

一个可供现代数学分析研究的 气候动力学模型

曾庆存

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

摘 要 针对以往大气动力学方程和气候动力学方程数学研究所使用模式的不足之处, 本文作了改进, 使数学模型更接近于实际情况。这些包括, (1) 取大气上界气压为零, 而非某个正的(小)常数; (2) 消除了整层无辐散近似, 从而使地面气压为直接的预报量, 但在地面气压预报方程中加入了水平湍流扩散项(平滑); (3) 对大气运动的内热源的辐射传输过程和水汽相变过程作了合理的处理, 而非看作已知的外强迫, 用适当的方法可以用解析函数较好地逼近这些过程。另外还提出合理的边界条件。我们的目的是要证明这样提出的初一边值问题的解的存在性, 以后还可研究其基本性质和长期行为。

关键词 大气动力学 气候动力学 边界条件 问题的适定性 解的存在性

1 引言

大气动力学方程解的存在唯一性, 解的基本性质, 边界条件的正确提法等, 是天气动力学和气候动力学中的一些最基本的数学问题, 我国曾是最早系统地研究这些基础问题的国家。例如中国科学院数学研究所早在 1958 年就研究了二维球面上线性化方程解的存在唯一性^[1]。而关于边界条件的正确提法以及各种大气模式解的适定性问题则在曾庆存的《数值天气预报的数学物理基础》^[2]中有系统的论述, 指出斜压大气动力学方程的上边界条件应是全气柱的能量为有限。在书中证明了所提出的正确初边值提法下各种大气模式(正压、斜压、准地转、非地转)的古典解甚至强解(或广义解)的唯一性(但未能证明其存在性), 并证明了弱解的存在性(但未能证明弱解的唯一性)。后来, 穆穆^[3~5]进一步证明了: 当初条件满足足够的光滑性(例如若干阶的广义微商存在), 则准地转模式和准平衡模式的强解是存在且唯一的。应该指出, 在这些工作中, 大气都是设为理想的, 即无源、汇和耗散项。

顺便指出, 曾庆存于 1983 年也最早提出了海气耦合模式的数学问题^[6], 不过主要注重于大气和海洋间界面上的边界条件的正确提法, 且使大气和海洋动力学方程写成比较统一的形式, 而未触及解的存在唯一性问题。

在上述工作的影响下, 90 年代以来, 经过汪守宏^[7]的介绍, 顺应气候研究蓬勃发展的要求, 世界上一批有威望的数学家开始研究气候动力学方程(即大气动力学方程加上源、汇和耗散等, 或考虑到大气与海洋和陆面过程的耦合)的基本数学问题, 其中

Lions、Temam 和汪守宏等^[8~12]作了最系统的研究,发表了一系列文章。他们证明了这样的复杂耦合非线性方程组弱解的存在性。这是一个很大的进步。不过,上述 Lions 等的工作所采用的模式中包括了一些重要的近似,例如在大气中取大气顶处气压不为零,气流为整层无辐散的(从而不能直接给出地面气压场随时间变化的预测),源汇或者是已知的或者是其它大气变量的线性函数等,这些近似使得他们的数学模式和实际气候模拟与预测中的模式还有一些差异。其实,地面气压场(如果研究海洋或海气耦合模式,也包括洋面高度偏差场)是一个非常重要的预报量,在天气和气候预测中必须直接计算。气流(或海流)的整层无辐散近似也歪曲了能量的转换关系,因而早已在现代使用的模式中不被应用。还有,由水汽相变所导致的大气内热源所起的作用是天气和气候千变万化的最主要根源,它是大气状态中其他变量的非常复杂的非线性函数,似需作不过分简单的考虑。

本文提出进一步接近实用的气候动力学模式,以供数学研究。以大气为例,在这模式中,我们取大气顶气压为零,且保留了地表气压场为直接预报量(即解除整层无辐散近似),同时水汽相变的加热或冷却作用用比较接近实际的由大气状态其他变量表示的非线性解析函数表示,只是辐射过程暂时取简单的线性表示,至于包括有辐射传递方程在内的更为复杂的方程组,无疑是下一步须研究的问题。

大气动力学方程问题解决了,只要内边界条件提法合理,大体上按照 Lions 等人的思路,比较接近实际的大气和海洋耦合模式问题似乎不难解决。

2 基本方程组及基本边界条件

在大气动力学(包括气候动力学)研究中,取准静力平衡近似,可使用 $(\theta, \lambda, \zeta; t)$ 坐标系,其中 θ 为余纬, λ 为经度, t 为时间, $\zeta \equiv p/p_s$, p 为气压, p_s 为地表处气压。令标准大气温度垂直分布为 $\bar{T}(p)$,位势为 $\bar{\varphi}(p)$,而地表处气压的标准分布为 $\bar{p}_s(\theta, \lambda)$ 。设 $\bar{T}(p)$, $\bar{\varphi}(p)$, 及 $\bar{p}_s(\theta, \lambda)$ 为已知,我们有气温 $T(\theta, \lambda, \zeta, t) = \bar{T}(p) + T'(\theta, \lambda, \zeta, t)$, 等压面位势 $\varphi(\theta, \lambda, \zeta, t) = \bar{\varphi}(p) + \varphi'(\theta, \lambda, \zeta, t)$, 及 $p_s(\theta, \lambda, t) = \bar{p}_s(\theta, \lambda) + p'_s(\theta, \lambda, t)$, 于是动力学基本方程组为^[12]

