第23卷 第5期
1999 年 9 月

大 气 科 学
Chinese Journal of Atmospheric Sciences

Vol. 23, No. 5
Sept. 1999

水汽方程弱解的适定性研究及其在数值求解中的应用 *

王必正

（中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029）

摘 要 利用 Hilbert 空间的 Lions 定理，对于在第一类边值问题，证明了水汽方程弱解的存在性和唯一性，并且利用弱解，指出了设计有限元方法的思路。

关键词 弱解 有限元方法

1 引言

就实际地球大气而言，水是唯一的一种以三相形式存在的物质，由于与其三相间的相互转化，以及海陆分布、地形作用和大气大尺度动力运动等，使得实际水汽在时间分布上有时出现不连续现象；有时尽管是连续的，但其经典导数不存在。因此，在数值天气预报或大气环流模式求解水汽方程时，无论是差分模式还是谱模式，目前一般采用半拉格朗日方案计算。但对于存在相变的水汽而言，水汽沿轨迹运动不一定是守恒量。因此这时采用半拉格朗日的方法是有问题的，故研究水汽方程的求解新方法，显得十分重要。

本文针对上述指出的水汽分布的特点，引进弱解的定义，并证明弱解的存在性和唯一性。利用弱解的理论，指出了设计求解水汽方程的有限元方法的思路。

2 水汽方程的初边值问题和弱解的定义

首先，假设速度场(v_θ、v_λ、$\dot{\sigma}$)是外作用项，不与水汽相变过程耦合；同时，还假设水汽凝结后，凝结物（水滴）或凝华物全部降落到地面，因此可以用公式表示水汽的凝结和凝华过程为

$$f(\theta,\lambda,\sigma,t)=\begin{cases}-\alpha(q-q_s), & \text{当} q\geqslant q_s,\\ 0, & \text{当} q< q_s,\end{cases} \tag{1}$$

式中$\alpha\geqslant 0$，f为凝结量，故有下式成立：

$$f\leqslant 0, \tag{2}$$

1997-12-12 收到，1998-09-23 收到再改稿

* 国家重点基础研究发展规划项目“我国重大气候灾害的形成机理和预测理论的研究”、国家攀登项目“气候动力学和气候预测理论研究”以及国家自然科学基金资助项目 49735160 和 49805005 共同资助

f 可能是不连续的，用磨光算子使其充分光滑。水汽预报方程为

$$\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}k_H\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}q+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}k_H\frac{\partial}{\partial\lambda}q+\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(k_v\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right)$$
$$-\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}-\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}-\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}-\frac{\partial q}{\partial t}=-\alpha(q-q_s). \tag{3}$$

式（3）中 q 的定义域 Ω 为

$$\Omega=\{(\theta,\lambda,\sigma,t):0<\varepsilon<\theta\leqslant\pi-\varepsilon,0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,0\leqslant\sigma\leqslant 1,0<t\leqslant T\}.$$
$$\varepsilon\text{为小于}\pi\text{的任意小正数.} \tag{4}$$

注意 Ω 为 4 维区域，规定 $\partial\Omega$ 为 $t=0$ 的区域 B，$t=T$ 的区域 B_T，以及 $0\leqslant t\leqslant T$ 的带形流形 S

$$S=\{\theta=\varepsilon,0\leqslant\sigma\leqslant 1\}\cup\{\theta=\pi-\varepsilon,0\leqslant\sigma\leqslant 1\}\cup\{\sigma=0,\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon\}\cup$$
$$\{\sigma=1,\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon\}. \tag{5}$$

式（4）与（5）中取 $\varepsilon>0$ 的目的，是为了去掉南北极的奇异点，以后约定 S 的外法向为 n，并且 $0\leqslant t\leqslant T$ 表示 $(v_\theta,v_\lambda,\dot{\sigma})$ 可不计相变影响的时段。注意极区问题是由于采用球坐标引起的。根据拓扑学理论[1]的论述，球面是紧致的，而对应于平面是非紧致，故球面不与平面（或平面的开子集）拓扑同胚。从而处理球面问题时必须将球面当作二维微分流形来处理。这也解释了气象中处理极区的困难，实有深刻原因。

有了以上的准备，就可以提出如下的初边值问题：

[第一初边值问题]

$$\begin{cases}L([q])=-f,\\ q|_s=g(Q,t)=g_1, \qquad Q\in s,\\ q|_{t=0}=g_2,\end{cases} \tag{6}$$

