

非保守系统中的对称不稳定^{*}

I. 弱粘性的强迫作用

丁一汇

(国家气候中心, 北京 100081)

沈新勇^{**}

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

摘要 对非保守系统中的对称不稳定问题进行了深入的研究, 第一部分讨论弱粘性的强迫作用。研究表明, 在取一级近似时, 弱粘性的首要作用是衰减波长较长的波, 对波长较短扰动的衰减作用要小一些。在 $Pr \sim O(1)$ 的条件下, 波动的衰减率 σ_1 对 Prandtl 数的依赖性较小。在取二级近似时, 弱粘性的主要作用则是衰减短波。因此, 在中尺度对称不稳定中, 粘性的作用主要是衰减长波及短波, 从而确保发展的扰动具有中尺度量级。

关键词 非保守系统 弱粘性 线性对称不稳定

1 引言

近几十年来, 对称不稳定问题的研究已经有了长足的进展。一般而言, 研究非保守系统中的对称不稳定需要考虑粘性摩擦效应以及热源加热率的影响。不少学者对二维的粘性线性对称不稳定理论作了许多研究。其中, McIntyre、Emanuel 和 Miller 的工作较为突出。McIntyre^[1]首先讨论了无界粘性斜压流体中单调增长型不稳定以及振荡型不稳定的条件。单调不稳定的临界 Richardson 数 Ri 在 $\sigma = 1$ 时有最小值, 明显地不相等的热量和动量扩散有利于对称不稳定的发生。接着 Emanuel^[2,3]采用变分方法和数值差分方法, 着重讨论了扰动是静力平衡且忽略水平扩散时的粘性流体中的对称不稳定。粘性的独特作用是确保最快增长扰动具有一个有限尺度, 该尺度本身仅是流体耗散性质的弱函数。然而, 最不稳定标准模的水平长度尺度首先取决于不稳定区域的深度与等熵面的坡度之比率, 而不是流体的扩散特性。全粘性惯性环流在其它方面与无粘性流体运动也有一些类似之处。Miller^[4]研究了粘性流体中不稳定扰动发展的能量来源, Pr 充分大于 1 时的能源是基态位能, 而 Pr 充分小于 1 时的能源是基态动能。对于 $Pr = 1$, 热力 Rossby 数 Ro 比较大的这一特殊情形, 没有扰动位能与扰动动能之间的转换。本文基于前人的工作, 采用匹配渐近展开法^[5], 讨论二维粘性系统中对称不稳定的渐近行为, 求出其近似解析解, 探讨粘性的衰减特性。

1995-08-11 收到, 1997-09-14 收到修改稿

^{*} 国家自然科学基金资助项目 49335061

^{**} 现在南京大学大气科学系

2 基本方程组的建立

根据对大气模式动力学性质的比较研究^[6], 适合于讨论中尺度运动的是 f 平面内的非静力平衡滤波声波模式, 即采用非弹性假设。此时, 不考虑凝结潜热加热的粘性大气运动完全方程组为

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v + F_x, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u + F_y, \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = F_\theta, \quad (5)$$

其中, (F_x, F_y, F_z) 为涡动粘性项, F_θ 为热量扩散项。

假设 $u = \bar{U} + u'$, $v = \bar{V} + v'$, $w = \bar{W} + w'$, $p = \bar{P} + p'$, $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $\theta = \bar{\theta} + \theta'$, 代入方程组 (1) ~ (5) 中, 定义大气基本稳定度参数 $N^2 = (g / \theta_0)(\partial \bar{\theta} / \partial z)$, $F^2 = f[f - (\partial \bar{U} / \partial y)]$, $S^2 - f \bar{U}_z = (g / \theta_0)(\partial \bar{\theta} / \partial y)$, 采用 Boussinesq 近似, 并且假定物理量关于纬向 x 轴具有对称性 $(\partial / \partial x) = 0$, 则方程组 (1) ~ (5) 的线性化形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}(fu') = F^2 v' + S^2 w' + fF'_x, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) - fu' + F'_y, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + \frac{\theta'}{\theta_0}g + F'_z, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}g\right) = -S^2 v' - N^2 w' + \frac{g}{\theta_0}f'_\theta, \quad (10)$$

