

低层不稳定大气边界层中的地形阻力^{*}

刘辉志

洪钟祥

桑建国

(中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和
大气化学国家重点实验室, 北京 100029)

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

摘 要 采用两层大气模式, 通过求解线性化大气动力学—热力学方程组, 得到在上层稳定层结覆盖的不稳定大气边界层中, 简单三维地形引起的地形波及其波动阻力的解析表达式。讨论了地形及大气条件对地形波及波动阻力的影响。结果表明: 即使在大气低层为不稳定边界层时, 三维地形引起的波动在大气动量平衡中仍可起明显作用。

关键词 波动阻力 地形波 不稳定大气边界层

1 引言

地形波引起的动量输送, 在全球大气动量平衡中起重要作用, 这已为一系列大气波动研究所证实^[1,2], 并以参数化的形式出现在大气环流模式中。稳定层结的大气流经二维山脊或三维理想地形产生的地形波及其波动阻力, 已有很普遍的理论研究工作^[3,4], 并已建立了一些简单的参数化方案。以往理论研究工作基本上全都是假定整层大气的 Scorer 参数 $(N/\bar{u})$, 其中 $N = [(g/\bar{\theta})\partial\bar{\theta}/\partial z]^{1/2}$ 为浮力频率, $\bar{u}$ 为平均风速) 不变, 即 $\bar{u}$ 和 N 均与 z 无关, 未考虑大气条件的垂直变化。当低层大气为中性或不稳定时, 地形对气流的作用, 传统上只考虑地形迎风坡和背风坡气压差造成的阻力, 即形式阻力。如果地形高度已接近上部稳定层结, 地形引起的垂直扰动会在稳定层结中造成上冲, 并在稳定层结中激发出波动, 波动造成的流场反过来也影响低层气流, 引起动量输送。上层稳定层结覆盖的低层不稳定边界层中, 地形波引起的波动阻力尚未引起人们的注意。桑建国等^[5]曾求出二维山脊在不稳定边界层中波动阻力的解析表达式, 分析表明此时波动仍可能在大气动量平衡中起明显作用。地球上地形基本上全是三维的, 大多数时候采用二维近似, 并不能完全反映真实地形。

本文首先通过求解大气波动方程, 得出简单三维地形在二维大气模式中大气波动的解析表达式; 讨论了地形及大气条件对地形波的影响; 最后计算了低层不稳定边界层中近地表处的波动阻力, 并与上、下均是稳定层结情况进行比较。指出在不稳定边界层中近地表处波动阻力仍不可忽略, 在大气环流模式或大尺度天气预报模式中应予以考虑。

2 三维大气波动方程

考虑三维定常、绝热、不可压和线性化大气动力—热力学方程组, 其中 x 轴取平

1997-06-02 收到, 1997-07-02 收到修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

均风方向, 则

$$\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} = -\bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} = -\bar{\theta} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\theta}{\bar{\theta}} g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0, \quad (5)$$

其中 u 、 v 、 w 、 θ 和 π 分别为风速分量、位温及 Exner 函数的扰动值; $\bar{u}$ 和 $\bar{\theta}(z)$ 分别为平均风速和平均位温。方程组同时忽略了科里奥利力及粘性项, 对于中尺度地形 (地形起伏宽度为 5~50 km), 忽略科里奥利力影响不大。

在水平波数空间中, 上述扰动量可表示成

$$(u, v, w, \theta, \pi) = [\tilde{u}(z), \tilde{v}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{\pi}(z)] \exp(ikx + ily), \quad (6)$$

其中带波纹号的量表示波数空间中的 Fourier 分量, k 和 l 分别为 x 和 y 方向上波数。将(6)式代入(1)~(5)式, 得到方程

$$\bar{u} k \tilde{u} = -\bar{\theta} k \tilde{\pi}, \quad (7)$$

$$\bar{u} k \tilde{v} = -\bar{\theta} l \tilde{\pi}, \quad (8)$$

$$i \bar{u} k \tilde{w} = -\bar{\theta} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial z} + \frac{\tilde{\theta}}{\bar{\theta}} g, \quad (9)$$

$$ik \tilde{u} + il \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$i \bar{u} k \tilde{\theta} + \tilde{w} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0. \quad (11)$$

由(7)~(11)式可得到垂直速度波数分量 $\tilde{w}$ 的分量方程为

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\bar{u}^2} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} - k^2 \right) \frac{k^2 + l^2}{k^2} \tilde{w} = 0. \quad (12)$$

为了解方便, 我们把垂直速度转换为流线的垂直扰动 ξ 。垂直速度 w 和 ξ 的关系为

$$w = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

在定常状态下, 略去二阶小量, 可得到线性化的关系式为 $w = \bar{u} \partial \xi / \partial x$ 或 $\xi = \int (w / \bar{u}) dx$ 。

类似于 (6) 式, ξ 可表示成 $\xi = \tilde{\xi} \exp(ikx + ily)$, 于是有 $\tilde{w} = ik \bar{u} \tilde{\xi}$, 并得到 $\tilde{\xi}$ 的方程为

$$\tilde{\xi}'' + \left(\frac{1}{\bar{u}^2} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} - k^2 \right) \tilde{\xi} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\bar{u}^2} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} - k^2 \right) \frac{k^2 + l^2}{k^2} \xi = 0. \quad (13)$$

在导出 (13) 式时, 略去了含 $\partial \bar{u} / \partial z$ 的项。

3 波动方程的求解

假设大气由上下两层构成, 下层为不稳定边界层, 上层为稳定层。两层的界面处, 位温有跃升, 造成两侧的密度差为

$$\frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}} = \frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}}. \quad (14)$$

在下层不稳定边界层中, $d\bar{\theta}_1 / dz < 0$, 设 $\left(-\frac{1}{\bar{u}_1^2} \frac{g}{\bar{\theta}_1} \frac{d\bar{\theta}_1}{dz} \right)^{1/2} = n, n > 0$ 。上层稳定大气 Scorer 参数 $\left(-\frac{1}{\bar{u}_2^2} \frac{g}{\bar{\theta}_2} \frac{d\bar{\theta}_2}{dz} \right)^{1/2} = m$, 两层界面处 $z=0$ 。