式中 L 为（3）式的左边，q 的定义域为 Ω，g_1 为由观测给出的边值，g_2 为 $t=0$ 时的观测初值，均设为已知的。

为了方便，将（6）式改写成

$$\frac{\partial q}{\partial t}+A[q]=f_1. \tag{7}$$

注意在研究弱解时，由于研究积分，故可令 $\varepsilon->0^+$，只要广义积分存在，因此 s 只须取上边界即可，即 $\sigma=0$ 及 $\sigma=1$。但为了数学上的严格性，仍取成 $\varepsilon>0$。式（7）中

$$A[q]=-\left[\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}k_H\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}q+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}k_H\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(k_v\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}q\right]+\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\alpha q, \tag{8}$$

$$f_1=\alpha q_s. \tag{9}$$

不失一般性，可设 $g_1=0$，否则假设 Ω 是充分光滑区域，并且 $g\in c^{2,\alpha}(\alpha>0)$，将 g_1 延拓

到Ω中去，变成$g(\Omega)$，再作$\bar{q}=q-g$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial t}+A[\bar{q}]=f_1-\dfrac{\partial g}{\partial t}-A[\bar{q}],\\ \bar{q}|_{s=0},\end{cases}\tag{10}$$

从式（10）可知设$g_1=0$是可以的。本来，球面上关于λ方向有周期性，但关于θ有奇异性，关于σ有上下边界，因此，不如取g_1来得方便。

根据 Lions 的方法[2,3]，取检验函数$\varphi\in C^1(\Omega)$，$\varphi(\theta,\lambda,\sigma,T)=0$，$\varphi|_s=0$，$\varphi(\theta,\lambda,\sigma,0)$不予约束。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial t}+A[q]=f_1,\\ q|_{t=0}=g_2,\\ q|_s=0,\\ q(\theta,\lambda+2\pi,\sigma,t)=q(\theta,\lambda,\sigma,t).\end{cases}\tag{11}$$

在方程（11）中乘以φ，并沿Ω积分有（记$\mathrm{d}v=a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma$）

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}q\frac{\partial}{\partial t}\varphi\mathrm{d}t\mathrm{d}v\\&=-\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi\mathrm{d}t\mathrm{d}v-\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}g_2\varphi(0),\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta k_H\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}t\,a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma\\&=-\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\frac{k_H}{a^2}\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}k_H\frac{\partial}{\partial\lambda}q\mathrm{d}t\,a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma\\&=-\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\frac{k_H}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\mathrm{d}t\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{14}$$

[注：$\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}P\right)\mathrm{d}\lambda=0$]

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi\frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}k_v\frac{\partial}{\partial\sigma}q\mathrm{d}t\mathrm{d}v=-\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial q}{\partial\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}v.\tag{15}$$

利用式（13）、（14）和（15），有

$$\begin{aligned}(Aq,\varphi)&=\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}(Aq)\varphi\mathrm{d}t\mathrm{d}v\\&=\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left\{\frac{\partial k_H}{a^2}\left[\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial q}{\partial\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}v\\&\quad+\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi\left(\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}q+\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma}+\alpha q\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}v.\end{aligned}\tag{16}$$

再利用式（12），易知

$$-\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} q\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}v + E(q,\varphi)$$
$$=\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} f_1\varphi\mathrm{d}v\mathrm{d}t+\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} g_2\varphi(0)\mathrm{d}v. \tag{17}$$

式（17）中，$\int_0^T E_1(q,\varphi)$化为式（16）的右端，并记(L,φ)为式（17）之右端，则有

$$-\left(q,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\int_0^T E_1(q,\varphi)\mathrm{d}t=(L,\varphi). \tag{18}$$

式(18)中$E(q,\varphi)$为q、φ的双线性泛函，L为φ的线性泛函。以上的推导中，可见应设q关于$0\leqslant t\leqslant T$的变量t是平方可积即可，而关于$\Omega_1=\{(\theta,\lambda,\sigma)$: $0\leqslant\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1\}$，则要求在索伯列夫空间$H_0^1(\Omega_1)$中平方可积，范数为

$$\|\cdot\|_1=\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\varphi^2\mathrm{d}v\right\}^{1/2}+\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}|D\varphi|^2\mathrm{d}v\right\}^{1/2}.$$

记$L^2(0,T;H_0^1(\Omega_1))$的范数为

$$\left\{\int_0^T[(\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega_1)}\mathrm{d}v)^{1/2}+(\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}|\nabla_3\varphi|^2\mathrm{d}v)^{1/2}]\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.$$

最后，将上述分析的结果用定义表达成

[水汽方程广义解的定义]

如果$q\in L^2[0,T;H_0^1(\Omega_1)]$，对每个$\varphi\in c^1(0,T;H_0^1(\Omega_1))$和$\varphi(\theta,\lambda,\sigma,T)=0$，都满足(18)式。这时，则称$q$为方程（11）的第一类初边值问题的弱解，初边值在下文定理2中讨论，式(18)中$\left(q,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} q\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}v$。