假设摩擦项 $F'_x = \gamma \nabla^2 u'$, $F'_y = \gamma \nabla^2 v'$, $F'_z = \gamma \nabla^2 w'$, $F'_\theta = \kappa \nabla^2 \theta'$ (γ 为涡动粘性系数, κ 为热量扩散系数), 由 (9) 式可见, 引进扰动流函数 ψ , 使得 $(v', w') = (-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial y})$, 这样方程组 (6) ~ (10) 可简化成

$$\frac{\partial}{\partial t}(fu') = -F^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + S^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \nabla^2 (fu'), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + fu' + \gamma \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) + \frac{\theta'}{\theta_0} g + \gamma \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\theta_0} g \right) = S^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - N^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \kappa \nabla^2 \left(\frac{\theta'}{\theta_0} g \right). \quad (14)$$

在方程组 (11) ~ (14) 中, 消去变量 u' , p' 和 θ' , 则得到关于流函数 ψ 的唯一变量方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma \nabla^2 \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = & - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma \nabla^2 \right) \left(N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ & + \left(2 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \nabla^2 - \kappa \nabla^2 \right) \left(S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \left(F^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

3 本征值问题的近似解

在方程 (15) 中令 $\psi = \tilde{\psi}(z)e^{im_y + \sigma t}$, (15) 式就变为关于 $\tilde{\psi}(z)$ 的常微分方程

$$\begin{aligned} & \left(\sigma + \gamma m^2 - \gamma \frac{d^2}{dz^2} \right)^2 \left(\sigma + \kappa m^2 - \kappa \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(-m^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\psi} \\ & = m^2 N^2 \left(\sigma + \gamma m^2 - \gamma \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\psi} + im S^2 \left[2\sigma + (\gamma + \kappa)m^2 - (\gamma + \kappa) \frac{d^2}{dz^2} \right] \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \\ & - F^2 \left(\sigma + \kappa m^2 - \kappa \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

方程 (16) 与上下刚性边界条件 ($\tilde{\psi}|_{z=0, H=0}$, H 为大气对流层顶高度) 就构成了一个本征值问题。由于方程 (16) 是八阶高次常微分方程, 为了求得该方程解的解析表达式, 我们将采用匹配渐近展开式方法分析其渐近行为。

假设 Ekman 数 ($\varepsilon_1 = \gamma / f H^2$, $\varepsilon_2 = \kappa / f H^2$) 均为充分小的量, 即 $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, $0 < \varepsilon_2 \ll 1$, Prandtl 数 $Pr = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ 的量级为 1, 即 $Pr \sim O(1)$ 。由于通常在无粘流体中 ($\gamma = \kappa = 0$), 采用上下刚性无滑边界条件来求解本征值问题 (16)。引进粘性效应以后, 粘性系数 (γ, κ) 出现在微分方程 (16) 的最高次微分项上。在弱粘性 ($0 < \varepsilon_1 \ll 1$, $0 < \varepsilon_2 \ll 1$) 的情况下, 物理量就会在上、下边界附近出现“锐变”。这样解的直接展开式在上、下边界附近出现非均匀有效性, 从而导致摄动方法的无效。要找出上、下边界附近的有效展开式, 就必须首先将其坐标放大, 即引入扩大坐标变换。为此如图 1 所示, 在垂直方向上将流体分为 3 层: 边界层内区 I 和 II (引进

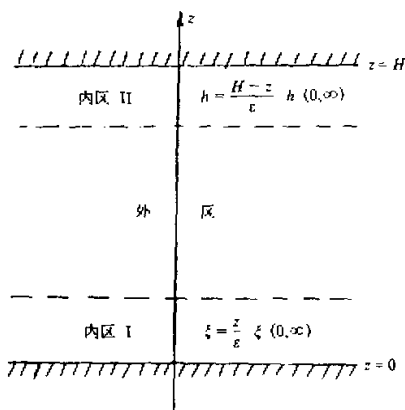


图 1 伸长坐标变换示意图

扩大坐标变换) 以及外区。选取小参数 $\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon_1^{1/2}} = (2\gamma/fH^2)^{1/2}$, 首先在外区中将方程 (16) 的解 $\tilde{\psi}(z)$ 以及增长率 σ 按照 ε 进行级数展开

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0(z) + \varepsilon \tilde{\psi}_1(z) + \varepsilon^2 \tilde{\psi}_2(z) + \dots, \quad (17)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \quad (18)$$