$$\frac{dv_\theta}{dt} - \frac{v_\lambda^2}{a} \operatorname{ctg} \theta = -\frac{\partial \varphi'}{a \partial \theta} - RT' \frac{1}{p_s^*} \frac{\partial p_s^*}{a \partial \theta} + 2\omega \cos \theta v_\lambda + D_\theta, \quad (1)$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_\theta v_\lambda}{a} \operatorname{ctg} \theta = -\frac{\partial \varphi'}{a \sin \theta \partial \lambda} - RT' \frac{1}{p_s^*} \frac{\partial p_s^*}{a \sin \theta \partial \lambda} - 2\omega \cos \theta v_\theta + D_\lambda, \quad (2)$$

$$c_p \frac{dT'}{dt} = \frac{c_p c_0^2}{p_s^* \zeta} \left[p_s^* \dot{\zeta} + \zeta \left(\kappa \frac{\partial p'_s}{\partial t} + v_\theta^* \frac{\partial p_s^*}{a \partial \theta} + v_\lambda^* \frac{\partial p_s^*}{a \sin \theta \partial \lambda} \right) \right] + D_T + \frac{dQ}{dt}, \quad (3)$$

$$\kappa \frac{\partial p'_s}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial \bar{p}_s v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{p}_s v_\lambda}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial \bar{p}_s \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = D_{ps}, \quad (4)$$

$$RT' = -\zeta \frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta}, \quad (5)$$

其中符号大都是常见的,只是 $\kappa = 0$ 或 1 ,取 $\kappa = 0$ 就是整层无辐散近似(本文不研究这

种情况, 此后我们都取 $\kappa=1$ 而省略不写), 在(4)中我们还取了近似, 即用 $\bar{p}_s$ 代替了 p_s (目的是使(4)为线性的)。还有, 取

$$\frac{d}{dt} = v_\theta^* \frac{\partial}{a \partial \theta} + v_\lambda^* \frac{\partial}{a \sin \theta \partial \lambda} + \dot{\zeta}^* \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (6)$$

在(1)~(6)中带星号的量本应是其自身, 但也可以是其泛函或另外一些可允许的替代。又

$$c_0^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma), \quad (7)$$

$\gamma_a = g/c_p$, $\gamma = -\partial \tilde{T} / \partial z$ 。 c_0^2 一般是正数 (稳定层结), 甚至可取为常数 (标准层结近似); 又 D_θ , D_λ , D_T 及 D_{ps} 为湍流扩散项, 由于加入了 D_{ps} , (4)与常用的动力学方程有所不同 (其实 D_{ps} 可视为密度扩散项, 而在实用预报方程中实际上是一个光滑算子, 因此加入此项是符合实际的), dQ/dt 为加热率。

取大气上界为 $p=0$, 于是有上下界对应于 $\zeta=0, 1$ 。在未计入湍流扩散及加热率之前, 我们有基本的边界条件如下:

$$\dot{\zeta} = 0, \quad (\text{当 } \zeta = 0, 1) \quad (8)$$

$$(v_\theta, v_\lambda, T') \in L_\zeta^2, \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (9)$$

(9)是说 $(v_\theta, v_\lambda, T')$ 等为 ζ 的平方可积函数, 由此可推知全大气柱的能量为有界量 (若 c_0^2 不为常数), 或为全大气柱的有效能量为有界量 (若 c_0^2 取为常数)。注意, 本来能量有界只要求 $T' \in L_\zeta^1$, 但 φ' , T' 在(1)和(2)出现, 为了保证对于所有时刻 $v_\theta, v_\lambda \in L_\zeta^2$, 必须 $T' \in L_\zeta^2$, 而由 $T' \in L_\zeta^2$ 又可推出 $T' \in L_\zeta^1$ 。

其次, 由(5)可按 T' 算得 φ' , 但需取一边界条件, 可用

$$\varphi'(\theta, \lambda, 1, t) = \varphi'_s(\theta, \lambda, t) = \frac{R \tilde{T}_s}{\bar{p}_s} p'_s(\theta, \lambda, t). \quad (10)$$

(注意, 当取 $\kappa=0$ 时(10)不能用, φ'_s 只能由整层无辐散近似下的平衡方程求出, 而且只能准确到一个时间任意函数。)