3　弱解的存在性和唯一性

方程（18）左端可再为记$E(q,\varphi)=-\left(q,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\int_0^T E_1(q,\varphi)\mathrm{d}t$，再将（18）改写成

$$E(q,\varphi)=(L,\varphi) \tag{19}$$

为了证明方程（19）解的存在性和唯一性，我们采用 Lions 定理。

[定理 1]　设F是一个 Hilbert 空间，范数为$\|\cdot\|_F$，Φ为F的一个子空间，对于范数$\|\ \|_\Phi$是一个内积空间，如果

① $E(q,\varphi)$为$F\times\Phi$上的一个共轭双线性型，

② 存在常数c，使$\|\varphi\|_F\leqslant c\|\varphi\|_\Phi$，对任何$\varphi\in\Phi$成立，且$E(q,\varphi)$对于$q\in F$但任意固定$\varphi$时，$E(q,\varphi)$关于$q$连续，

③ 存在$\alpha>0$，使$\mathrm{Re}\,E(\varphi,\varphi)\geqslant\alpha\|\varphi\|^2_\Phi$，对每个$\varphi\in\Phi$成立，

④ $L(\varphi)$为Φ的有界共轭线性泛函，

则存在$q\in F$，使得

$$E(q,\varphi)=L(\varphi),\qquad 对任意\varphi\in\Phi. \tag{20}$$

Lions 定理的证明可参见文献[2]。因此，为了证明方程（19）存在广义解，只须证明其中的$E(q,\varphi)$与(L,φ)也满足定理 1 的条件即可。实际上，有如下的定理 2，是关于抽象抛物型方程解的存在唯一性的。

[定理 2] 对于共轭双线型$E_1(t,q,\varphi)$（为了 Fourier 分析的方便，一般在复空间中讨论，取实部即得结论，下不注明），如果

① $q\in v$, $\varphi\in v$, v 和 H 为两个可分复 Hilbert 空间，$v\subset H$且对于$(v,\|\cdot\|)$和$(H,|\cdot|)$有

$$|\varphi|\leqslant c\|\varphi\|,\qquad 对任意\varphi\in v,\ c为常数 \tag{21}$$

② $E_1(q,\varphi)$在$(0,T)$可测。

③ 有界性：存在与$t\in(0,T)$无关的常数μ使

$|E_1(t,q,\varphi)|\leqslant M\|q\|\|\varphi\|$，几乎处处对$t\in(0,T)$，对任意$q,\varphi\in V$成立.

④ 强制性：存在 $\lambda>0,\alpha>0$ 使

$\mathrm{Re}E_1(t,q,q)+\lambda|q|^2\geqslant\alpha\|q\|^2$，对任意$q\in v$，几乎处处$t\in(0,T)$.

则 ① 与$E_1(t,q,\varphi)$相应一个算子$A(t)\in(v,v')$, v'为 v 的共轭空间，满足

$$E_1(t,q,\varphi)=(A(t)q,\varphi);$$

② 并且对任意$f\in L^2(0,T;v')$、$g_2\in H$，存在唯一的弱解

$$q\in w(0,T;v)\ ，其中w(0,T;v)=\{v\in L^2(0,T;v)\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;v')\}.$$

满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q(t)}{\partial t}+A(t)q(t)=f_1(t), & 几乎处处对于t\in(0,T)\\ q(0)=g_2,\end{cases} \tag{22}$$

并有从$L^2(0,T;v')\to w(0,T;v)$的映射$(f,g_2)\to q$连续。

详细证明见文献[3]。

定理 2 关键的条件是有界性和强制性，对于水汽方程定义的（22）右端的$E_1(t,q,\varphi)$，可以验证（取$H=\Omega_1$, $v=H_0^1(\Omega_1)$）也满足有界性和强制性条件。

实际上，对于$H_0^1(\Omega_1)$的共轭双线性泛函（关于φ'取共轭）

$$E_1(t,q,\varphi)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left[\frac{k_H}{a^2}\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\lambda}\right)+\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial q}{\partial\sigma}\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\sigma}\right.$$
$$\left.+\overline{\varphi}\left(\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\dot\sigma\frac{\partial q}{\partial\sigma}+\alpha q\right)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}v$$