从而可以得到 $O(\varepsilon^0)$, $O(\varepsilon^1)$各阶近似方程

$$O(\varepsilon^0) \text{ 方程: } L\tilde{\psi}_0 = A \frac{d^2 \tilde{\psi}_0}{dz^2} + B \frac{d\tilde{\psi}_0}{dz} + C\tilde{\psi}_0 = (\sigma_0^2 + F^2) \frac{d^2 \tilde{\psi}_0}{dz^2} - 2imS^2 \frac{d\tilde{\psi}_0}{dz} - m^2(\sigma_0^2 + N^2)\tilde{\psi}_0 = 0, \quad (19)$$

$$O(\varepsilon^1) \text{ 方程: } L\tilde{\psi}_1 = A \frac{d^2 \tilde{\psi}_1}{dz^2} + B \frac{d\tilde{\psi}_1}{dz} + C\tilde{\psi}_1 = -2\sigma_0\sigma_1 \left(-m^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\psi}_0. \quad (20)$$

下面求解 $O(\varepsilon^0)$ 方程 (19), 作变换 $\tilde{\psi}_0 = \tilde{\varphi}_0(z)e^{(-Bz/2A)}$, (19) 式即化为

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_0}{dz^2} + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) \tilde{\varphi}_0 = 0. \quad (21)$$

令 $\tilde{\varphi}_0 = E \sin(n\pi/H)z$, 则会得到特征值 σ_0 的方程

$$(1 + \alpha)\sigma_0^4 + [(2 + \alpha)F^2 + \alpha N^2]\sigma_0^2 + \alpha(N^2 F^2 - S^4) + F^4 = 0, \quad (22)$$

这里高、宽比参数 $\alpha = (mH/n\pi)^2$ 。分析 (22) 式可见, 要使 σ_0 为正实数 ($\sigma_0 \geq 0$), 就必须满足 $\alpha(N^2 F^2 - S^4) + F^4 \leq 0$, 以下的分析都在 $\sigma_0 \geq 0$ 的条件下进行。

此时, 零级近似解可写为

$$\tilde{\psi}_0 = E \sin \frac{n\pi}{H} z e^{ima_0 z} = E \sin \frac{n\pi}{H} z e^{imS^2 z / (\sigma_0^2 + F^2)}. \quad (23)$$

将 (23) 式代入到 $O(\varepsilon^1)$ 方程的右端, 就会得到

$$L\tilde{\psi}_1 = 2\sigma_0\sigma_1 E \left(m^2 + m^2 a_0^2 + \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \right) \sin \frac{n\pi}{H} z e^{ima_0 z} - 2\sigma_0\sigma_1 E \left(2ima_0 \frac{n\pi}{H} \right) \cos \frac{n\pi}{H} z e^{ima_0 z}. \quad (24)$$

记 $G_1 \equiv 2\sigma_0\sigma_1 E \left(m^2 + m^2 a_0^2 + \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \right)$, $G_2 \equiv -2\sigma_0\sigma_1 E \left(2ima_0 \frac{n\pi}{H} \right)$, 将 (24) 式改写成

$$A \frac{d^2 \tilde{\psi}_1}{dz^2} + B \frac{d\tilde{\psi}_1}{dz} + C\tilde{\psi}_1 = G_1 \sin \frac{n\pi}{H} z e^{ima_0 z} + G_2 \cos \frac{n\pi}{H} z e^{ima_0 z}. \quad (25)$$

在 (25) 式中, 同样作变换 $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\varphi}_1(z)e^{(-Bz/2A)}$, 则 (25) 式变为关于 $\tilde{\varphi}_1(z)$ 的常微分方程

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_1}{dz^2} + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right) \tilde{\varphi}_1 = G_1^* \sin \frac{n\pi}{H} z + G_2^* \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad (26)$$

其中 $G_1^* = G_1 / A$, $G_2^* = G_2 / A$ 。

可以证明 $\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2$, 故 (26) 式的解 $\tilde{\varphi}_1$ 是

$$\tilde{\varphi}_1 = E_1 \sin \frac{n\pi}{H} z + E_2 \cos \frac{n\pi}{H} z + E_3 z \sin \frac{n\pi}{H} z + E_4 z \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad (27)$$

其中 E_1 和 E_2 为待定常数, $E_3 = (H / 2n\pi) G_2^*$, $E_4 = -(H / 2n\pi) G_1^*$ 。

这样在外区中, 方程 (16) 精确到 $O(\varepsilon^1)$ 的解的表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1 = & E \sin \frac{n\pi}{H} z e^{im_0 z} + \varepsilon \left(E_1 \sin \frac{n\pi}{H} z + E_2 \cos \frac{n\pi}{H} z + E_3 z \sin \frac{n\pi}{H} z \right. \\ & \left. + E_4 z \cos \frac{n\pi}{H} z \right) e^{im_0 z}. \end{aligned} \quad (28)$$

