

完全非内插半拉格朗日格式在一维 Burgers 方程及二维浅水波方程上的应用^{*}

王 军

陈嘉滨

(中国气象局国家气象中心, 北京 100081)

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

摘 要 在作者过去提出的完全非内插半拉格朗日格式的基础上, 针对半拉格朗日格式由于内插带来预报场人为的光滑性问题, 进一步发展了这种计算格式, 证明了此格式的计算稳定性。为检验这种新的计算格式的性能, 在一维和二维问题上进行了应用。在一维问题中采用了一维无粘 Burgers 方程 (方程中有突变点); 二维问题采用了浅水波方程, 同时将这些计算结果与 Ritchie 方案及欧拉方案或一般半拉格朗日内插方案的计算结果进行了比较, 发现新格式消除了内插和预报场的人为光滑, 并且计算精度有一定程度的提高, 这为以后将此格式推广到全球谱模式打下了基础。

关键词: 半拉格朗日计算格式; 计算稳定性; 人为光滑性

1 引言

精确和准时的天气预报对于经济建设和群众的安全活动是十分重要的。天气预报是依靠数值天气预报系统提供的预报产品来制作的, 预报系统的核心是数值预报模式, 它用来同化资料和预报大气未来状态。预报模式的预报精度, 主要决定于预报模式的分辨率。数值预报长期存在的问题是, 时间步长是由计算稳定性而不是由计算精度所控制。为了计算稳定, 时间步长要取很小, 结果时间截断误差远小于空间截断误差, 约为后者的 $1/400$; 对受限于重力振动的显式格式来说, 半隐式格式的时间截断误差仍比空间的小得多, 约为后者的 $1/25$ ^[1]。半隐式格式主要受限于平流速度。

半拉格朗日格式早在 50 年代就在气象中被提出^[2], 并有很多人进行研究, 我国王宗皓^[3]、季仲贞^[4]等人也进行了研究。但是直到 80 年代初, 由 Robert^[5,6]将半拉格朗日同半隐式格式结合起来, 才在气象中得到应有的重视和广泛的应用, 这种格式直到 90 年代初仍有很多人研究^[7,8]。半拉格朗日格式是以随质点运动的半拉格朗日观点处理平流部分, 在每个时间步长内, 研究到达欧拉空间中规则网格上的流体质点, 它考虑在时间截断误差和空间截断误差相当的情况下, 最大限度地拉长了时间步长, 而不损失计算精度, 且保持了计算稳定性。这种计算格式没有出现欧拉格式的非线性计算不稳定问题。实际应用时, 将半拉格朗日格式同半隐式格式结合起来, 使计算格式进一步完美, 时间步长进一步拉长, 约为欧拉半隐式格式的 4~6 倍。这就为在一定计算机条件下提

1999-01-20 收到, 1999-06-04 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目“我国重大气候和天气灾害形成机理和预测理论的研究”(G1998040900) 和国家自然科学基金资助项目 49475266 共同资助

高分辨率提供了极好的计算方法。

纵观半拉格朗日格式从 80 年代到 90 年代的发展, 有两个急需解决的问题。首先, 这种格式计算时需要四周格点值来进行内插计算, 即使如 Ritchie^[9]提出的非内插格式也需要进行简单的内插。内插带来的问题是场的人为光滑和花费 CPU 时间, 对于低分辨率模式, 这种人为的光滑影响特别大。第二, 目前尚未证明, 现在的半拉格朗日格式能够像欧拉格式那样保持主要物理量的总体守恒。由于以上两个原因, 用半拉格朗日格式作延伸预报和气候模拟的至今仍不多见。

本文的主要目的是, 将作者提出的完全非内插半拉格朗日格式^[10,11]应用到二维浅水波方程。为了比较, 同时还采用了一般的内插半拉格朗日格式和 Ritchie^[9]的非内插格式计算相同的例子。在本文第 2 节中, 叙述了完全内插半拉格朗日计算格式, 证明了此格式的计算稳定性; 第 3 节和第 4 节是将本文的格式应用到 Burgers 方程和浅水波方程上; 第 5 节对所作的工作进行了总结。

2 完全非内插半拉格朗日计算格式的构造

2.1 基本原理

为便于阅读, 我们将文献[10]中提出的完全非内插格式简要叙述如下。考虑一维平流方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = R(x, t), \quad (1)$$