(13) 式在上下两层分别为

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} - (n^2 + k^2) \frac{k^2 + l^2}{k^2} \xi_1 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} + (m^2 - k^2) \frac{k^2 + l^2}{k^2} \xi_2 = 0, \quad (16)$$

方程 (15) 和 (16) 的解分别为

$$\xi_1 = A \operatorname{ch}(\lambda z) + B \operatorname{sh}(\lambda z), \quad (17)$$

$$\xi_2 = \begin{cases} C e^{i v z}, & k < m \\ C e^{-\mu z}, & k > m \end{cases} \quad (18)$$

其中 $\lambda = \sqrt{(n^2 + k^2) \frac{k^2 + l^2}{k^2}}$, $v = \sqrt{(m^2 - k^2) \frac{k^2 + l^2}{k^2}}$ 和 $\mu = \sqrt{(k^2 - m^2) \frac{k^2 + l^2}{k^2}}$ 。

解(17)和(18)式的系数 A 、 B 和 C 可通过边界条件和分界面条件确定。

第一界面条件设为界面两侧流线扰动连续, 即在 $z=0$ 处有

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{或} \quad \xi_1 = \xi_2. \quad (19)$$

第二界面条件由界面两侧气压连续假定得出, 根据 Bernoulli 定理, 在界面两侧分别为

$$\frac{P_0}{\rho_1} + \frac{1}{2} \bar{u}_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} [(\bar{u}_1 + u_1)^2 + v_1^2 + w_1^2] + g \xi_1,$$

$$\frac{P_0}{\rho_2} + \frac{1}{2} \bar{u}_2^2 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} [(\bar{u}_2 + u_2)^2 + v_2^2 + w_2^2] + g \xi_2,$$

其中 ξ 方程左端表示上游无穷远处的无扰动状态, 右端表示受扰动后的状态。根据气压连续条件 $P_1 = P_2$, 得

$$\bar{u}_1 u_1 = g \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \xi_1 + \bar{u}_2 u_2 \quad \text{或} \quad \bar{u}_1 \tilde{u}_1 = g \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \tilde{\xi}_1 + \bar{u}_2 \tilde{u}_2. \quad (20)$$

其中略去二阶小量 u^2 、 v^2 和 w^2 。

把 $\tilde{u} = i \frac{k}{k^2 + l^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}$, $\tilde{w} = ik \tilde{u} \tilde{\xi}$ 代入 (20) 式可得

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_1}{\partial z} = \frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma \tilde{\xi}_1 + \frac{\partial \tilde{\xi}_2}{\partial z}, \quad (21)$$

其中 $\gamma = \frac{g}{\bar{u}_1^2} \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} = \frac{g}{\bar{u}_1^2} \frac{\Delta \theta}{\theta}$, 表示界面两侧密度差 (或位温跃升) 的参数。

下边界条件设在 $z = -h$ 处, 其中 h 为下层不稳定边界层的厚度。设地表的地形为一中心位于坐标原点的孤立山丘, 地形廓线为

$$H - \frac{a^2}{x^2 + a^2} - \frac{b^2}{y^2 + b^2},$$

其中 H 为山顶高度, a 和 b 分别为山丘在 x 和 y 方向上的半宽度。设地表面流线扰动完全沿地形表面, 即

$$\xi(x, y, -h) = H \frac{a^2}{x^2 + a^2} \frac{b^2}{y^2 + b^2}. \quad (22)$$

展开成 Fourier 分量形式:

$$\tilde{\xi}(k, l, -h) = \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-bl} \quad 0 < k < \infty, \quad -\infty < l < \infty. \quad (23)$$

其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \xi(x, y, -h) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{\xi}(k, l, -h) e^{i(kx + ly)} dl dk, \\ \tilde{\xi}(k, l, -h) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \xi(x, y, -h) e^{-i(kx + ly)} dx dy. \end{aligned}$$

(23) 式即为地表面 $z = -h$ 处的边界条件。

利用 (19)、(21) 和 (23) 式可确定 (17) 和 (18) 式中的 A 、 B 和 C , 得到 ξ_1 的低波数分量为

$$\tilde{\xi}_{1l} = \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-bl} \frac{\lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma + i\nu \right) \operatorname{sh}(\lambda z)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda h) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma + i\nu \right) \operatorname{sh}(\lambda h)}, \quad \text{当 } k < m \quad (24)$$

ξ_1 的高波数分量为

$$\tilde{\xi}_{1h} = \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-bl} \frac{\lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \operatorname{sh}(\lambda z)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda h) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \operatorname{sh}(\lambda h)}. \quad \text{当 } k > m \quad (25)$$

ξ_1 应为各分量的 Fourier 积分

$$\xi_1 = \int_0^m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_{1l} e^{ily} e^{ikx} dl dk + \int_m^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_{1h} e^{ily} e^{ikx} dl dk. \quad (26)$$

根据山岳波理论^[7], (26) 式中第一积分相当于过山波, 它表示地面扰动源引起的波动向大气上界传播, 称为非拦截波。第二个积分相当于背风波, 由于波动能量被限制在低层, 扰动只能向下游传播, 出现在地形背风坡方向, 称为拦截背风波。

4 不稳定边界层中的非拦截波

地形扰动的低波数 ($k < m$) 分量为

$$\tilde{\xi}_{1l} = \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{\lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma + iv \right) \operatorname{sh}(\lambda z)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda h) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma + iv \right) \operatorname{sh}(\lambda h)}, \quad k < m \quad (27)$$

如果地形在顺风向有足够宽度, 使得 $U/N < a$, 在此条件下地形产生的扰动具有足够大的空间尺度, 使得扰动波数 K 足够小。在 (27) 式中被积函数 $\tilde{\xi}_{1l}$ 包含有因子 e^{-ak} , 其对积分的贡献主要来自于接近 $k=0$ 的扰动分量, 因此 λ 和 v 表达式括号中的 k 相对于 m 、 n 充分小, 可忽略, 即 $\lambda \approx \sqrt{n^2(k^2 + l^2)/k^2}$, $v \approx \sqrt{m^2(k^2 + l^2)/k^2}$, 并且对 k 的积分上限, 由 m 延伸到 ∞ , 不会对积分产生大的影响。在实际大气中若取 $U = 10 \text{ m s}^{-1}$, $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$, 则 $a = 5 \text{ km}$ 即满足 $U/N < a$ 条件; 当然 a 还需足够小 ($a < 50 \text{ km}$), 满足 $a \ll U/f$, 以排除科里奥利力的影响。