对于边界层内区 I, 引进伸长坐标 $\xi = z / l$, l 为边界层的无量纲厚度, $l = \sqrt{(2\gamma / \beta) / H} = \varepsilon$, 边界层的有量纲厚度即为 $lH = \sqrt{(2\gamma / \beta)}$ 。同样将方程 (16) 运用到此层内, $\tilde{\psi}(z)$ 以及 σ 按照 ε 作如下的级数展开:

$$\tilde{\psi}^1 = \varepsilon \{ \tilde{\psi}_0^1 + \varepsilon \tilde{\psi}_1^1 + \varepsilon^2 \tilde{\psi}_2^1 + \dots \}, \quad (29)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \quad (30)$$

代入方程 (16) 中, 就会得到 $O(\varepsilon^1)$ 方程:

$$\left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right)^2 \left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2Pr} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} \tilde{\psi}_0^1 = -F^2 \left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2Pr} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} \tilde{\psi}_0^1. \quad (31)$$

方程 (31) 的特征根方程为

$$\lambda^2 \left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2Pr} \lambda^2 \right) \left(\frac{f^2 H^4}{2} \lambda^4 - \sigma_0 f H^2 \lambda^2 + \sigma_0^2 + F^2 \right) = 0. \quad (32)$$

特征值为

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{2Pr\sigma_0}{fH^2} \right)^{1/2} > 0,$$

$$\lambda_4 = - \left(\frac{2Pr\sigma_0}{fH^2} \right)^{1/2} < 0,$$

$$\lambda_5 = \left(\frac{2\sigma_0}{fH^2} + \frac{2F}{fH^2} i \right)^{1/2} = a + bi,$$

$$\lambda_6 = - \left(\frac{2\sigma_0}{fH^2} + \frac{2F}{fH^2} i \right)^{1/2} = -a - bi,$$

$$\lambda_7 = \left(\frac{2\sigma_0}{fH^2} - \frac{2F}{fH^2} i \right)^{1/2} = a - bi,$$

$$\lambda_8 = - \left(\frac{2\sigma_0}{fH^2} - \frac{2F}{fH^2} i \right)^{1/2} = -a + bi.$$

所以方程 (31) 的解为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^I = & A_I + B_I \zeta + C_I e^{\lambda_3 \zeta} + D_I e^{\lambda_4 \zeta} + e^{a\zeta} (E_I \cosh \zeta + F_I \sinh \zeta) \\ & + e^{-a\zeta} (G_I \cosh \zeta + H_I \sinh \zeta), \end{aligned} \quad (33)$$

其中 A_I 、 B_I 、 C_I 、 D_I 、 E_I 、 F_I 、 G_I 、 H_I 均为待定常数。

因为 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon \tilde{\psi}_0^I$ 有界, 所以 $C_I = E_I = F_I = 0$, 这样方程 (16) 在内区 I 中精确到 $O(\varepsilon^1)$ 的解的表达式为

$$\varepsilon \tilde{\psi}_0^I = \varepsilon [A_I + B_I \zeta + D_I e^{\lambda_4 \zeta} + e^{-a\zeta} (G_I \cosh \zeta + H_I \sinh \zeta)]. \quad (34)$$

对于边界层内区 II, 引进伸长坐标 $\zeta = (H - z)/l = (H - z)/\varepsilon$, 将方程 (16) 运用到此层内, $\tilde{\psi}(z)$ 和 σ 按照 ε 作级数展开

$$\tilde{\psi}_0^{II} = \varepsilon \{ \tilde{\psi}_0^{II} + \varepsilon \tilde{\psi}_1^{II} + \varepsilon^2 \tilde{\psi}_2^{II} + \dots \}, \quad (35)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \quad (36)$$

代入方程 (16) 中, 就会得到内区 II 中的 $O(\varepsilon^1)$ 近似方程

$$\left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} \right)^2 \left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2Pr} \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \frac{d^2}{d\zeta^2} \tilde{\psi}_0^{II} = -F^2 \left(\sigma_0 - \frac{fH^2}{2Pr} \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \frac{d^2}{d\zeta^2} \tilde{\psi}_0^{II}. \quad (37)$$

方程 (37) 的解为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^{II} = & A_{II} + B_{II} \zeta + C_{II} e^{\lambda_3 \zeta} + D_{II} e^{\lambda_4 \zeta} + e^{a\zeta} (E_{II} \cosh \zeta + F_{II} \sinh \zeta) \\ & + e^{-a\zeta} (G_{II} \cosh \zeta + H_{II} \sinh \zeta), \end{aligned} \quad (38)$$