此外, 我们要求 $v_\theta^*, v_\lambda^*, \dot{\zeta}^*$ 满足整层无辐散近似:

$$\frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial p_s^* v_\theta^* \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial p_s^* v_\lambda^*}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial p_s^* \dot{\zeta}^*}{\partial \zeta} = 0, \quad (11)$$

并且

$$\dot{\zeta}^* = 0, \quad (\text{当 } \zeta = 0, 1). \quad (12)$$

注意(11)与(4)并不矛盾, 甚至当 p_s^* 为 $\bar{p}_s$ 时也对。其实, 我们只要取 v_θ^*, v_λ^* 为合适的泛函, 就可使按(11)计算的 $\dot{\zeta}^*$ 满足(12), 而且 $\dot{\zeta}^*$ 只不过是 v_θ, v_λ 的泛函。

我们自然要求所有变量为沿整个大气 (即在整个球面 S 和整个气柱 $(0 \leq \zeta \leq 1)$) 是平方可积函数:

$$(v_\theta, v_\lambda, T') \in L_S^2 \cap L_\zeta^2, \quad (13)$$

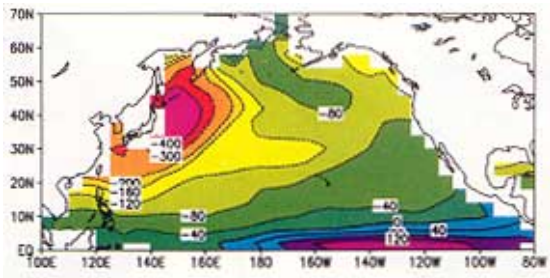
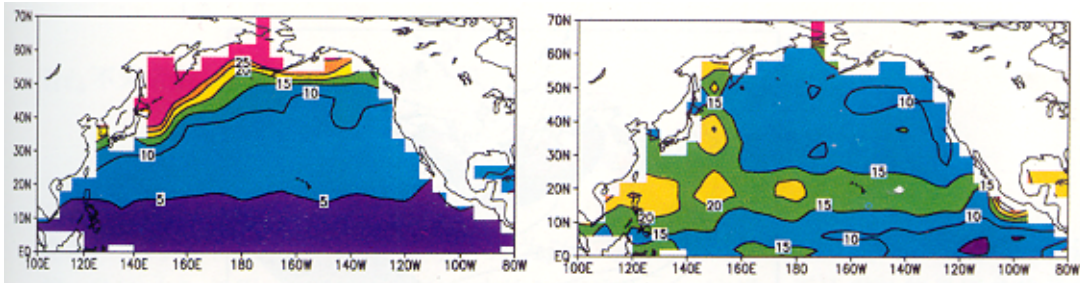


图1 多年平均的1月份北太平洋净向下的海表热通量
资料取自模式第131~182年，单位： $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

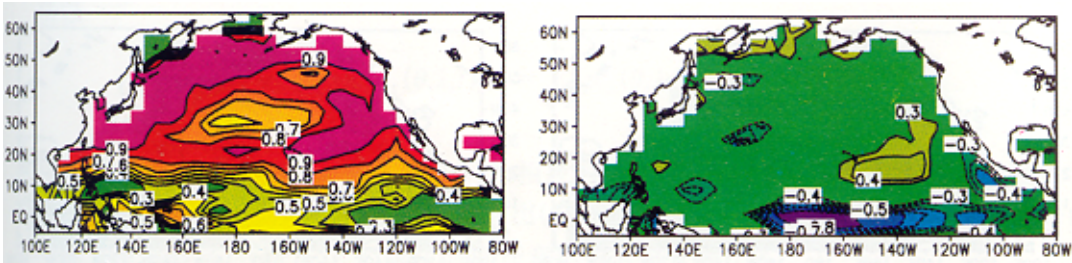
FIGURE 1



(a) (b)

图2 1月份北太平洋感热通量 (a) 和潜热通量 (b) 的标准差
资料取自模式第131~182年，单位： $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

FIGURE 2



(a) (b)

图3 冬季北太平洋潜热与感热通量之和与SST倾向 (a) 及SST本身 (b) 的距平相关系数
资料取自模式第131~182年，共51个样本

FIGURE 3

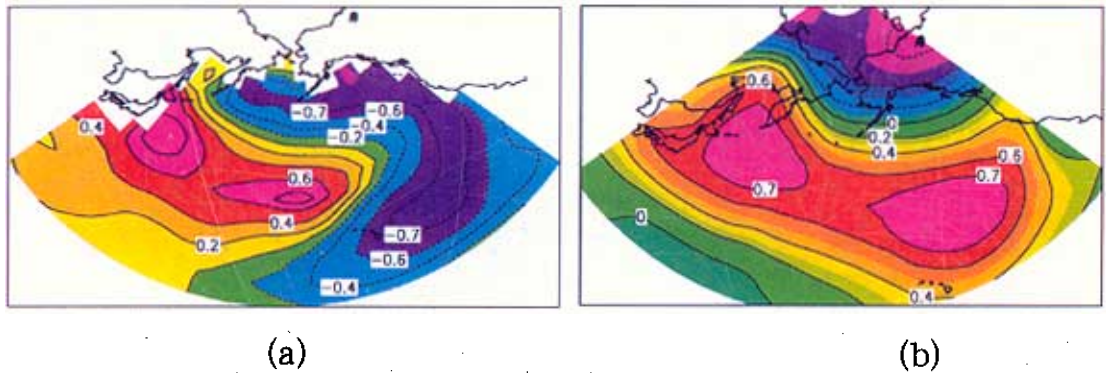


图 5 由模式第 131 ~ 182 年资料计算的冬季北太平洋 SST 倾向的第一个标准化的 EOF 分量 (a), 及其时间展开系数和同期的海平面气压场的距平相关系数 (b)