为了计算方便, 把 (27) 式积分变换到极坐标中, 在物理空间取

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan(y/x),$$

在波数空间取

$$\kappa = (k^2 + l^2)^{1/2}, \quad \psi = \arctan(l/k).$$

准静力假定下,

$$\lambda \approx \sqrt{n^2(k^2 + l^2)/k^2} = n / \cos\psi, \quad v \approx \sqrt{m^2(k^2 + l^2)/k^2} = m / \cos\psi,$$

(27) 式可变为

$$\tilde{\xi}_{1l} = \frac{1}{2} H a b e^{-a\kappa \cos\psi} e^{-b\kappa \sin\psi} \frac{n \operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right)}{n \operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)}, \quad (28)$$

$$\xi_{1l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \tilde{\xi}_{1l} e^{i\kappa \cos(\theta-\psi)} \kappa d\kappa d\psi,$$

$$\xi_{1l} = \frac{1}{2} H a b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{n \operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right)}{n \operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} d\psi.$$

$$\times \frac{d\psi}{[a\cos\psi + b|\sin\psi| - i r \cos(\theta - \psi)]^2} \quad (29)$$

同样可求得

$$\begin{aligned} \xi_{2l} = & \frac{1}{2} Hab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ne^{i(m + \cos\psi)z}}{n \operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} \\ & \times \frac{d\psi}{[a\cos\psi + b|\sin\psi| - i r \cos(\theta - \psi)]^2} \quad (30) \end{aligned}$$

下面通过实例计算, 讨论非拦截波的特征。

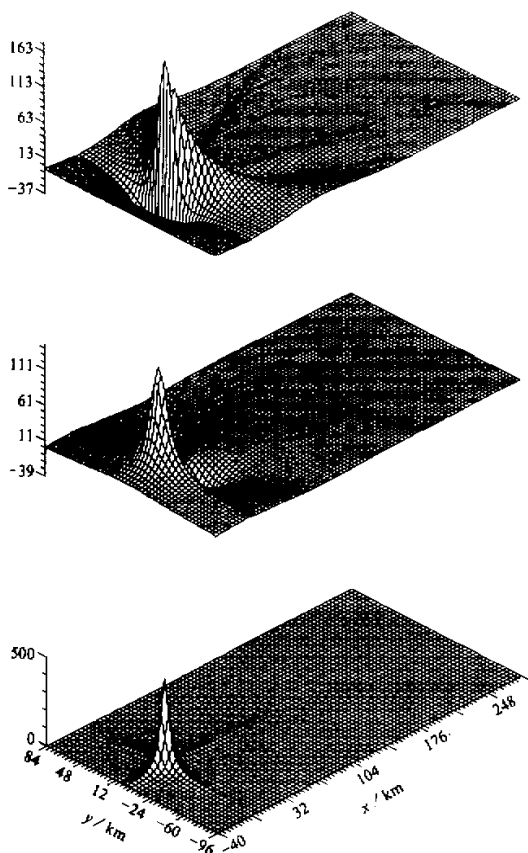


图1 非拦截波中流线垂直位移的分布

地形和大气条件为: $a = b = 5 \text{ km}$, $H = 500 \text{ m}$, $h = 1000 \text{ m}$,
 $m = 0.0007 \text{ m}^{-1}$, $n = 0.0005 \text{ m}^{-1}$, $\gamma = 0.001$

下图: 地形起伏; 中图: $z = 0$ 即界面处的波形;

上图: $z = 4000 \text{ m}$ 即离地面 5000 m 高度处的波形

例1 取地形参数为 $a = b = 5 \text{ km}$, 山高 $H = 500 \text{ m}$, $h = 1000 \text{ m}$; 下层大气温度层结 $\partial\bar{\theta}_1 / \partial z = -0.1 \text{ K} / 100 \text{ m}$, $\bar{u}_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$; 上层大气温度层结 $\partial\bar{\theta}_2 / \partial z = 0.35 \text{ K} / 100 \text{ m}$, $\bar{u}_2 = 16 \text{ m s}^{-1}$; 顶部温度跃变 $\Delta\theta = 3 \text{ K}$, 可得到控制参数 $m = 0.0007 \text{ m}^{-1}$, $n = 0.0005 \text{ m}^{-1}$, $\gamma = 0.001$ 。图1为按例1得到的在界面附近, 即 $z = 0 \text{ m}$ 处和在 $z = 4000 \text{ m}$, 即离地面 5000 m 高度附近流线垂直扰动的分布。图的最下层为地形起伏。由此图可看出, 非拦截波的最大扰动出现在山峰附近。在 $z = 0 \text{ m}$ 附近最大抬升在迎风坡, 最大下沉出现在背风坡, 其数值分别为 147 m 和 -239 m 。桑建国^[6]曾得出上、下两层均是稳定层结情形下非拦截波解析表达式, 与之不同的是低层为不稳定边界层时, 非拦截波未呈现内船舶波的特征。