有

1）有界性：易证

$$|E_1(t,q,\varphi)|\leqslant M\|q\|_1\|\varphi\|_1. \tag{23}$$

2）强制性：如果

$$\mathrm{Re}\left[\frac{k_H}{a^2}\zeta_1\bar{\zeta}_1+\frac{k_H}{a^2}\zeta_2\bar{\zeta}_2+\frac{k_v}{H^2}\zeta_3\bar{\zeta}_3\right]\geqslant\alpha_1(|\zeta_1|^2+|\zeta^2|^2+|\zeta_3|^2),\qquad \alpha_1>0,\tag{24}$$

则有

$$\begin{aligned}|E_1(t,q,q)|\geqslant&\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\alpha_1\left(\left|\frac{\partial q}{\partial\theta}\right|^2+\left|\frac{\partial q}{\sin\theta\partial\lambda}\right|^2+\left|\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}v\\&-c_1\left[\left(\int_{j0}^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial\theta}\right|^2+\left|\frac{\partial q}{\sin\theta\partial\lambda}\right|^2+\left|\frac{\partial q}{\partial\sigma}\right|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}v\right)^{1/2}\right.\\&\left.\times\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}|q|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}v\right]^{1/2}-c''\int_0^T\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}|q|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

利用$2ab\leqslant\eta a^2+\dfrac{1}{\eta}b^2$（$\eta>0$），可证出

$$|E_1(t,q,q)|\geqslant c_1\|q\|_1^2-c_2\|q\|^2.\tag{25}$$

式（25）中$c_1>0$, $c_2>0$，称为 Garding 不等式。式（24）与（25）中$\|q\|_m^2=\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant M}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}|\nabla^\alpha q|^2\mathrm{d}v\right\}^{1/2}$。因此，有界性和强制性成立，即可证如下的定理 3。

[定理 3] 方程（18）中如果式（25）成立，并且风场$(v_\theta,v_\lambda,\dot{\sigma})$属于$L^\infty(\Omega)$，即本性有界，$H=\Omega_1$，$v=H_0^1(\Omega_1)$，则存在唯一的$q\in w[0,T;H_0^1(\Omega_1)]$，满足(11)式，其中$g_2\in L^2(\Omega_1)$，$f\in L^2[0,T;H_0^{-1}(\Omega_1)]$。

[证明] 因为式（25）成立是由于k_H、k_v为正数，并且k_H、k_v大于某一正数，而且已验证具有界性与强制性，故可用定理 2。证毕。

通过上面的讨论，可见对于不够光滑的水汽方程，利用弱解的方法，可较为满意地给出解的拓广。这种拓广不仅有理论意义，也有实用意义。下面小节讨论弱解思想在设计水汽方程有限元方程中的应用。

4 水汽方程的有限元法

一般在发展方程设计有限元时，通常取$\varphi(\theta,\lambda,t)\in H_0^1(\Omega_1)$，乘$\varphi$到式（21），有

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t},\varphi\right)+(A[q],\varphi)=(f_1,\varphi),\tag{26}$$

式中内积为

$$(a,b)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}aba^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma.\tag{27}$$

然后，利用分部积分，式（27）可化成

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t},\varphi\right)+E_1(q,\varphi)=(\varphi_1,\varphi).\tag{28}$$

式中$E_1(q,\varphi)$为

$$E_1(q,\varphi)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left[\frac{k_H}{a^2}\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{k_v}{H^2}\frac{\partial q}{\partial\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right.$$
$$\left.+\varphi\left(\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial q}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\dot\sigma\frac{\partial q}{\partial\sigma}+\alpha q\right)\mathrm{d}v\right. \tag{29}$$

通常称式（29）为变分方程。只要在Ω_1中取一组基$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\varphi_i\in H_0^1(\Omega_1)$，记

$$q=\sum_{i=1}^n q_i(t)\varphi_i. \tag{30}$$

将式（30）代人式（28），依次令$\varphi=\varphi_i$，则可得通常的 Galerkin 方法。详细方案此处不再赘述。如何取合适的基来求解（28），有待进一步研究。

5 结论

本文利用 Hilbert 空间的 Lions 定理，对于第一类边值问题，证明了水汽方程弱解的存在性和唯一性，并且利用弱解，指出了设计有限元计算的具体方法。

致谢：本文是在导师曾庆存院士指导下完成的博士论文的一部分，在此谨致衷心感谢!

参 考 文 献

1 Bootbby, W. M., 1975, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.
2 Friedman, A., 1964, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall.
3 王耀东，1989，偏微分方程的L^2理论，北京：北京大学出版社.

Well-Posed Problems of the Weak Solution about Water Vapour Equation

Wang Bizheng

(Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Science and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract By Lions theorem in the Hilbert space, the existence and unequecess of the weak solution of water vapour-equation with the first boundary-value problem are proven, and the scheme of the finite-element method according to the weak solution is proposed.

Key words weak solution finite-element method