FIGURE 5

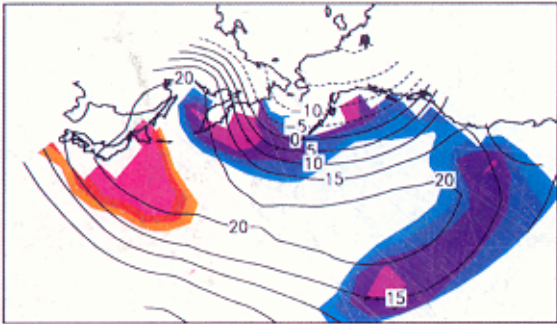


图 6 由模式第 131 ~ 182 年资料计算的冬季北太平洋海平面气压场的第一个 EOF 分量 (图中用等值线表示) 及其时间展开系数同感热和潜热之和的距平相关系数 (图中用橙 - 红色阴影区和蓝 - 紫色阴影区分别表示相关系数大于 0.5 和小于 - 0.5 的范围)

FIGURE 6

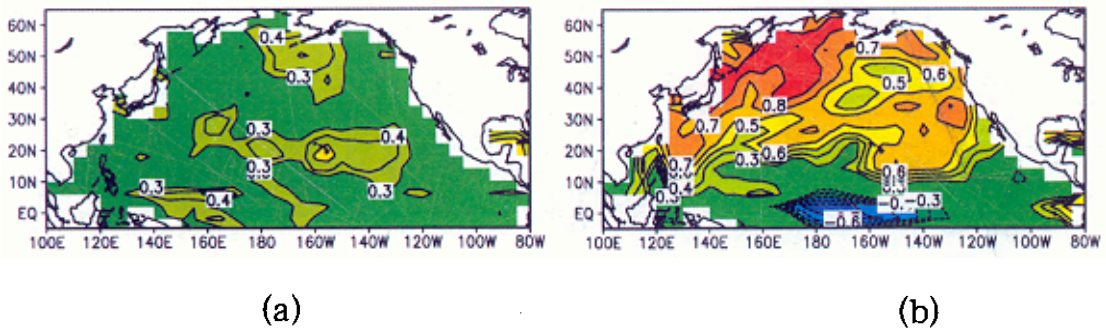


图 7 冬季北太平洋潜热与感热通量之和与大气底层温度倾向 (a) 及气温本身 (b) 的距平相关系数
资料取自模式第 131 ~ 182 年, 共 51 个样本

FIGURE 7

$$p'_s \in L^2_S, \quad (14)$$

这等价于全大气的有效能量为有限, 或全大气的能量为有限。

以后为简单起见, 我们取 $p_s^* = \bar{p}_s$ (注意 v_θ^* , v_λ^* 必须由 v_θ , v_λ 求出), 于是在不计及扩散项及加热率时, 若 $c_0^2 = \text{常数}$, 则有总有效能量守恒, 即

$$2E_e(t) \equiv 2E_{kT}(t) + \left\| \left(\frac{R\tilde{T}_s}{\bar{p}_s} \right)^{1/2} p'_s(t) \right\|_S^2 = 2E_{kT}(0) + \left\| \left(\frac{R\tilde{T}_s}{\bar{p}_s} \right)^{1/2} p'_s(0) \right\|_S^2, \quad (15)$$

其中 E_e 为总有效能量, 而

$$\begin{cases} 2E_{kT}(t) \equiv \iint_S \bar{p}_s \left[v_\theta^2 + v_\lambda^2 + \frac{(RT')^2}{c_0^2} \right] d\zeta a^2 \sin\theta d\theta d\lambda, \\ \left\| \left(\frac{R\tilde{T}_s}{\bar{p}_s} \right)^{1/2} p'_s(t) \right\|_S^2 = \iint_S \left(\frac{R\tilde{T}_s}{\bar{p}_s} \right) p_s'^2 a^2 \sin\theta d\theta d\lambda. \end{cases} \quad (16)$$

若 c_0 不为常数, 则有总能量守恒, 即

$$E(t) = \iint_S \bar{p}_s \left[\frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{2} + c_v T' + \varphi' \right] d\zeta a \sin\theta d\theta d\lambda = \text{常数}. \quad (17)$$