图2显示了非拦截波在离地面 5000 m 高度处的波动图像, 它反映了非拦截波随高度的变化。和低层的波动相比, 最大上升区移到背风坡, 振幅略有增

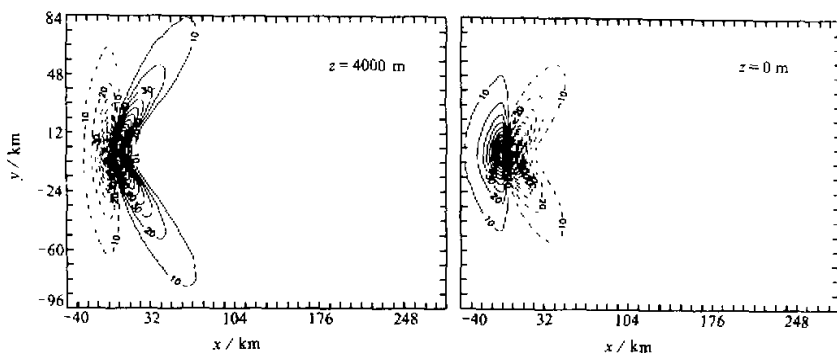


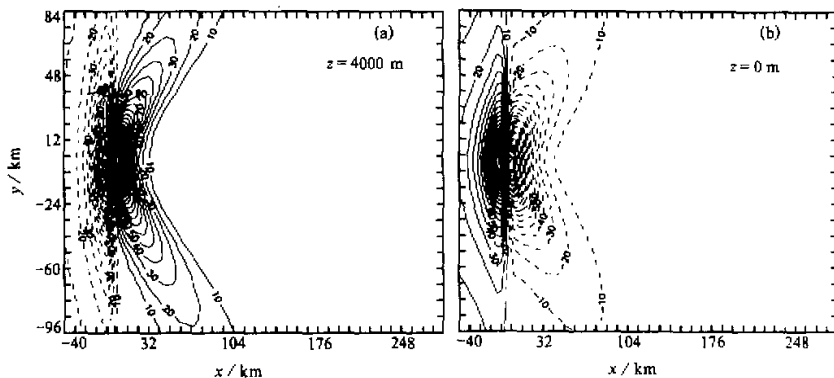
图2 流线垂直扰动等值线分布图

实线表示上升, 虚线表示下沉

加, 同时高空背风坡流线扰动分布呈 U 形, 这与文献[8]的线性理论结果一致。由此可见, 如果上层大气结构没有明显变化, 例如出现临界层, 非拦截波可能影响到对流层中上层, 以及平流层和中层。

例 2 和例 3 在大气条件上和例 1 相同, 但地形参数不同, 用以讨论地形在横风方向或顺风方向上延伸对地形波形的影响。例 2 中取 $a=5\text{ km}$, $b=15\text{ km}$, 与例 1 地形的差别是, 地形起伏在横风向上展宽, 更接近于二维山脊, 其垂直流线扰动如图 3 所示。可以看出波动振幅比例 1 大, 离地面 5000 m 高空背风坡流线扰动仍呈 U 形分布, 与例 1 相似; 例 3 取 $a=15\text{ km}$, $b=5\text{ km}$, 它表示一个顺风排列的山脊所形成的波, 其垂直流线扰动如图 4 所示。除振幅变小外, 波形与例 1 相似。由此可见, 横风排列的山脊, 在山体附近引起的垂直运动要比顺风排列的山脊大得多, 这与上下均是稳定层结情况下一致。改变地形参数 a 和 b , 除振幅外, 非拦截波波形基本一致。

下面在例 4、例 5 和例 6 中讨论上、下层大气条件对非拦截波的影响。在此三例中地形条件取成和例 1 一样。在例 4 中, 上层稳定度增大, m 由 0.0007 m^{-1} 增大至 0.001 m^{-1} , 其他参数和例 1 相同。在例 5 中, $\gamma=0.0003$, 其余参数和例 1 相同, 流线垂直扰

图3 与图2相同, 流线垂直扰动等值线分布图, 但地形参数不同, $a=5\text{ km}$, $b=15\text{ km}$

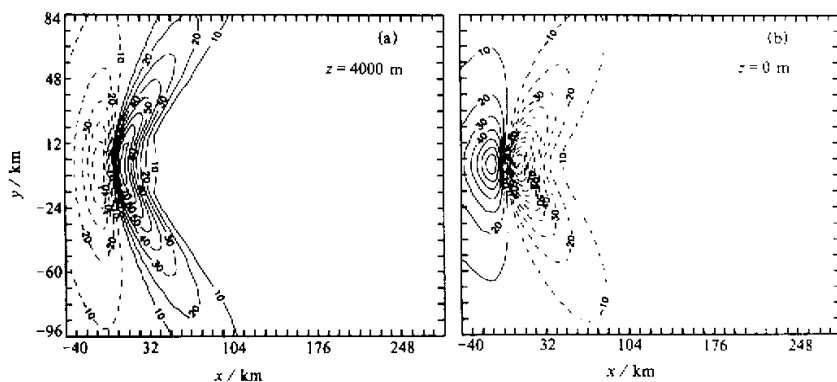


图4 与图2相同, 流线垂直扰动等值线分布图, 但地形参数不同, $a=15$ km, $b=5$ km

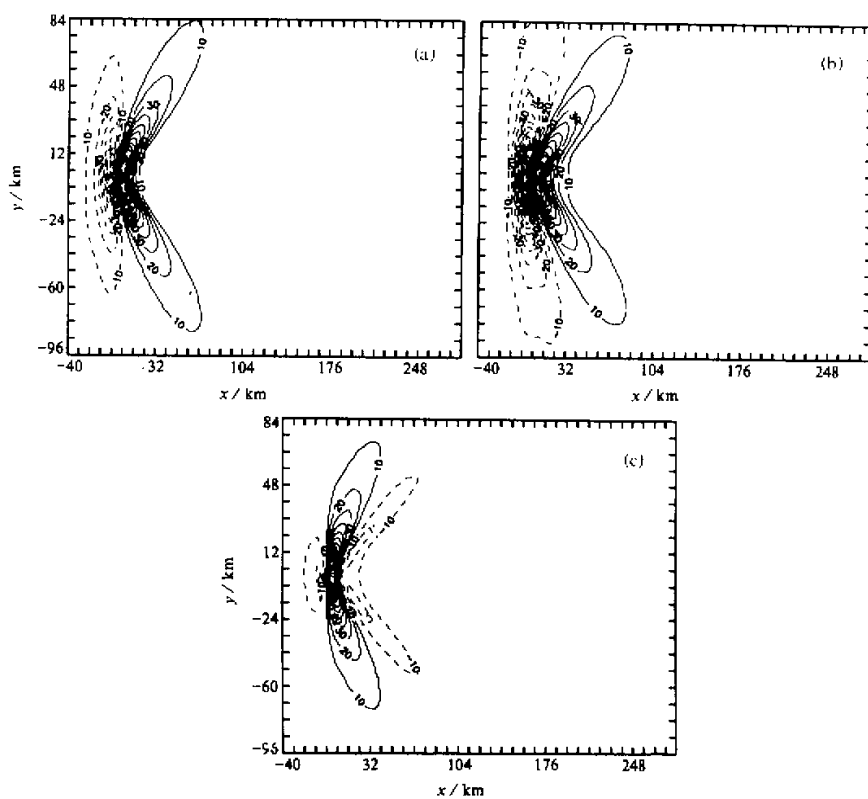


图5 与图2相同, $z=4000$ m, 即离地面 5000 m 处, 流线垂直扰动等值线分布图

(a) $n=0.0003$ m^{-1} , 其余与例 1 一样; (b) $\gamma=0.0003$, 其余与例 1 一样;