其中流体质点速度 u 为

$$u(x, t) = \frac{dx}{dt}.$$

方程 (1) 左端表示变量 F 随流体质点运动的总体微分, 因此有

$$\frac{dF}{dt} = R(x, t). \quad (2)$$

如图 1 所示, 一流体质点经过一定时间间隔, 例如 2 倍时间步长后, 由出发点 A (不一定位于规则网格点上) 到达规则网格点 C 。一般来讲, 这是一条曲线。半拉格朗日格式就是研究这类经一 (或二) 个时间步长后到达规则网格点的运动。

由图 1 所示, 我们考虑一流体质点, 以其速度 $u(x_m - \alpha_m, t_n)$, 经过时间 $2\Delta t$, 由出发点 A 运动到规则格点 C , 其中 $2\alpha_m$ 是流体质点的出发点 A 至到达点 C 之间的距离。显然

$$\alpha_m = \Delta t u(x_m - \alpha_m, t_n), \quad (3)$$

上式需用迭代计算, 其初值取上一时刻的值。最靠近出发点 A 的有两个规则格点, 即 D 和 E , 它们距到达点 C 分别为 $(P+1)$ 和 P 个格距, 取其中距离为偶数格距的点, 如图 1 中, 取具有偶数格距的点, 假定为 E 格点, 这样 E 点到 C 点的距离就为 $P\Delta x$, 其中 Δx 格距。 P 值用以下迭代公式求得, 其初值取上一时刻的值,

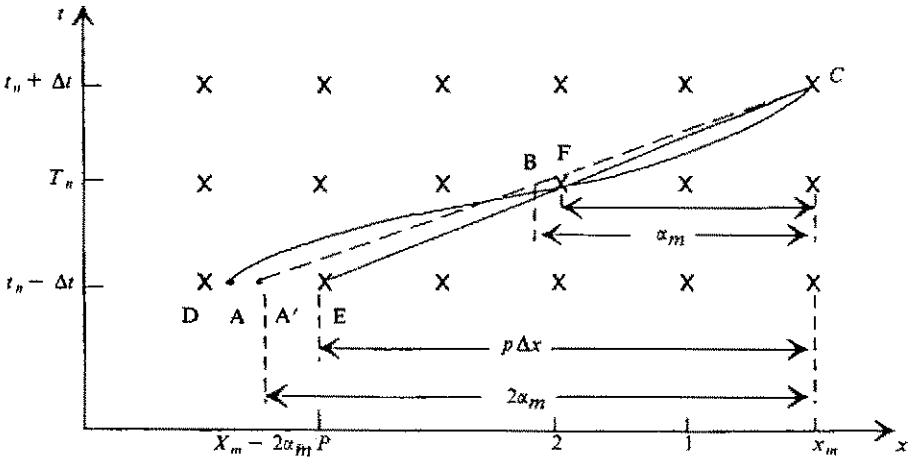


图 1 三时间层半拉格朗日格式示意图

实曲线CA为流体质点的实际轨迹；长虚线CA'为一般非内插格式的近似轨迹；实直线CE为完全非内插半拉格朗日格式的近似轨迹。D、E位于格点上；B为CA'的中点；F为CE的中点；质点在 $t_n + \Delta t$ 时位于 x_m ， α_m 为质点在 Δt 时间内所移动的距离

$$P=2\text{nint}\left[\frac{\Delta t u(x-P\Delta x/2,t)}{\Delta x}\right], \tag{4}$$

其中nint表示取最靠近的整数。(4)式只要很少步数就可以达到迭代要求，即可计算出P的值，从而减少了计算量。而将P取为偶数，同时也避免了Ritchie非内插格式中由于P取奇数或偶数时平流项计算不一致造成截断误差分布的不一致，从而引起计算波的问题。

用类似文献[9]的方法，通过在平流风速上加减 $P\Delta x/2\Delta t$ 项，我们可将方程中的平流项分成两部分，一部分为半拉格朗日平流，一部分为剩余平流。平流风速可写为

$$u(x-P\Delta x/2,t)=U(x,t)+U', \tag{5}$$

其中 $U(x,t)=P\Delta x/(2\Delta x)$ 。

将(5)式代入方程(1)左端，最后就有

$$\frac{\partial F}{\partial t}+U\frac{\partial F}{\partial x}=-U'\frac{\partial F}{\partial x}+R(x,t), \tag{6}$$

式中右端第一项就是所说的剩余平流项。上面方程(6)的左端表示，随着流体质点以速度为 $U=P\Delta x/\Delta t$ 移动的总微分，此流体质点在过去 $2\Delta t$ 内经过了P个格距。令总微分为