注意, 上两式中已计及了地形影响, 因为 $\bar{p}(\theta, \lambda)$ 包含了地形因素。此外, 若不取(11)近似, 且(4)中 $\bar{p}_s$ 仍用 p_s , 则(16)和(17)中的 $\bar{p}_s$ 应改为 p_s 。这样, 无论有效能量还是能量都不再是二次型了, 有其不便之处, 这就是我们所以引入(11)的原因。

守恒定律不光有物理意义, 且在数学分析中也是很有用的。

我们还有质量守恒 ($\kappa = 1$), 其实当 $D_{ps} = 0$ 时由(4)有

$$\frac{\partial p'_s}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot \bar{p}_s \bar{v} d\zeta. \quad (18)$$

所以

$$\iint_S p'_s(\theta, \lambda, t) dS = \iint_S p'_s(\theta, \lambda, 0) dS. \quad (19)$$

其中 ∇ 为球面上的梯度算子, $\nabla \cdot ()$ 为相应的散度算子。 $dS = a^2 \sin\theta d\theta d\lambda$ 。注意, 若取 $\kappa = 0$, 则(18)左右端都为零, 不能推出(19)。(19)本身是一个附加条件, 用以消去由平衡方程求解 φ' , (或 p'_s) 时那个时间任意函数 (见文献[2])。

3 关于湍流扩散项及相应边界条件

在实用的天气预报和气候研究中, 湍流扩散项可取为

$$D_\theta = \frac{\mu_1}{\bar{p}_s} \Delta v_\theta + v_1 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{g \bar{p}_s \zeta}{R \bar{T}} \right)^2 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} \right], \quad (20)$$

$$D_\lambda = \frac{\mu_1}{\bar{p}_s} \Delta v_\lambda + v_1 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{g \bar{p}_s \zeta}{R \bar{T}} \right)^2 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \zeta} \right], \quad (21)$$

$$D_T = \frac{\mu_2}{\bar{p}_s} \Delta T' + v_2 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{g \bar{p}_s \zeta}{R \bar{T}} \right)^2 \frac{1}{\bar{p}_s} \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \right], \quad (22)$$

$$D_{ps} = \mu_3 \Delta p'_s. \quad (23)$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right\}, \quad (24)$$

而 μ_1, μ_2, μ_3, v_1 和 v_2 为常数, 或者 μ_1 和 μ_2 只是 ζ 的函数。

由于有关于 ζ 的二阶导数出现, 我们要在大气上下界上补加边界条件, 在大气上界, 自然可取

$$\zeta^2 \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \zeta}, \quad \zeta^2 \frac{\partial v_\lambda^2}{\partial \zeta}, \quad \zeta^2 \frac{\partial T'^2}{\partial \zeta} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \zeta \rightarrow 0. \quad (25)$$

(注意, 上三式均可由 $v_\theta \in L_\zeta^2, v_\lambda \in L_\zeta^2$ 和 $T' \in L_\zeta^2$ 推出, 因而不是新的边界条件。) 而在大气下界, 当不考虑陆地和海洋的演变过程时, 可取

$$v_1 \frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} = -k_{s1} f(|\vec{v}|) v_\theta, \quad v_1 \frac{\partial v_\lambda}{\partial \zeta} = -k_{s1} f(|\vec{v}|) v_\lambda, \quad (\text{当 } \zeta \rightarrow 1), \quad (26)$$

$$v_2 \frac{\partial T'}{\partial \zeta} = -k_{s2} T' + G_s, \quad (\text{当 } \zeta \rightarrow 1), \quad (27)$$

其中 k_{s1} 和 k_{s2} 为正的常数, $f(|\vec{v}|)$ 为 $|\vec{v}|$ 的正函数 (吹风系数), G_s 为已知函数。当作理论研究时, 如取 G_s 为零, 则 (27) 即是辐射冷却条件。注意: 在大气与海洋耦合时 (26) 应取为 $v_1 \partial v_\theta / \partial \zeta = -k_{s1} f(|\vec{v} - \vec{v}_0|)(v_\theta - v_{\theta 0})$, 其中 $v_{\theta 0}$ 为相应的海洋表面流速 (见文献 [6] 及 [9])。

由 (20)~(27), 若 $G_s = 0$, 可得湍流扩散过程是一个能量耗散过程, 即有

$$\begin{aligned} & \iiint_S \bar{p}_s \left\{ v_\theta D_\theta + v_\lambda D_\lambda + T' D_T \right\} d\zeta a^2 \sin^2 \theta d\theta d\lambda \\ &= - \iiint_S \left\{ \mu_1 [(\nabla v_\theta)^2 + (\nabla v_\lambda)^2] + \mu_2 (\nabla T')^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\bar{p}_s} \left(\frac{g \bar{p}_s \zeta}{R \bar{T}} \right)^2 \left[v_1 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} \right)^2 + v_1 \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \zeta} \right)^2 + v_2 \left(\frac{\partial T'}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \right\} dS d\zeta \\ & \quad - \iint_S \left(\frac{g \bar{p}_s}{R \bar{T}_s} \right)^2 \frac{1}{\bar{p}_s} [k_{s1} f(|\vec{v}|)(v_\theta^2 + v_\lambda^2) + k_{s2} T'^2] \Big|_{\zeta=1} dS < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