(c) $m=0.001$ m^{-1} , 其余与例 1 一样

动分布见图 5。在例 6 中, 下层不稳定层中 n 减至 0.0003 m^{-1} , 其流线垂直扰动分布也显示在图 5 中。由图 5 可以看出, 当上层稳定度增大, 高空 (5000 m) 背风坡出现下沉区, 其余情形下未出现。同时 γ 变化对振幅及波形影响很小。随 m 增大, 振幅略有减小, 楔角变小; n 发生变化, 振幅和楔角变化都很小。

通过例 1~例 6 的流线垂直扰动分布图像比较, 可以发现, 低层为不稳定层时, 简单三维地形在上层稳定层结中引起的非拦截波, 地形条件的变化对其波形影响不大, 仅影响波动的振幅。大气条件中上层稳定层结 Scorer 参数 m 的变化, 对非拦截波振幅和波形均有影响, 而下层不稳定层结大气参数 n 及 γ 的改变, 对非拦截波振幅及波形影响较小。

5 不稳定边界层中的拦截背风波

地形扰动的高波数分量 ($k > m$) 的表达式为

$$\xi_{1h} = \int_m^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2} H a b e^{-ak} e^{-b|l|} \frac{\lambda \text{ch}(\lambda z) + \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda z)}{\lambda \text{ch}(\lambda z) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda h)} e^{il y} e^{ik x} dl dk. \quad (31)$$

当被积函数的分母为零, 即

$$\lambda \text{ch}(\lambda h) = \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda h), \quad (32)$$

被积函数出现奇点。对应于每个大于 m 的 k 值, 都可通过 (32) 式找到对应的 l 值, (32) 式称为波数选择关系。

根据留数定理可得

$$\begin{aligned} \xi_{1h} = \text{Re} \int_m^\infty (\pi i) H a b e^{-ak} e^{-b|l|} & \frac{\lambda \text{ch}(\lambda z) + \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda z)}{\frac{\partial}{\partial l} \left[\lambda \text{ch}(\lambda h) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda h) \right]_{l=l^*}} \\ & \times e^{il^* y} e^{ik x} dk, \end{aligned} \quad (33)$$

其中 l^* 为与 k 对应的满足 (32) 式的 l 值, 并注意到 l 有正负两个值, (33) 式进一步可写成

$$\xi_{1h} = \pi H a b e^{-b|l|} \int_m^\infty e^{-ak^*} \frac{\lambda^*}{G(k^*, l^*)} \frac{\text{sh}[\lambda^* (h+z)]}{\text{sh}(\lambda^* h)} \sin(k^* x + l^* y) dk^*, \quad (34)$$

其中

$$G(k^*, l^*) = \frac{\partial}{\partial l} \left[\lambda \text{ch}(\lambda h) - \left(\frac{k^2 + l^2}{k^2} \gamma - \mu \right) \text{sh}(\lambda h) \right]_{l=l^*},$$

$k = k^*$ 、 $l = l^*$ 为满足 (32) 式的波数对;

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^{*2}} (k^{*2} + n^2)},$$

$$\mu^* = \sqrt{\frac{k^{*2} + l^{*2}}{k^{*2}} (k^{*2} - m^2)}.$$

根据 $\tilde{w} = ik\tilde{u}\tilde{\xi}$ 及 $\tilde{u} = -[k^2 / (k^2 + l^2)]\tilde{u}(\partial\tilde{\xi} / \partial z)$ 可得到

$$w_1 = -\pi H a b e^{-b/l} \int_m^\infty e^{-ak} \bar{u}_1 k \frac{\lambda}{G(k, l)} \frac{\text{sh}[\lambda(h+z)]}{\text{sh}(\lambda h)} \cos(kx + ly) dk, \quad (35)$$

$$u_1 = \pi H a b e^{-b/l} \int_m^\infty e^{-ak} \bar{u}_1 k \frac{\lambda}{G(k, l)} \frac{\text{sh}[\lambda(h+z)]}{\text{sh}(\lambda h)} \sin(kx + ly) dk, \quad (36)$$

其中星号已省去。

同样可得到上部稳定层中的 ξ_{2h}, w_2, u_2 , 例如 ξ_{2h} 为

$$\xi_{2h} = \pi H a b e^{-b/l} \int_m^\infty e^{-ak^*} \frac{\lambda^*}{G(k^*, l^*)} e^{-\mu^* z} \sin(k^* x + l^* y) dk. \quad (37)$$

由 (37) 式可发现扰动振幅随高度以 $e^{-\mu^* z}$ 衰减。

下面讨论界面 $z=0$ 处拦截背风波的特征。在例 7 中, 取地形参数与例 1 相同, 上层大气参数 $m=0.0007 \text{ m}^{-1}$, 下层大气 $n=0.001 \text{ m}^{-1}$, $\gamma=0.001$, $\bar{u}_1=10 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{u}_2=16 \text{ m s}^{-1}$ 。得到的拦截背风波如图 6 所示。它的波形显示波动以山峰为源点, 在背风坡以一定角度向下风向辐散, 扰动幅度无显著变化。

从原点至下游 60 km 距离内约有 7 个波列, 表示 x 方向上波长约为 8.6 km, 平均波数为 $\bar{k}=0.00073 \text{ m}^{-1}$ 。 x 方向截断波数 $k_c = m=0.0007 \text{ m}^{-1}$, 这和图上显示出的平均波数 $\bar{k}$ 相近。