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+U\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{7}$$

则(6)式可化为

$$\frac{dF}{dt}=-U'\frac{\partial F}{\partial x}+R(x,t). \tag{8}$$

应用中央差分, 方程 (8) 可写为如下形式:

$$\frac{F(x_m, t_n + \Delta t) - F(x_m - P\Delta x, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} = -U' \frac{F\left(x_m - \frac{P\Delta x}{2} + \Delta x, t_n\right) - F\left(x_m - \frac{P\Delta x}{2} - \Delta x, t_n\right)}{2\Delta x} + R\left(x_m - \frac{P\Delta x}{2}, t_n\right). \quad (9)$$

因为 P 为偶数, $P/2$ 就是整数, 于是 $(x_m - P\Delta x/2)$ 和 $(x_m - P\Delta x)$ 都在规则网格点上。这样方程两边任何变量都是位于格点上的变量, 用不着像一般常用的半拉格朗日格式那样要进行插值, 也不用像 Ritchie^[9] 方案那样, 当 P 为奇数时要用周围网格点取平均, 从而完全非内插半拉格朗日格式消除了任何内插。

2.2 稳定性分析

下面分析上面构造的完全非内插半拉格朗日格式的稳定性。考虑二维平流方程,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

这里 U 、 V 分别为 X 、 Y 方向的平流速度。类似于一维情况, 我们将 U 、 V 分别分裂为两部分,

$$U = \frac{P\Delta x}{2\Delta t} + U' \quad \text{和} \quad V = \frac{q\Delta y}{2\Delta t} + V'. \quad (11)$$

(10) 式就可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{P\Delta x}{2\Delta t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{q\Delta y}{2\Delta t} \frac{\partial F}{\partial y} = - \left(U' \frac{\partial F}{\partial x} + V' \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad (12)$$

式中 Δx 和 Δy 分别是 X 、 Y 方向的格距。(12) 式左端表示随体微分, 移动速度为

$$\left(\frac{P\Delta x}{2\Delta t}, \frac{q\Delta y}{2\Delta t} \right),$$

P 和 q 的定义如前与 (4) 式类似, 不同的 q 是对速度 V 定义。(12) 式右端是剩余平流, 其中 U' 和 V' 是由 (11) 式决定的。(12) 式左端取中央差, 选取预报时刻和位置在格点 (x_i, y_j) 上, 则 (12) 式变为

$$\frac{F(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - F(x_i - P\Delta x, y_j - q\Delta y, t_n - \Delta t)}{2\Delta t} = - \left(U' \frac{\partial F}{\partial x} + V' \frac{\partial F}{\partial y} \right) \left(x_i - \frac{P\Delta x}{2}, y_j - \frac{q\Delta y}{2}, t \right), \quad (13)$$

因为 P 、 q 都是偶数, (13) 式两边计算都是在规则网格点上进行, 不需要任何内插。

现在来分析 (13) 式的稳定性, 用二阶差分来近似 (13) 式右端的微商, 设

$$F = C e^{i(mx + ny + \omega t)}, \quad (14)$$

注意到

$$\frac{U'\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta t}{\Delta x} U - P \right) \quad \text{和} \quad \frac{V'\Delta t}{\Delta y} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta t}{\Delta y} V - q \right)$$

以及

$$\left| \frac{U'\Delta t}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{和} \quad \left| \frac{V'\Delta t}{\Delta y} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (15)$$

为方便, 记

$$F'_{ij} \equiv F(i\Delta x, j\Delta y, t).$$

(13)式右端剩余平流取中央差分近似, 即

$$U' \frac{F'_{i+1-P/2, j-q/2} - F'_{i-1-P/2, j-q/2}}{2\Delta x} + V' \frac{F'_{i-P/2, j+1-q/2} - F'_{i-P/2, j-1-q/2}}{2\Delta y}.$$

将(14)式代入(13)式, 经一定的计算, 有

$$\sin\left(\frac{mP\Delta x}{2} + \frac{nq\Delta x}{2} + \omega\Delta t\right) = -\frac{U'\Delta t}{\Delta x} \sin(m\Delta x) - \frac{V'\Delta t}{\Delta y} \sin(n\Delta y). \quad (16)$$

由不等式(15)可知, (16)式右端的绝对值是小于或等于1的, 因而, (16)式的左端中的 ω 必为实数。这就证明了本文提出的完全非内插半拉格朗日格式是无条件稳定的。