其中 A_{II} 、 B_{II} 、 C_{II} 、 D_{II} 、 E_{II} 、 F_{II} 、 G_{II} 、 H_{II} 均为待定常数。

由于 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon \tilde{\psi}_0^{II}$ 有界, 故 $C_{II} = E_{II} = F_{II} = 0$, 方程 (16) 在内区 II 中精确到 $O(\varepsilon^1)$ 的近似解为

$$\varepsilon \tilde{\psi}_0^{II} = \varepsilon [A_{II} + B_{II} \zeta + D_{II} e^{\lambda_4 \zeta} + e^{-a\zeta} (G_{II} \cosh \zeta + H_{II} \sinh \zeta)]. \quad (39)$$

4 边界条件以及匹配条件

为了研究弱粘性线性对称不稳定问题, 我们必须将近似解 (34) 式、(39) 式应用到边界条件上。为此, 我们有必要讨论一下粘性情况下的边界条件。假设采用无滑边界条件, 在垂直边界 Ω 上有 $u' = v' = w' = |\nabla p'| = \theta' = 0$ 。从 $w'|_{\Omega} = v'|_{\Omega} = 0$, 可以推出 $\psi|_{\Omega} = \partial\psi/\partial z|_{\Omega} = 0$ 。而从方程 (7) ~ (8) 可以推出 $\nabla_{\perp}^2 w'|_{\Omega} = \nabla^2 v'|_{\Omega} = 0$, 即有 $\partial^2 \psi/\partial z^2|_{\Omega} = \partial^3 \psi/\partial z^3|_{\Omega} = 0$ 。

这样将 (34) 式运用到边界条件 $\varepsilon \tilde{\psi}_0^I|_{z=0} = \frac{d}{dz} \varepsilon \tilde{\psi}_0^I|_{z=0} = \frac{d^2}{dz^2} (\varepsilon \tilde{\psi}_0^I)|_{z=0} =$

$\frac{d^3}{dz^3} \varepsilon \psi_0^I|_{z=0} = 0$, 就分别有如下等式:

$$A_I + D_I + G_I = 0, \quad (40)$$

$$B_I + \lambda_4 D_I - a G_I + b H_I = 0, \quad (41)$$

$$\lambda_4^2 D_I + (a^2 - b^2) G_I - 2ab H_I = 0, \quad (42)$$

$$\lambda_4^3 D_I + (3a^2 b - a^3) G_I + (3ab^2 - b^3) H_I = 0. \quad (43)$$

而将 (39) 式运用到边界条件 $(\varepsilon \psi_0^I)|_{z=H} = \frac{d}{dz} (\varepsilon \psi_0^I)|_{z=H} = \frac{d^2}{dz^2} (\varepsilon \psi_0^I)|_{z=H} =$

$\frac{d^3}{dz^3} (\varepsilon \psi_0^I)|_{z=H} = 0$, 亦有如下等式:

$$A_{II} + D_{II} + G_{II} = 0, \quad (44)$$

$$B_{II} + \lambda_4 D_{II} - a G_{II} + b H_{II} = 0, \quad (45)$$

$$\lambda_4^2 D_{II} + (a^2 - b^2) G_{II} - 2ab H_{II} = 0, \quad (46)$$

$$\lambda_4^3 D_{II} + (3ab^2 - a^3) G_{II} + (3ab^2 - b^3) H_{II} = 0. \quad (47)$$

由 (40) ~ (43) 式可以解得

$$G_I = \frac{\lambda_4^2(b^2 - 3a^2 - 2a\lambda_4)}{(a^2 + b^2)^2} D_I \equiv g_1 D_I, \quad (48)$$

$$H_I = \frac{\lambda_4^2(3ab^2 - a^3 - a^2\lambda_4 + b^2\lambda_4)}{b(a^2 + b^2)^2} D_I \equiv g_2 D_I, \quad (49)$$

$$A_I = -(1 + g_1) D_I, \quad (50)$$

$$B_I = -(\lambda_4 - ag_1 + bg_2) D_I. \quad (51)$$

再从 (50)、(51) 中消去 D_I , 得到

$$B_I = \frac{\lambda_4 - ag_1 + bg_2}{1 + g_1} A_I. \quad (52)$$

同样由 (44) ~ (47) 式也可得到类似于 (52) 式的等式

$$B_{II} = \frac{\lambda_4 - ag_1 + bg_2}{1 + g_1} A_{II}. \quad (53)$$

为了将外区的解与内区 I、II 的解进行匹配, 下面还需要讨论连接条件, 通过运算可有

$$(\psi_0 + \varepsilon \psi_1)|_{z \rightarrow 0} = \varepsilon E_2, \quad (\psi_0 + \varepsilon \psi_1)|_{z \rightarrow H} = \varepsilon(E_2 + E_4 H) \cos n\pi e^{ima_0 H}.$$