在横风方向上 $l_c=0.0005 \text{ m}^{-1}$, 40 km 距离内约有 3 个波列, y 方向平均波数为 $\bar{k}=0.00047 \text{ m}^{-1}$, 与 l_c 相近。楔角 $\alpha = \arctan(k/l)$, 根据截断波数, 可求得 α 约为 54° 。

例 8 中地形和大气条件与例 7 相同, 只是上层风速增大 $\bar{u}_2=20 \text{ m s}^{-1}$, 此时 $m=0.0005 \text{ m}^{-1}$, 得到的波形也显示在图 6 中。在顺风方向只有 5 个波, 这是由于 $k_c=m$, m 变小, 波长增大的缘故。横风向截断波数 $l_c=0.0003 \text{ m}^{-1}$, 横风向波长增大。楔角增大, 此时 α 约为 71° 。

例 9 中地形和大气条件与例 8 相同, 只是下层 n 由 0.001 变成 0.0013 m^{-1} , γ 不变。其波动图形也显示在图 6 中。在顺风方向仍有 5 个波列, 横风向与例 7 波长一样, 此时 l_c 等于 0.0005 m^{-1} ; 楔角变小, α 约为 45° 。

在以上三例中, 例 8 中波动振幅最大, 例 7 最小。上述讨论反映了上下层大气条件, 对拦截背风波的波形和振幅都有显著的影响。

例 10 和例 11 用以讨论背风波中地形因素的作用, 这两例的大气条件和例 8 一致。例 10 中地形参数取为 $a=15 \text{ km}$ 和 $b=5 \text{ km}$, 表示一个顺风走向的山脊。而例 11 中, $a=5 \text{ km}$, $b=15 \text{ km}$, 表示山脊横风向排列。此两例的波动图像显示在图 7 中。此图与图 6 中例 8 比较, 可以看出这三例中尽管地形形状和排列不同, 但它们激发出背风波波形都大致相同。这主要是由相同的大气条件参数 m, n, γ 和 h 决定。这三例中波数构成

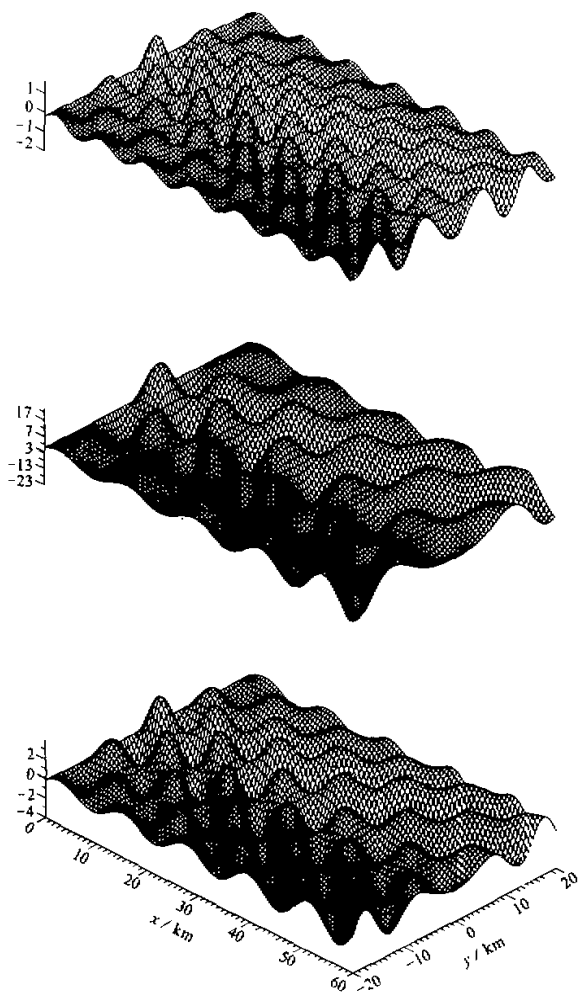


图6 拦截背风波流线垂直位移的分布

地形参数 $a = b = 5 \text{ km}$, $H = 500 \text{ m}$, $h = 1000 \text{ m}$

上图: 例7, $m = 0.0007 \text{ m}^{-1}$, $n = 0.001 \text{ m}^{-1}$, $\gamma = 0.001$; 中图: 例8, $m = 0.0005 \text{ m}^{-1}$, $n = 0.001 \text{ m}^{-1}$, $\gamma = 0.001$; 下图: 例9, $m = 0.0005 \text{ m}^{-1}$, $n = 0.0013 \text{ m}^{-1}$, $\gamma = 0.001$

中的截断波数(k_c, l_c)都相同, 这确定了它们具有类似的波形。但由于 $e^{-ak}e^{-bl}$ 中, a 和 b 各自不同, 因而造成振幅的不同。

γ 对拦截背风波影响很大, 当 γ 取 0.0003 时, 此时对产生背风波条件不利, 无背风波产生。 γ 增大至 0.0015, 其余参数取与例 8 相同, 可以发现此条件对产生背风波也不利。 γ 取 0.0006 时, 其余与例 8 相同, 通过波动图像比较可以看出, 振幅变小, 楔角变小, α 约为 32° 。 γ 也是影响拦截背风波振幅及波形的重要参数。