3 无粘 Burgers 方程试验

文献[12]给出了用内插方法求解的一维无粘 Burgers 方程的解, 该方程在 $(x_0 - \bar{u}t, 1)$ 附近出现较大梯度。为便于比较, 我们采用了三种格式对方程进行求解。

考虑无粘 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

在有限区域 $(-1, 1)$, 给出如下初值:

$$u(x, 0) = f(x) = \bar{u} - \arctan(x - x_0), \quad (18)$$

分析解为

$$u = \bar{u} - \arctan(x - ut - x_0). \quad (19)$$

因

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0+ut} = -\frac{1}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty, \quad (20)$$

该方程在 $(x_0 - \bar{u}t, 1)$ 出现奇异点。对此方程用三种方法求解, 其中各参数为 $\bar{u}=0.0$, $x_0=0.0$, 格点数 $N=32$ 。

3.1 完全非内插半拉格朗日方案 (NSL)

将前述完全非内插半拉格朗日方案用于(17)式, 方程可写为

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j - P\Delta x, t - \Delta t) - u' \frac{u(x_j - P\Delta x/2 + \Delta x, t) - u(x_j - P\Delta x/2 - \Delta x, t)}{2\Delta x} 2\Delta t, \quad (21)$$

其中

$$u' = u(x_j - P\Delta x/2, t) - \frac{P\Delta x}{2\Delta t}, \quad (22)$$

P 由 (3)、(4) 式得到

$$P = 2 \operatorname{nint} [\Delta t u(x_j - P\Delta x/2, t) / \Delta x]. \quad (23)$$

3.2 Ritchie 方案(RSL)

将前述 Ritchie^[9]非内插半拉格朗日方案用于 (17) 式, 方程可写为

$$u' \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} u' \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2}, t \right) \frac{u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} + \Delta x, t \right) - u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} - \Delta x, t \right)}{2\Delta x}, & P = \text{偶数} \\ \frac{u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}, t \right) + u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}, t \right)}{2} \\ \quad \times \frac{u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}, t \right) + u \left(x_j - \frac{P\Delta x}{2} - \frac{\Delta x}{2}, t \right)}{\Delta x}, & P = \text{奇数} \end{cases} \quad (24)$$

可得

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j - P\Delta x, t - \Delta t) - u' \frac{\partial u}{\partial x}(t) 2\Delta t, \quad (25)$$

由下式得到 P

$$P = \operatorname{nint} [2\Delta t u(x_j - P\Delta x/2, t) / \Delta x]. \quad (26)$$

3.3 一般插值方法

运用传统的内插半拉格朗日方法, 可以得到

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j - 2\alpha, t - \Delta t), \quad (27)$$

这里

$$\alpha = \Delta t u(x_j - \alpha, t). \quad (28)$$

由三次样条插值公式可得 (27) 式右端项, (28) 式中 u 的值由线性插值得到。

可以证明这三种格式都是稳定的, 且相速误差都较小。

在区域 $(-1, 1)$ 上, 取不同的时间步长 $\Delta t = 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-7}$, 用三种方案计算的结果分别见图 2 (完全非内插方案)、图 3 (Ritchie 方案)、图 4 (一般内插方案), 均方根误差见图 5。由图可知: Ritchie 方案与 NSL 方案都与分析解十分相近, 精度都比较高, 效果都好于用一般内插半拉格朗日方案计算的结果; 三种方案在突变点误差都比其

他点大; 三者相比, NSL 方案在突变点误差最小。这说明: NSL 方案同 Ritchie 方案一样, 对于出现较大梯度的问题有比较准确的描述, 这对于描写水汽方程水汽辐合辐散的变化很有利。