$$\frac{d}{dz} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1)|_{z \rightarrow 0} = \frac{n\pi}{H} E, \quad \frac{d}{dz} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1)|_{z \rightarrow H} = \frac{n\pi}{H} E \cos n\pi e^{ima_0 H}$$

$$(\varepsilon \psi_0^I)|_{z \rightarrow \infty} = \varepsilon A_I, \quad (\varepsilon \psi_0^{II})|_{z \rightarrow \infty} = \varepsilon A_{II},$$

$$\frac{d}{dz} (\varepsilon \psi_0^I)|_{z \rightarrow \infty} = B_I, \quad \frac{d}{dz} (\varepsilon \psi_0^{II})|_{z \rightarrow \infty} = -B_{II},$$

在边界 $z=0$ 附近, 要求 $(\tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1)|_{z \rightarrow 0} = (\varepsilon \tilde{\psi}_0^I)|_{z \rightarrow \infty}$, $\frac{d}{dz}(\tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1)|_{z \rightarrow 0} = \frac{d}{dz}(\varepsilon \tilde{\psi}_0^I)|_{z \rightarrow \infty}$, 即有

$$A_1 = E_2, \quad (54)$$

$$B_1 = \frac{n\pi}{H} E. \quad (55)$$

而在边界 $z=H$ 附近, 要求 $(\tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1)|_{z \rightarrow H} = \varepsilon \tilde{\psi}_0^{II}|_{z \rightarrow \infty}$, $\frac{d}{dz}(\tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1)|_{z \rightarrow H} = \frac{d}{dz}(\varepsilon \tilde{\psi}_0^{II})|_{z \rightarrow \infty}$, 即有

$$A_{11} = (E_2 + E_4 H) \cos n\pi e^{ina_0 H}, \quad (56)$$

$$B_{11} = -\frac{n\pi}{H} E \cos n\pi e^{ina_0 H}. \quad (57)$$

5 弱粘性的衰减特性

由 (52) ~ (57) 式, (27) 式以及 G_1 与 E 、 σ_1 的关系式 (25), 则得到 σ_1 的频散关系

$$\sigma_1 = \frac{2A}{\sigma_0 H(\alpha^2 + a_0^2 \alpha^2 + 1)} \frac{1 + g_1}{\lambda_4 - ag_1 + bg_2}, \quad (58)$$

将 g_1 和 g_2 的表达式 (48)、(49) 代入其中, 就有

$$\sigma_1 = \frac{2A}{\sigma_0 H(\alpha^2 + a_0^2 \alpha^2 + 1)} \frac{(a^2 + b^2)^2 + \lambda_4^2(b^2 - 3a^2 - 2a\lambda_4)}{\lambda_4(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2a\lambda_4 + \lambda_4^2)}. \quad (59)$$

记 $C = 2\sigma_0 / f H^2 > 0$, $d = 2F / f H^2 > 0$, 则有

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -\sqrt{Pr c} < 0, & a + bi &= \sqrt{c + di}, \\ a^2 &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}, & b^2 &= -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

根据以上等式, 可以得到

$$a^2 + b^2 + 2a\lambda_4 + \lambda_4^2 = Pr c + \sqrt{c^2 + d^2} - 2\sqrt{\frac{Pr}{2}c^2 + \frac{Pr c}{2}\sqrt{c^2 + d^2}}. \quad (60)$$

而

$$(Pr c + \sqrt{c^2 + d^2})^2 - 4\left(\frac{Pr}{2}c^2 + \frac{Pr c}{2}\sqrt{c^2 + d^2}\right) = d^2 + (1 - Pr)^2 c^2 > 0. \quad (61)$$

所以由 (60)、(61) 式可知

$$a^2 + b^2 + 2a\lambda_4 + \lambda_4^2 > 0. \quad (62)$$

另外

$$(a^2 + b^2)^2 + \lambda_4^2(b^2 - 3a^2 - 2a\lambda_4) = c^2 + d^2 + 2Pr c \sqrt{Pr c} \sqrt{\frac{c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + d^2}} - 2Pr c^2 - Pr c \sqrt{c^2 + d^2}, \quad (63)$$

在 $Pr \sim 1$ 、 $c \sim d$ 时, (63) 式可简化为

$$(a^2 + b^2)^2 + \lambda_4^2(b^2 - 3a^2 - 2a\lambda_4) = (\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2})C^2 > 0. \quad (64)$$