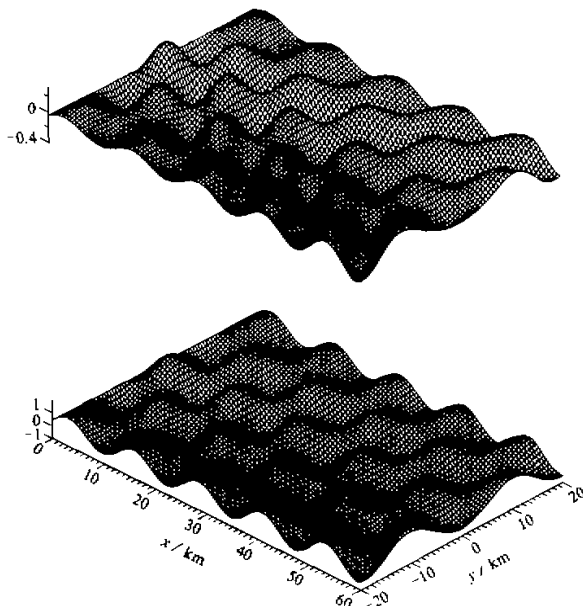


图7 与图6相同, 大气条件为 $m=0.0005 \text{ m}^{-1}$, $n=0.001 \text{ m}^{-1}$, $h=1000 \text{ m}$, $\gamma=0.001$, $H=500 \text{ m}$
 上图: 例10, 地形参数 $a=15 \text{ km}$, $b=5 \text{ km}$; 下图: 例11, 地形参数 $a=5 \text{ km}$, $b=15 \text{ km}$

6 波动阻力

地形波流场扰动 (u, v, w) 引起大气动量向地表的输送, 已经被证明具有量级接近或超过通常意义上的湍流动量通量。因此这个作用在大气动量平衡中是不容忽略的。地形波动引起大动量的减少, 这个效应称为波动阻力。在大气环流模式或大尺度天气预报模式中, 前面提到的中尺度地形 ($5 \sim 50 \text{ km}$) 都是次网格的, 它们引起的波动阻力只能采用参数化的方法。例如 Miller^[9]给出的表达式 $D = \rho_0 k \sigma_h^2 \bar{u}^2 (N / \bar{u})$, 其中 σ_h^2 为地形高度方差, 常数 $k = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ 。由于地形尺度、高度和形状上的多样和大气条件的复杂, 这些参数化方法可能只适用于一定地形和大气条件。为了在大气环流模式中正确计算大气地表间的波动动量通量, 从地形波的理论模式分析入手应是得出更有物理观念的参数化方法的基础。

波动在近地面处引发的动量通量可表示为 $D = -\rho_0 \overline{uw}|_{z=-h} = -\rho_0 \overline{u_s w_s}$, 其中 u_s 和 w_s 为近地面处波动引起的扰动速度分量。对于拦截波近地面处的垂直速度为零, 因此对这部分扰动 $D=0$ 。在其他高度上, u 和 w 的位相永远相差 $\pi/2$ 。在一个周期内, uw 的平均值为零, 说明拦截背风波对动量的垂直传输不产生直接影响。

波动阻力主要来自于非拦截波, 根据 $\tilde{u} = -[k^2 / (k^2 + l^2)] \tilde{u} (\partial \tilde{\zeta} / \partial x)$, $\tilde{w} = ik \tilde{u} \tilde{\zeta}$, 利用 (29) 式可得到非拦截波引起的扰动速度分量分别为

$$u_1 = -\frac{1}{2}Hab\bar{u}_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-a\kappa\cos\psi - h\kappa|\sin\psi|} \times \frac{n^2 \operatorname{sh}\left(\frac{hz}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)n\operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right)}{n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} \cdot \cos\psi \cdot e^{i\gamma\kappa\cos(\theta-\psi)} \kappa d\kappa d\psi, \quad (38)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}Hab\bar{u}_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty i\kappa\cos\psi e^{-a\kappa\cos\psi - b\kappa|\sin\psi|} \times \frac{n\operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right)}{n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} \cdot e^{i\gamma\kappa\cos(\theta-\psi)} \kappa d\kappa d\psi. \quad (39)$$

波动引起的总动量通量为

$$D_{\text{total}} = -\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 w_1 dx dy.$$

利用 Fourier 积分中的 Parseval 定理可得出

$$D_{\text{total}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \rho_0 H^2 a^2 b^2 \bar{u}_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-2a\kappa\cos\psi - 2b\kappa|\sin\psi|} [A] \cos^2\psi \kappa^2 d\kappa d\psi, \quad (40)$$

其中 $[A]$ 为

$$[A] = \frac{\left[n^2 \operatorname{sh}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) + n\left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) \right] n\operatorname{ch}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nz}{\cos\psi}\right)}{\left[n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) \right]^2}.$$

在地表处, $z = -h$, 此时 $[A]$ 为

$$[A] = i \frac{-n^2 \operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) + \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)}{n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi} + im\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)}.$$

在地表处总的动量通量为

$$D_{\text{total}} = \frac{\pi^2}{4} \rho_0 H^2 a^2 b^2 \bar{u}_1^2 mn^2 \times \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left[n\operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) \right]^2 + m^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} \frac{\cos^2\psi}{(a\cos\psi + b\sin\psi)^3} d\psi. \quad (41)$$

下面求以山峰为中心, 边长为 $4a \times 4b$ 的矩形区域内通量的平均值。在这个区域边界上, 地形高度都已降到山峰高度 H 的 $1/5$ 以下。

$$\bar{D}|_{4a \times 4b} = \frac{\pi^2}{64} \rho_0 H^2 a^2 b^2 \bar{u}_1^2 mn^2$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left[n \operatorname{ch}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) - \left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) \right]^2 + m^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)} \frac{\cos^2\psi}{(a\cos\psi + b\sin\psi)^3} d\psi. \quad (42)$$

下面通过实例计算上层稳定层结覆盖不稳定边界层中近地表处的波动阻力。取例 1 中的地形参数和大气条件, 即 $H=500$ m, $a=b=5$ km, $h=1000$ m, $\bar{u}_1=10$ m s⁻¹, $m=0.0007$ m⁻¹, $n=0.0005$ m⁻¹, $\gamma=0.001$ 。令 $\bar{D}=\rho C_d \bar{u}_1^2$, 则 $C_d=6.08 \times 10^{-3}$; 与例 2 和例 3 一样, 改变地形参数 a 和 b , 取 $a=5$ km 和 $b=15$ km, 此时 $C_d=6.28 \times 10^{-3}$;

取 $a=15$ km 和 $b=5$ km, $C_d=1.09 \times 10^{-3}$ 。由此可见, 横风走向的山脊, 比孤立山峰, 特别是比顺风走向的山峰造成更大的波阻。