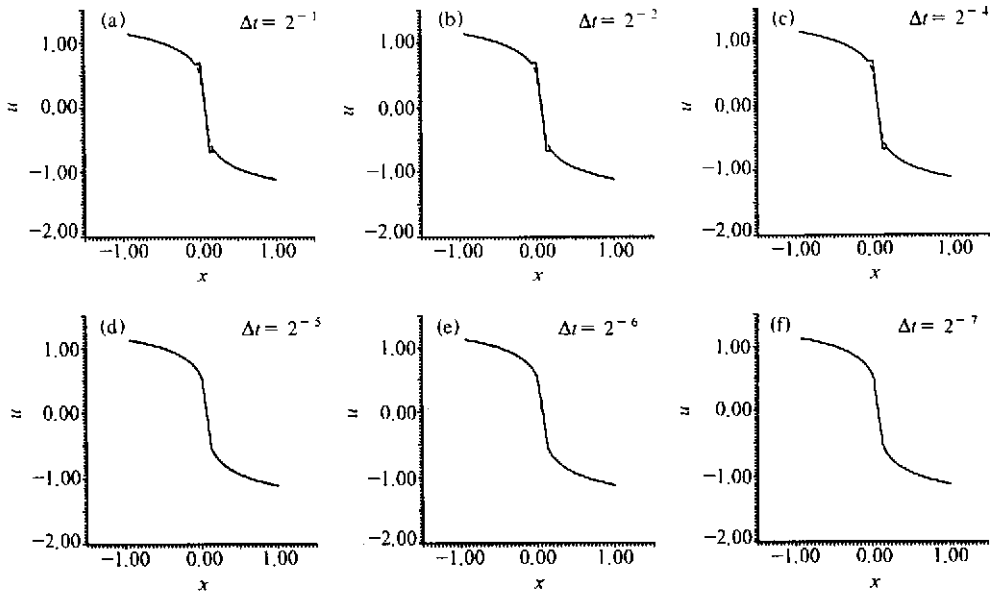


图2 无粘 Burgers 方程在 $t=1.0$ 的解
虚线为解析解, 实线为完全非内插半拉格朗日方案的解

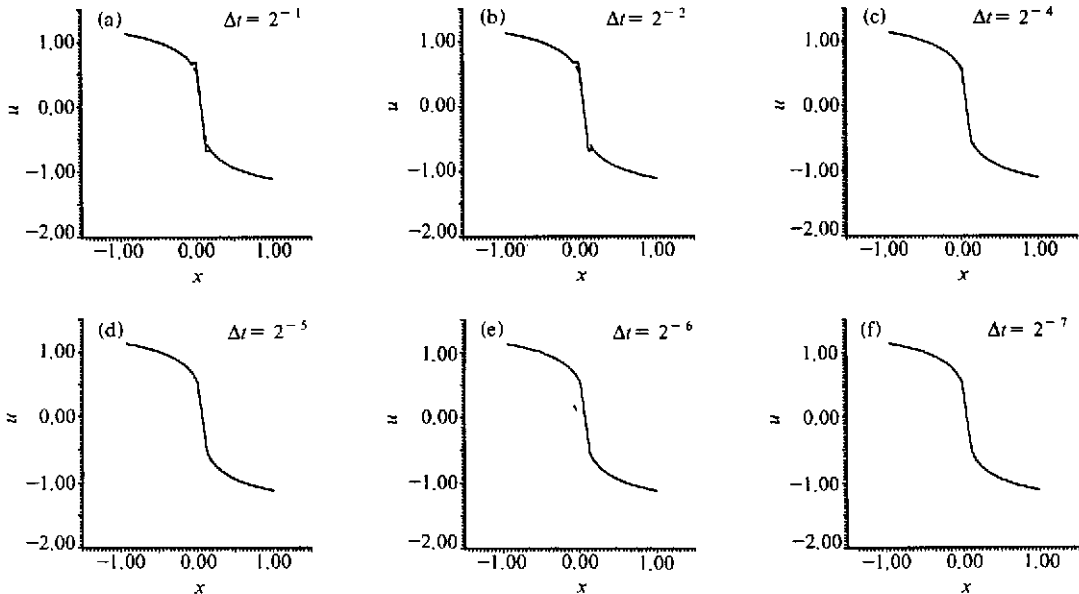


图3 无粘 Burgers 方程在 $t=1.0$ 的解
虚线为解析解, 实线为 Ritchie 非内插半拉格朗日方案的解

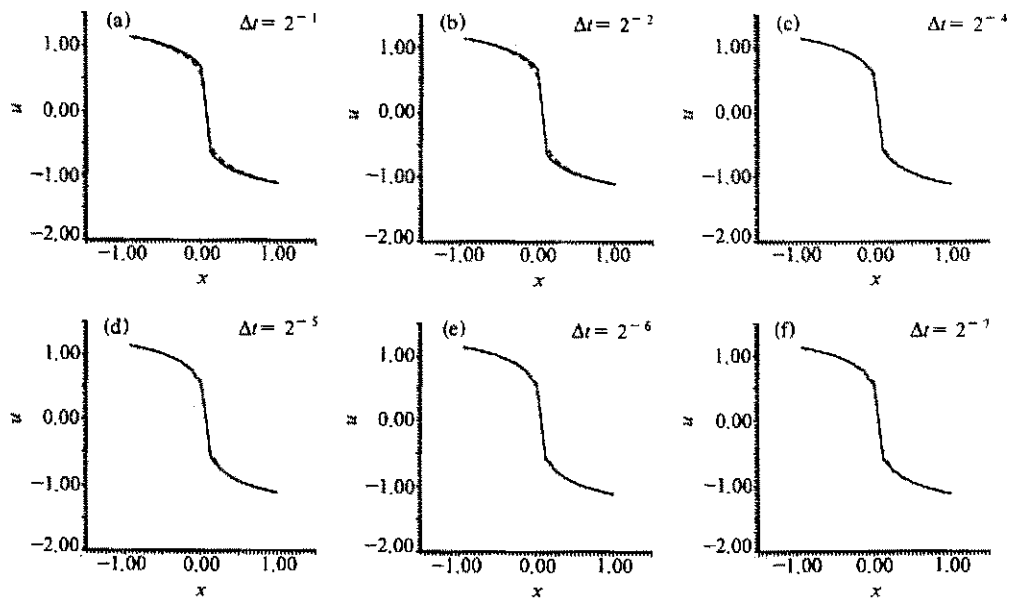


图 4 无粘 Burgers 方程在 $t=1.0$ 的解
虚线为解析解, 实线为一般内插半拉格朗日方案的解

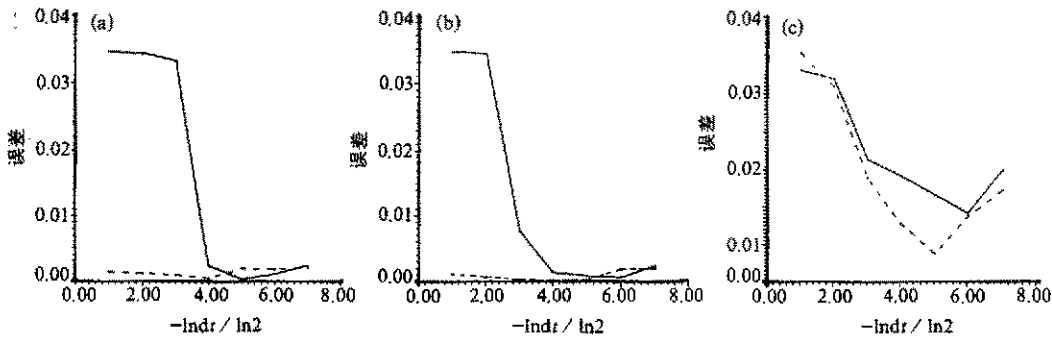


图 5 三种方案无粘 Burgers 方程解的均方根误差
 $t=1.0$, 实线是在突变点附近三个点的误差, 虚线是排除这三点的其他点的误差
(a) 完全非内插方案; (b) Ritchie 方案; (c) 一般内插方案

4 应用到二维浅水波方程

在这一节中, 我们应用欧拉方法、Ritchie^[9]非内插方法和本文的完全非内插方法处理如下浅水波方程的平流项:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} - f\overline{V}' + \frac{\partial \Phi'}{\partial X} + k\frac{\partial S}{\partial X} = 0, \\ \frac{dV}{dt} + f\overline{U}' + \frac{\partial \Phi'}{\partial Y} + k\frac{\partial S}{\partial Y} = 0, \\ \frac{d\Phi}{dt} + (\Phi - \Phi_0)D + \Phi_0\overline{F}' = 0. \end{cases} \quad (29)$$

这个方程组描写了旋转球面上均匀不可压流体的运动, 其中 U 、 V 、 S 、 k 、 D 、 $\bar{F}'$ 定义如下:

$$\begin{cases} U = \frac{u}{m}, & V = \frac{v}{m}, & S = m^2, \\ k = \frac{1}{2}(U^2 + V^2), & D = S\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right), \\ \bar{F}' = \frac{1}{2}[F(X_i, Y_j, t + \Delta t) + F(X_i - P\Delta x, Y_j - q\Delta y, t - \Delta t)], \end{cases} \quad (30)$$

m 是放大系数, 其他的是气象中常见符号. 对欧拉方法, 上面的符号 $\bar{F}'$ 定义为

$$\bar{F}' = \frac{1}{2}[F(X_i, Y_j, t + \Delta t) + F(X_i, Y_j, t - \Delta t)].$$

