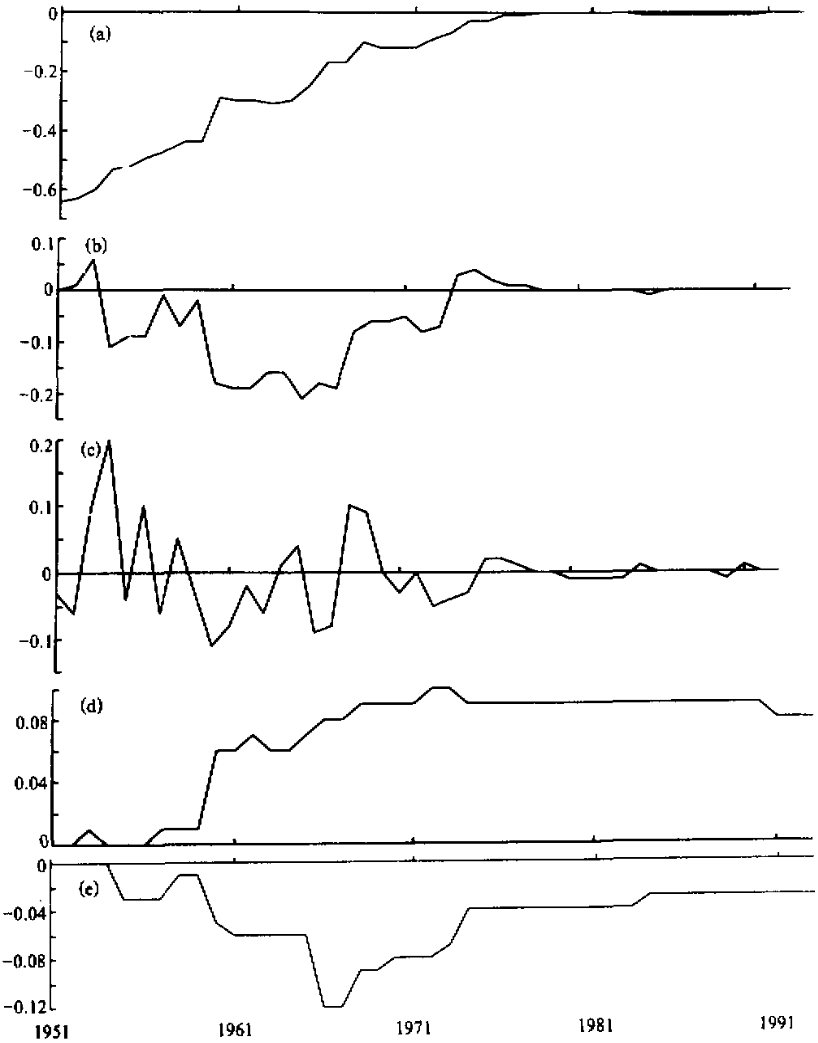

图 2　各参数的差值随时间变化图

（a）第 1 个参数，（b）第 2 个参数，（c）第 3 个参数，（d）第 4 个参数，（e）第 5 个参数，（为更直观，各差值均已扩大 10 倍）

表 2　新递推方案参数预报值

年份	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
1994	−0.2134	−0.1440	-6.8702×10^{-2}	1.4004	−0.4339
1995	−0.1853	−0.1485	-8.1961×10^{-2}	1.4004	−0.4334

根据各参数的外推预报值，取同样的资料，分别作出未来两年的预报（表3）。比较两种方法的预报值可看出新方案的预报结果明显优于经典方案。

表3 两种递推方案预报效果比较

年份	实测值	经典方案	趋势评定	新方案	趋势评定
1994	-24%	0.1%	×	-16%	√
1995	-46%	-16%	×	-29%	√

6 结束语

由于本文提出的递推算法方案遵循描述运动变化的一般性规律，合理固定递推算法的初始值，从而解决了经典递推算法平稳性问题和初值敏感性问题，预报应用也说明了该方案的优越性，值得进一步试用。

参 考 文 献

1 韩志刚等，1983，动态系统预报的一种新法，自动化学报，9(3)，161～169.

A New Kind of Recurrence Method of Predictive Equation with Time Variable Parameters

Cao Jie, Xie Yingqi and Yan Huasheng
(*Earth Science Department, Yunnan University, Kunming* 650091)

Abstract *To solve the instability and the initial value sensitivity problems in the classical recurrence* method, according to the general principle of motion, a new kind of recurrence method is proposed, and applied to the area of climate prediction. It has been proved that the instability and the initial value sensitivity problems have been successfully solved by the new method. The results of applications also indicate that this new method is better than the classical one.

Key words recurrence method stability initial value sensitivity climate prediction