故从 (59)、(62)、(64) 式可知, $\sigma_1 < 0$, 即在取 $O(\varepsilon^1)$ 近似时, 弱粘性的首先作用是使对称扰动随时间衰减, 而不可能产生南北方向传播的模式。

总结一下 (28)、(34) 和 (39) 式, 方程 (15) 精确到 $O(\varepsilon)$ 的总体合成解为

$$\psi = \{\tilde{\psi}_0 + \varepsilon \tilde{\psi}_1 + \varepsilon \tilde{\psi}_0^1 + \varepsilon \tilde{\psi}_0^{\text{II}} - \varepsilon E_2 - \varepsilon(E_2 + E_4 H) \cos n\pi e^{i\text{mag}H}\} e^{im_1 t + i\sigma_0 t + i\sigma_1 t}. \quad (65)$$

取 $N^2 = 8.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, $Ri = N^2 / (\bar{U}_z)^2 = 0.6$, $f = 0.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $F^2 = f^2 = 0.81 \times 10^{-8} \text{ s}^{-2}$, $n=1$, $H=10 \text{ km}=10^4 \text{ m}$. 图 2 表示了这些参数情况下, Prandtl 数取为 0.7、1.0、1.3 时, 粘性衰减率 σ_1 随半波长 L 的变化情况。由图可见, 波长越长, 衰减率 σ_1 就越大, 特别是在 $L \rightarrow 0$ 时, $\sigma_1 \rightarrow 0$, $L \rightarrow L_c$ (L_c 与 σ_0 在长波方向上的截断半波长有关, 此处大约为 250 km) 时, σ_1 就会发生跃变, 衰减作用一下子变得相当大, 迅速地将波长较长的波衰减下去。所以在弱粘性的条件下, 取一级近似时, 粘性的作用是首先衰减波长较长的波, 对波长较短的波衰减作用则小一些。对比 3 种 Prandtl 数情况下的衰减率可知, 波动的衰减率 σ_1 对 Prandtl 数的依赖性较小, $Pr < 1$ 时的衰减率比 $Pr > 1$ 时的衰减率要略大一些, 因而 $Pr < 1$ 的情况比 $Pr > 1$ 的情况不稳定程度也要小一些。

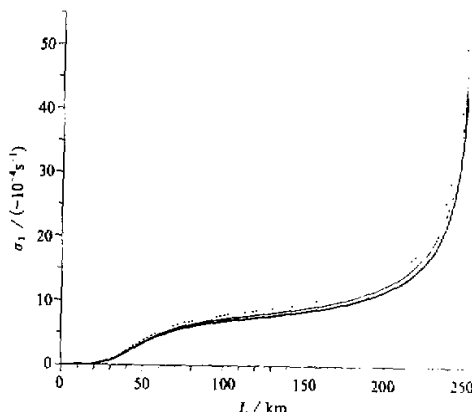


图 2 σ_1 随半波长 L 的变化
(粗实线 $Pr=1.3$, 细实线 $Pr=1$, 虚线 $Pr=0.7$)

下面讨论一下方程 (16) 的二阶近似方程, 为了简单起见, 假定不考虑垂直方向粘性扩散项, 此时方程 (16) 退化为

$$(\sigma + \gamma m^2)^2 (\sigma + \kappa m^2) \left(-m^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\psi} = m^2 N^2 (\sigma + \gamma m^2) \tilde{\psi} + im S^2 [2\sigma + (\gamma + \kappa) m^2] \frac{d\tilde{\psi}}{dz} - F^2 (\sigma + \kappa m^2) \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2}. \quad (66)$$

将 ψ 和 σ 按照 ε 进行级数展开

$$\psi = \psi_0(z) + \varepsilon \psi_1(z) + \varepsilon^2 \psi_2(z) + \dots, \quad (67)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots, \quad (68)$$