这在数学分析上是很有用的。

同时, 即使加入了 D_{ps} , 我们仍有质量守恒(19)。

4 关于 dQ/dt 及水汽输送方程

dQ/dt 由辐射加热 H_1 (包括短波辐射和长波辐射的吸收和长波辐射的发射) 及由水汽相变 (凝结和云滴的蒸发) 所导致的潜热加热 H_2 (上述所谓加热当然包括冷却, 即加热率为负者) 两部分组成:

$$\frac{dQ}{dt} = H_1 + H_2, \quad (29)$$

H_1 和 H_2 二者都与大气中的水汽及云有关, 也都受大气运动自身制约, 有很复杂的函数关系。

在作基本数学理论研究时, 作为第一步, 暂时不引入辐射传递方程 (因为这样一来就太复杂了), 而设 H_1 为 $(v_\theta, v_\lambda, T', q, m_w, \zeta)$ 的解析函数, 甚至简单地取为牛顿冷却

$$H_1 = -k_a T' \quad (k_a > 0) \quad (30)$$

(在许多理论研究中是这样做的), 其中 q 为比湿, $q = \rho_v / \rho_a$, m_w 为单位空气中的液态水 (细分还应有固态水即冰) 的含量, ρ_v 和 ρ_a 各为水汽和空气的密度。

H_2 本来与微物理过程有密切关系, 非常复杂, 现在对其详细规律性也未清楚了解, 常需引入经验公式或判断。但在形式上, 如果把发生于混合湿空气的热力学过程视为可逆的, 则近似地有:

$$H_2 = \begin{cases} -LT \frac{d}{dt} \left(\frac{q_m}{T} \right), & \text{当湿空气饱和时,} \\ 0, & \text{当湿空气未饱和时,} \end{cases} \quad (31)$$

其中 L 为相变潜热。本来对于水和冰来说, 其值不同, 为简单起见, 可先考虑只有汽和水滴, 或只有汽和冰晶, q_m 为饱和水汽压, 它只是 p 和 T 的函数。(31) 第一式的意义是空气的 q 一旦达到饱和值 q_m , 立即凝结发生, 加热大气, 且当凝结发生时, q 只能等于 q_m , 于是单位时间凝结出来的水量为 $-dq_m/dt$, 若为等温, 则加热率为 Ldq_m/dt , 不过过程不一定为等温, 故按热力学方法可得(31)第一式。其次, 当云中含有水分 $m_w > 0$ 时, 空气也可能由于运动而使 q_m 变小 ($dq_m/dt < 0$), 此时水滴要蒸发, 以使 q 达到当地的 q_m , 于是空气冷却。不过, 若空气含水量为零时, 空气由饱和区进入未饱和区, 也不会有蒸发发生, 所以若用数学符号表示之, 应有

$$H_2 = \delta_{21} \delta_{22} \left[-LT \frac{d}{dt} \left(\frac{q_m}{T} \right) \right], \quad (32)$$

其中

$$\begin{cases} \delta_{21} = \delta_1(q - q_m) = \begin{cases} 1, & (q \geq q_m \text{ 时}) \\ 0, & (q < q_m \text{ 时}) \end{cases} \\ \delta_{22} = \delta_2(m_w) = \begin{cases} 1, & (m_w > 0 \text{ 时}) \\ 0, & (m_w \leq 0 \text{ 时}) \end{cases} \end{cases} \quad (33)$$

显然, 我们为此还须引入关于水汽 q 和含水量 m_w 的方程, 作为第一步, 我们可用解析函数来逼近 δ_{21} 和 δ_{22} , 例如

$$\delta_{21}\delta_{22} = \exp\left\{-\frac{(q - q_m)^2}{b^2}\right\}, \quad (34)$$

当取 b 足够小时, 虽对凝结或蒸发过程有所歪曲, 不过不大。当然, 我们也可以考虑比(34)更好的公式来作解析逼近。还有, 直接应用(32)作数学分析也有不便, 因 $d(q_m/T)/dt$ 本身含有 dT/dt , 并项后有可能改变方程(3)左边, 但考虑到水汽相变过程主要由空气上升或下降所致, 因此, 可近似地取作

$$H_2 = \delta_{21}\delta_{22}\left[-LT\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{q_m}{T}\right)\right], \quad (35)$$

这样(35)和(34)结合就可知 H_2 是 ζ , ζ 和 T 的解析函数(注意: ζ 是 v_θ , v_z 的泛函), 剩下的是还要加上 dq/dt 的方程。