地形条件不变, 取与例 1 一样。改变大气条件, 讨论波阻与大气条件的关系。图 8 给出了 m , n 和 γ 对 C_d 的影响, 可以看出近地表处波动阻力随 m 的增大而减小, 但并非线性的。波动阻力随 n 的增大也减小, 但减小的较缓慢, 也是非线性的。 γ 对波动阻力影响较复杂。平均风速 $\bar{u}$ 是个较复杂的因子, 风速 $\bar{u}$ 的变化将导致 n 及 γ 的变化, 同时间接地影响到 m , 因此, C_d 与 $\bar{u}$ 之间的实际关系, 不单纯是显函数形式。

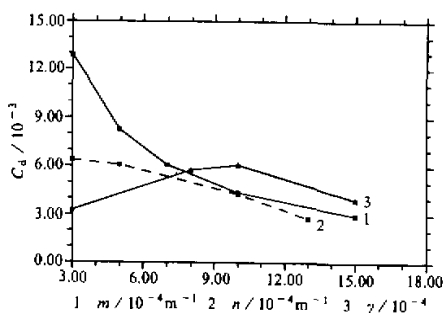


图 8 平均波动阻力随大气条件 m 、 n 及 γ 的变化
地形参数为 $a=b=5$ km, $h=1000$ m, $H=500$ m;
线 1 表示 $n=0.0005$ m⁻¹, $\gamma=0.001$ 时, 波阻随 m 的变化; 线 2 表示 $m=0.0007$ m⁻¹, $\gamma=0.001$ 时, 波阻随 n 的变化; 线 3 表示 $m=0.0007$ m⁻¹, $n=0.0005$ m⁻¹, 波阻随 γ 的变化

根据桑建国^[6]的研究, 可以得到上、下均是稳定层结情况下近地表处的波动阻力表达式为

$$\begin{aligned} \bar{D}|_{4a \times 4b} = & \frac{\pi^2}{64} \rho_0 H^2 a b \bar{u}_1^2 \beta n^2 m \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\psi}{(a\cos\psi + b\sin\psi)^3} \\ & \times \frac{d\psi}{\beta^2 m^2 \sin^2\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right) + n^2 \cos^2\left(\frac{nh}{\cos\psi}\right)}. \end{aligned} \quad (43)$$

(43) 式和 (42) 式非常相似, 其中 a 、 b 、 H 和 h 与上文表示量一致, $n=[(1/\bar{u}_1^2)(1/\bar{\theta}_1)(d\bar{\theta}_1/dz)]^{1/2}$ 表示下层大气的 Scorer 参数, 具有较大的值; $m=[(1/\bar{u}_2^2)(1/\bar{\theta}_2)(d\bar{\theta}_2/dz)]^{1/2}$ 表示上层大气的 Scorer 参数, 具有较小的值; $\beta=\bar{u}_2^2/\bar{u}_1^2$ 表示两层平均风速的切变。根据实例计算同样可以发现, 此时横风走向的山脊, 比孤立山峰, 特别是顺风走向山峰, 造成更大的波阻。两种情况下, 近地表处波动阻力量级相当。因此不稳定边界层中近地表处波动阻力亦不可忽略, 在大气动量平衡中应予以考虑。

上、下两层均是稳定层结情况下, 近地表处波动阻力随 m 的增大而减小, 随 n 的增大而增大, 但并非线性的。这与低层为不稳定层结情况不一致。

7 小结

本文通过求解波动方程, 得到了在稳定层结覆盖的不稳定边界层中, 简单三维地形在稳定层结中产生的地形波及近地表处波动阻力的解析表达式, 得到以下结论:

(1) 对于稳定层结中的非拦截波, 上层稳定层结大气参数改变, 对其波动的形态有明显的影响, 而地形条件的变化所起的作用相对较小, 仅影响其波动的振幅。

(2) 对于稳定层结中的拦截背风波, 上、下层大气条件 (包括 m 、 n 和 γ) 的改变, 对其波形及振幅均有明显的影响, 地形条件的改变不起主要作用。

(3) 近地表处波动阻力主要来自非拦截波。上、下层 Scorer 参数、位温跃变、山的宽度、走向及山高, 均对波动阻力有影响。在稳定层结覆盖的不稳定边界层中, 近地表处波动阻力具有与传统意义上湍流动量通量相同的量级, 在全球大气动量平衡中不可忽略, 这应引起模式工作者的重视。

参 考 文 献

- 1 Sawyer, J. S., 1962, Gravity waves in the atmosphere as a three-dimensional problem, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **88**, 412~425.
- 2 Lilly, D. K., 1972, Wave momentum flux, a GARP problem, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **20**, 17~23.
- 3 Smith, R. B., 1979, The influence of mountains on the atmosphere, *Adv. in Geophys.*, **21**, 87~230.
- 4 Hines, C. O., 1988, A modeling of atmospheric gravity wave and wave drag generated by isotropic and anisotropic terrain, *J. Atmos. Sci.*, **45**, 309~326.
- 5 桑建国, 刘辉志, 洪钟祥, 1998, 二维地形的地形阻力, *大气科学*, **22**(2), 243~246.
- 6 桑建国, 1997, 大气中的内船舶波, *中国科学D*, **27**(6), 560~565.
- 7 Scorer, R. S. *Environmental aerodynamics*, Ellis Horwood, 1978, Chichester, 488pp.
- 8 Smith, R. B., 1980, Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain, *Tellus*, **32**, 348~364.
- 9 Miller, M. J., T. N. Palmer and R. Swinbank, 1989, Parameterization and influence of subgridscale orography in general circulation and numerical weather prediction models, *Meteor. Atmos. Phys.*, **44**, 84~109.

The Orographic Drag in the Lower Unstable Boundary Layer

Liu Huizhi and Hong Zhongxiang

(Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Sang Jianguo

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract In the present paper an analytical solution of mountain wave and surface wave drag has been obtained which induced by a three-dimensional isolated mountain in a two-layer model with a lower unstable boundary layer and an upper stable layer. The effects of the parameters of the atmosphere and mountain on the mountain wave and surface wave drag have been discussed. The studies show that mountain waves still play significant roles in the momentum budget in the atmosphere even though the lower layer in the atmosphere is unstable.

Key words wave drag mountain wave unstable boundary layer