代入到方程 (66) 中, 则可以得到 $O(\varepsilon^0)$ 、 $O(\varepsilon^1)$ 、 $O(\varepsilon^2)$ ……各阶近似方程

$$O(\varepsilon^0) \text{ 方程: } (\sigma_0^2 + F^2) \frac{d^2 \psi_0}{dz^2} - 2imS^2 \frac{d\psi_0}{dz} - m^2(\sigma_0^2 + N^2) \psi_0 = 0,$$

$$O(\varepsilon^1) \text{ 方程: } (\sigma_0^2 + F^2) \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - 2imS^2 \frac{d\psi_1}{dz} - m^2(\sigma_0^2 + N^2) \psi_1 = \\ - 2\sigma_0 \sigma_1 \left(-m^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi_0,$$

$$O(\varepsilon^2) \text{ 方程: } (\sigma_0^2 + F^2) \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} - 2imS^2 \frac{d\psi_2}{dz} - m^2(\sigma_0^2 + N^2) \psi_2 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_0} (3\sigma_0^2 \\ + F^2) \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + 2imS^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \frac{d\psi_1}{dz} + m^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_0} (3\sigma_0^2 + N^2) \psi_1 - \frac{1}{\sigma_0} [3\sigma_0 \sigma_1^2 \\ + 2\sigma_0^2 r_1 + (\sigma_0^2 + F^2) r_2] \frac{d^2 \psi_0}{dz^2} + imS^2 (r_1 + r_2) / \sigma_0 \frac{d\psi_0}{dz} \\ + m^2 [3\sigma_0 \sigma_1^2 + (2\sigma_0^2 + N^2) r_1 + \sigma_0^2 r_2] / \sigma_0 \psi_0,$$

其中 $r_1 = \sigma_2 + (fH^2/2)m^2$, $r_2 = \sigma_2 + (fH^2/2Pr)m^2$ 。

分析二阶近似方程可见, σ_2 总是包含在 r_1 和 r_2 中。事实上考虑垂直方向粘性扩散项时, 同样的分析也可以发现, σ_2 确实是包含在 r_1 和 r_2 之中。因此, $\sigma_2 \propto m^2$, 这时弱粘性的主要作用则是衰减短波。

6 结语

本文通过对二维弱粘性线性对称不稳定问题的研究, 得到以下结果:

(1) 在弱粘性条件下, 取一级近似时, 粘性的作用是使得对流扰动随着时间衰减, 不可能产生南北方向传播的模式。它首先是衰减波长较长的波, 对波长较短扰动的衰减作用则小一些。

(2) 在 $Pr \sim O(1)$ 条件下, 波动衰减率 σ_1 对 Prandtl 数的依赖性较小。 $Pr < 1$ 时的 σ_1 比 $Pr > 1$ 时的衰减率要略大一些, 因而 $Pr < 1$ 的情况比 $Pr > 1$ 的情况不稳定性也要小一些。

(3) $O(\varepsilon^2)$ 近似方程分析表明, 弱粘性的主要作用 σ_2 则是衰减短波。

本文只是采用奇异摄动法从理论上对粘性线性对称不稳定进行了物理特征之分析, 今后应进行数值分析, 并与理论结果进行比较, 这样才能更完善地确证本文所得到的理论结果。

参 考 文 献

- 1 McIntyre, M. E., 1970, Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex, *Geophys. Fluid Dyn.*, **1**, 19~58
- 2 Emanuel, K. A., 1979, Inertial instability and mesoscale convective systems, Part I: Linear theory of inertial instability in rotating viscous fluids, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 2425~2449.
- 3 Emanuel, K. A., 1985, Comments on "Inertial instability and mesoscale convective systems. Part I.", *J. Atmos. Sci.*, **42**, 747~752.
- 4 Miller, T. L., 1985, On the energetics and nonhydrostatic aspects of symmetric instability, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 203~211.
- 5 谢应齐, 1989, 奇异扰动方法及其在大气科学中的应用, 昆明: 云南大学出版社, 272~284.
- 6 张可苏, 1980, 大气动力学模式的比较研究, 中国科学, **3**, 277~287.
- 7 Johns, B. A., 1968, A boundary layer method for the determination of the viscous damping of small amplitude gravity waves, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **21**, 93~103.

Symmetric Instability in Nonconservative Systems Part I: Forcing Effect of Weak Viscosity

Ding Yihui

(National Climate Centre, Beijing 100081)

Shen Xinyong

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract The problems of symmetric instability in nonconservative systems have been comprehensively studied. Here is its part I which mainly deals with the forcing effect of weak viscosity. It is found that the first effect of weak viscosity is decaying the waves whose wavelengths are longer under $O(\epsilon)$ approximation. Its decaying effect is smaller for those disturbances whose wavelengths are shorter. The decaying rate is less dependent on Prandtl number on condition that the order of Pr is one. The main effect of weak viscosity is decaying the waves whose wavelengths are shorter under $O(\epsilon^2)$ approximation. Consequently, its main effect is to make the scale developing symmetric disturbances to be placed in mesoscale spectrum.

Key words nonconservative system weak viscosity linear symmetric instability