若有相变发生, dq/dt 也是非常复杂的。现有的大气环流模式事实上都采取经验处理。但理论形式上说, 如认为水汽凝结是可逆的热力平衡过程, 而不细分其微物理过程, 则当计及湍流扩散过程后, 可以有水汽传输方程为

$$\frac{dq}{dt} = D_q + \delta_{21}\delta_{22}\frac{dq_m}{dt}, \quad (36)$$

其中 δ_{21} 和 δ_{22} 同(32), D_q 为湍流扩散项, 且

$$D_q = \frac{\mu_3}{\bar{p}_s}\Delta q + v_3\frac{1}{\bar{p}_s}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(\frac{g\bar{p}_s\zeta}{R\bar{T}}\right)^2\frac{1}{\bar{p}_s}\frac{\partial q}{\partial\zeta}\right], \quad (37)$$

μ_3 和 v_3 为常数。

作为第一步, 为了一致起见, dq_m/dt 用和(35)相应的近似, 即有

$$\frac{dq}{dt} = D_q + \delta_{21}\delta_{22}\zeta\frac{\partial q_m}{\partial\zeta}. \quad (38)$$

我们还要提出关于水汽的边界条件:

$$\zeta^2\frac{\partial q^2}{\partial\zeta} \rightarrow 0, \quad (\text{当}\zeta \rightarrow 0) \quad (39)$$

$$v_3\frac{\partial q}{\partial\zeta} = f_1(|\bar{v}|)(q_m^* - q), \quad (\text{当}\zeta \rightarrow 1) \quad (40)$$

或

$$v_3 \frac{\partial q}{\partial \zeta} = G_q \text{ (已知函数)}, \quad (\text{当 } \zeta \rightarrow 0) \quad (40)'$$

其中 $f_1(|\vec{v}|)$ 称作吹风系数。(40)用于海洋上空, q_m^* 为海洋表面的饱和比湿 (为已知函数)。(40)'多用于陆地上, G_q 就是和土壤湿度有关的函数。

在有边界条件(39)和(40) (或(40)')的情况下, 湍流扩散过程不再是负定的, 但仍可取

$$q \in L_S^2 \cap L_\zeta^2. \quad (41)$$

此外, 一般应有含水量变率 dm_w/dt 和降水率 P_r 之和等于凝结量。如果为了光滑起见, 再计入湍流混合, 就有

$$\frac{dm_w}{dt} = -\delta_{12}\delta_{22}\zeta \frac{\partial q_m}{\partial \zeta} - P_r + D_{mw}, \quad (42)$$

在实际中总是引入经验关系来计算 P_r , 故为简单计, 可取

$$P_r = -f_2 \left(\delta_{12}\delta_{22}\zeta \frac{\partial q_m}{\partial \zeta} \right), \quad (43)$$

其中最简单的是取 f_2 为线性函数, 即

$$f_2(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & (x < 0) \\ 0, & (x > 0) \end{cases} \quad (44)$$

$0 < \alpha < 1$ 及 $\beta > 0$ 为常数。而 D_{mw} 的公式与(37)类似, 记其相应的湍流系数为 μ_4 和 v_4 , 还有, 在(42)中我们还设降水 P_r 一旦发生, 即离开大气直接降落到地面, 因而上层的 P_r 不影响下层的 dm_w/dt 。

关于 m_w 的边界条件取为

$$\zeta^2 \frac{\partial m_w^2}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{或} \quad m_w = 0 \quad (\text{当 } \zeta \rightarrow 0), \quad (45)$$

$$\frac{\partial m_w}{\partial \zeta} = 0 \quad (\text{当 } \zeta \rightarrow 1), \quad (46)$$

(46)的意义是设大气和地表面没有直接的水分交换 (除降雨而外)。还有,

$$m_w \in L_\zeta^2 \cap L_S^2. \quad (47)$$

综合关于 q 和 m_w 的方程和边界条件, 我们有大气中总含水量 (水汽和水) 的变化方程如下:

$$\frac{d}{dt} \iiint_S \tilde{p}_s (q + m_w) dS d\zeta = \iint_S v_3 \frac{g\tilde{p}_s}{R\tilde{T}_s} \frac{\partial q}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=1} dS - \iint_S \tilde{p}_s P_r d\zeta dS. \quad (48)$$

在实际地球上, 大部地区 $\partial q / \partial \zeta|_{\zeta=1} > 0$, (48)式右端第一项为正。它使大气中水汽含量会随时间单调增加, 这是一个重大缺点。所以我们要补加降水过程, 使大气中水汽凝结后有一部分以降水方式下降回到地表面。若令(48)式右端等于 0, 也许是定经验

系数 α 和 β 的一种方法。

5 讨论

自然, 作为预测问题, 还需提初始条件, 即当 $t \rightarrow 0$ 时各变量等于初始函数,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (v_\theta, v_\lambda, T', q, m_w, p'_s) = (v_\theta^{(0)}, v_\lambda^{(0)}, T'^{(0)}, q^{(0)}, m_w^{(0)}, p_s'^{(0)}), \quad (49)$$