将本文的完全非内插格式 (NISL) 用于该方程, 可得

$$\begin{cases} \left(U - \Delta t fV + \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{ij}^{n+1} = \left(U - \Delta t fV + \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{i-p, j-q}^{n-1} \\ \quad + 2\Delta t \left[-K \frac{\partial S}{\partial X} - \left(U' \frac{\partial U}{\partial X} + V' \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]_{i-p/2, j-q/2}^n \equiv Q_1, \\ \left(V + \Delta t fU + \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_{ij}^{n+1} = \left(V + \Delta t fU + \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_{i-p, j-q}^{n-1} \\ \quad + 2\Delta t \left[-K \frac{\partial S}{\partial Y} - \left(U' \frac{\partial V}{\partial X} + V' \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right]_{i-p/2, j-q/2}^n \equiv Q_2, \\ (\Phi + \Delta t \Phi_0 D)_{ij}^{n+1} = (\Phi - \Delta t \Phi_0 D)_{i-p, j-q}^{n-1} \\ \quad + 2\Delta t \left[-(\Phi - \Phi_0)D - \left(U' \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V' \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) \right]_{i-p/2, j-q/2}^n \equiv Q_3, \end{cases} \quad (31)$$

其中, 质点在 $t - \Delta t$ 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻所走的距离为

$$\begin{cases} p_{ij} = 2 \text{ nint} (U_{i-p/2, j-q/2}^n \Delta t / \Delta X), \\ q_{ij} = 2 \text{ nint} (V_{i-p/2, j-q/2}^n \Delta t / \Delta Y), \end{cases} \quad (32)$$

而 U' 、 V' 定义如下:

$$\begin{cases} U' = U - \frac{p\Delta X}{2\Delta t}, \\ V' = V - \frac{q\Delta Y}{2\Delta t}. \end{cases} \quad (33)$$

由 (29) 前两式可得

$$\begin{aligned} U_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{1 + f^2 \Delta t^2} \left[(Q_1 + f\Delta t Q_2) - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} + f\Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_{ij}^{n+1} \right] \\ &= Q_4 - \Delta t \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial X} + b \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_{ij}^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{1+f^2\Delta t^2} \left[(Q_2 - f\Delta t Q_1) - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} - f\Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{ij}^{n+1} \right] \\
 &= Q_5 - \Delta t \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - b \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{ij}^{n+1},
 \end{aligned} \quad (34)$$

其中令

$$\begin{cases} Q_4 = \frac{1}{1+f^2\Delta t^2} (Q_1 + f\Delta t Q_2) \\ Q_5 = \frac{1}{1+f^2\Delta t^2} (Q_2 - f\Delta t Q_1) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{1+f^2\Delta t^2} \\ b = \frac{f\Delta t}{1+f^2\Delta t^2}, \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
 D = S \left\{ \frac{\partial Q_4}{\partial X} + \frac{\partial Q_5}{\partial Y} - \Delta t \left[\left(a \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_X \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_Y + \left(b \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_X - \left(b \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_Y \right]_{ij}^{n+1} \right\}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

将 (35) 式代入 (32) 式后, 最后得到如下的 Helmholtz 方程:

$$\begin{aligned}
 \left[a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) + b \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y \partial X} \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial X} - \frac{\partial b}{\partial Y} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \left(\frac{\partial a}{\partial Y} + \frac{\partial b}{\partial X} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right. \\
 \left. - \frac{\Phi}{\Delta t^2 S \Phi_0} \right]_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial Q_4}{\partial X} + \frac{\partial Q_5}{\partial Y} \right) - \frac{Q_3}{\Delta t^2 S \Phi_0} \equiv Q_6.
 \end{aligned} \quad (36)$$

上式可迭代求解得到 Φ , 然后由 (32) 式求出 U 和 V 。

将 Ritchie 方案^[9] (RISL) 应用于方程组 (29), 这时质点由 $t - \Delta t$ 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻所走的格距数为

$$\begin{cases} p_{ij} = \text{nint} (2U_{i-p/2, j-q/2}^n \Delta t / \Delta X), \\ q_{ij} = \text{nint} (2V_{i-p/2, j-q/2}^n \Delta t / \Delta Y), \end{cases} \quad (37)$$