而且已知函数 $v_\theta^{(0)}, v_\lambda^{(0)}, T'^{(0)}, q^{(0)}, m_w^{(0)}$ 等满足同样的边界条件, 即

$$(v_\theta^{(0)}, v_\lambda^{(0)}, T'^{(0)}, q^{(0)}, m_w^{(0)}) \in L^2_\tau, \quad \text{和} \quad L^2_\tau \cap L^2_\tau, \quad (50)$$

$$p_s'^{(0)} \in L^2_\tau, \quad (51)$$

以及条件(26)、(27)、(39)、(40) (或(40)')、(45)和(46)。

这样, 就有了一个初边值问题, 简称之为一个模式。我们这里提出的模式比较接近于实际的天气和气候预报模式, 本模式最主要之点是: (1) 大气顶为 $p=0$, (2) 没有用整层无辐散近似, 而是写出地面气压的预报方程, 但有水平平滑项, (3) 考虑到水汽凝结的比较复杂 (虽然已作了相当多的简化) 的过程, (4) 有水汽传输方程, 并且简单地计及降水过程。

由于在所有方程中都包含有湍流扩散项, 尤其是地面气压预报方程中考虑了湍流平滑过程 (这符合于实际), 因此方程的性质应该是更好些。即使消去了整层无辐散近似, 似乎也不引起数学分析的困难。其次, 由于垂直方向上的湍流扩散项的引入, 取大气顶的气压为零似乎不致引起太大的数学分析的困难。

我们首先所要研究的是本问题弱解的存在性, 其方法似乎与 Lions 等所用的大体类似。

参 考 文 献

- 1 中国科学院数学研究所分析室编微组, 1959, 一个与中长期预报有关的复合型方程的定解问题, 气象学报, 30(4), 390~397.
- 2 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 北京: 科学出版社, 543pp.
- 3 Mu Mu, 1986, Global classical solution of initial-boundary value problem for nonlinear vorticity equation and its application, *Acta Mathematica Scientia*, 6(2), 201~218.
- 4 穆穆, 1986, 斜压准地转-准无辐散模式初边值问题古典解的存在唯一性, 大气科学, 10(2), 113~120.
- 5 Mu Mu and Zeng Qingcun, 1991, New developments on existence and uniqueness of solutions to some models in atmospheric dynamics, *Adv. Atmos. Sci.*, 8(4), 383~398.
- 6 Zeng Qingcun, 1983, Some numerical ocean-atmosphere coupling models, Proceedings of the First International Symposium on Integrated Global Ocean Monitoring, Tallin.
- 7 汪守宏、黄建平、丑纪范, 1989, 大尺度大气运动方程组解的一些性质——定常外源强迫下的非线性适应, 中国科学 (B 辑), 第 3 期, 328~336.
- 8 Wang Shouhong (汪守宏), 1992, On the 2D model of large scale atmospheric motion well-posedness and attractor, *Nonlinear Anal. TMA*, 18(1), 17~60.
- 9 Lions, J. L., R. Teman and Wang Shouhong, 1992, New formulation of the primitive equations for the atmosphere and applications, *Nonlinearity*, 5, 237~288.
- 10 Lions, J. L., R. Teman and Wang Shouhong, 1993, Models of the coupled atmosphere and ocean (CAO I), in:

Computational Mathematics Advance (J. Oden, eds.), Vol.1, Elsevier, Amsterdam.

- 11 Lions, J.L., R. Teman and Wang Shouhong, 1993, Numerical analysis of the coupled atmosphere and ocean model (CAO II), in: *Computational Mathematics Advance* (J. Oden, eds.), Vol.1, Elsevier, Amsterdam.
- 12 Lions J.L., R. Teman, and S. Wang, 1993: Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean model (CAO III), The Institute for Applied Mathematics and Scientific Computing, Indiana University Bloomington, Preprint.

A Mathematic Model of Climate Dynamics Suitable for Modern Mathematical Analysis

Zeng Qingcun

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract With elimination of some approximations or assumptions which exist in the past mathematic models of weather and climate dynamics for mathematical analyses, a new mathematic model for modern mathematical analyses is developed in this paper. This model is closer to those which are applied to the practical predictions of weather and climate. (a) Its top is selected at $p(\text{pressure})=0$ rather than $p>0$; (b) the model includes an explicit prediction of surface pressure with horizontal smoothing operator (representing the turbulent diffusion of density), and eliminates the approximation of vertically integrated nondivergence; and (c) the heating is caused by internal sources depending on the atmospheric motion rather than by an external one, and the internal heating function due to the phase change of water vapor is approximated by some properly analytical functions suitable for mathematical analyses. The correspondent boundary and initial conditions are also proposed. This paper is to prove the existence of solution to the problem (equations plus boundary and initial conditions). The general structure and long-term behaviors of the model are to be investigated in the next step.

Key words atmospheric dynamics climate dynamics boundary condition existence of solution