可得形如 (36) 的方程。但对方程中的偏导数项和 U' 、 V' 需如下处理, 为书写方便, 我们使用如下 Shuman 算子:

$$\begin{aligned}
 \overline{\varphi}^\eta &= [\varphi(\eta + \Delta\eta) + \varphi(\eta - \Delta\eta)] / 2, \\
 \delta_\eta \varphi &= [\varphi(\eta + \Delta\eta) - \varphi(\eta - \Delta\eta)] / (2\Delta\eta), \\
 \varphi^\eta &= [\varphi(\eta + \Delta\eta/2) + \varphi(\eta - \Delta\eta/2)] / 2, \\
 \Delta_\eta \varphi &= [\varphi(\eta + \Delta\eta/2) - \varphi(\eta - \Delta\eta/2)] / \Delta\eta.
 \end{aligned}$$

这样就有

$$\frac{\partial F}{\partial X} \equiv \begin{cases} \delta_x F, & p = \text{偶数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{\delta_x F}^\eta, & p = \text{偶数}, q = \text{奇数}, \\ \Delta_x F, & p = \text{奇数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{\Delta_x F}^\eta, & p = \text{奇数}, q = \text{奇数}; \end{cases}$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial Y} \equiv \begin{cases} \delta_y F, & p = \text{偶数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{\delta_y F^x}, & p = \text{偶数}, q = \text{奇数}, \\ \Delta_y F, & p = \text{奇数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{\Delta_y F^x}, & p = \text{奇数}, q = \text{奇数}; \end{cases}$$

以及

$$U' = \begin{cases} U - P\Delta x / (2\Delta t), & p = \text{偶数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{U^x} - P\Delta x / (2\Delta t), & p = \text{奇数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{U^y} - P\Delta x / (2\Delta t), & p = \text{偶数}, q = \text{奇数}, \\ \overline{\overline{U^x}^y} - P\Delta x / (2\Delta t), & p = \text{奇数}, q = \text{奇数}; \end{cases}$$

和

$$V' = \begin{cases} V - q\Delta y / (2\Delta t), & p = \text{偶数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{V^x} - q\Delta y / (2\Delta t), & p = \text{偶数}, q = \text{奇数}, \\ \overline{V^y} - q\Delta y / (2\Delta t), & p = \text{奇数}, q = \text{偶数}, \\ \overline{\overline{V^x}^y} - q\Delta y / (2\Delta t), & p = \text{奇数}, q = \text{奇数}. \end{cases}$$

由于 RISL 方案中 P 、 q 可能出现奇数, 所以需要采用以上公式来计算一阶偏导数的值及 U' 、 V' 。

另外, 为便于比较, 我们还用常规欧拉方案用较小的时间步长求解同样的二维浅水波方程, 将其预报结果作为控制方案来比较上述两种方案。

将以上这三种计算格式用于该方程进行 5 天预报。初始场为极射赤面投影 117×117 网格的北半球投影, 该网格在 60°N 时格距为 190.5 km。为减小边界上的影响, 在边界上对预报变量作了如下处理: 在 10°N 以南风速为 0; 在 $10 \sim 20^\circ\text{N}$ 之间风速、位势高度, 令其均匀地从 10°N 的值增加到 20°N 的初始数据值。由于采用了三种时间层方案, 我们使用三步起步法。

对欧拉方案, 时间步长取 20 min, 对半拉格朗日格式都取时间步长为 90 min。我们用这三种格式计算了两个例子。第一个例子是 1993 年 6 月 1 日 00 时的高度场作初始场, 图 6~8 分别给出了这三种格式的预报场, 由图中可以看出, 这三种方案高低压中心的位置和强度基本一致, 但仍有差别。以欧拉方案为控制方案, 在 6 月 4 日在 $60 \sim 90^\circ\text{E}$ 的中高纬度地区有三个明显闭合的低压中心, $90^\circ\text{E} \sim 180^\circ$ 有一个低高压脊 NISL 方案中闭合中心的位置和强度都与欧拉方案一致。而 RISL 方案 $30 \sim 90^\circ\text{E}$ 中纬度附近的低压中心只剩下一个, 尤其是第 5 天的预报, 低压中心只有一个, 位置处于欧拉方案两低压中心之间, 而且 0°E 附近高压区域较欧拉方案的大, 强度也较深。另外, 在 $180 \sim 120^\circ\text{W}$ 区域内, NISL 方案的预报始终与欧拉方案接近。第一天预报中该地区的两低

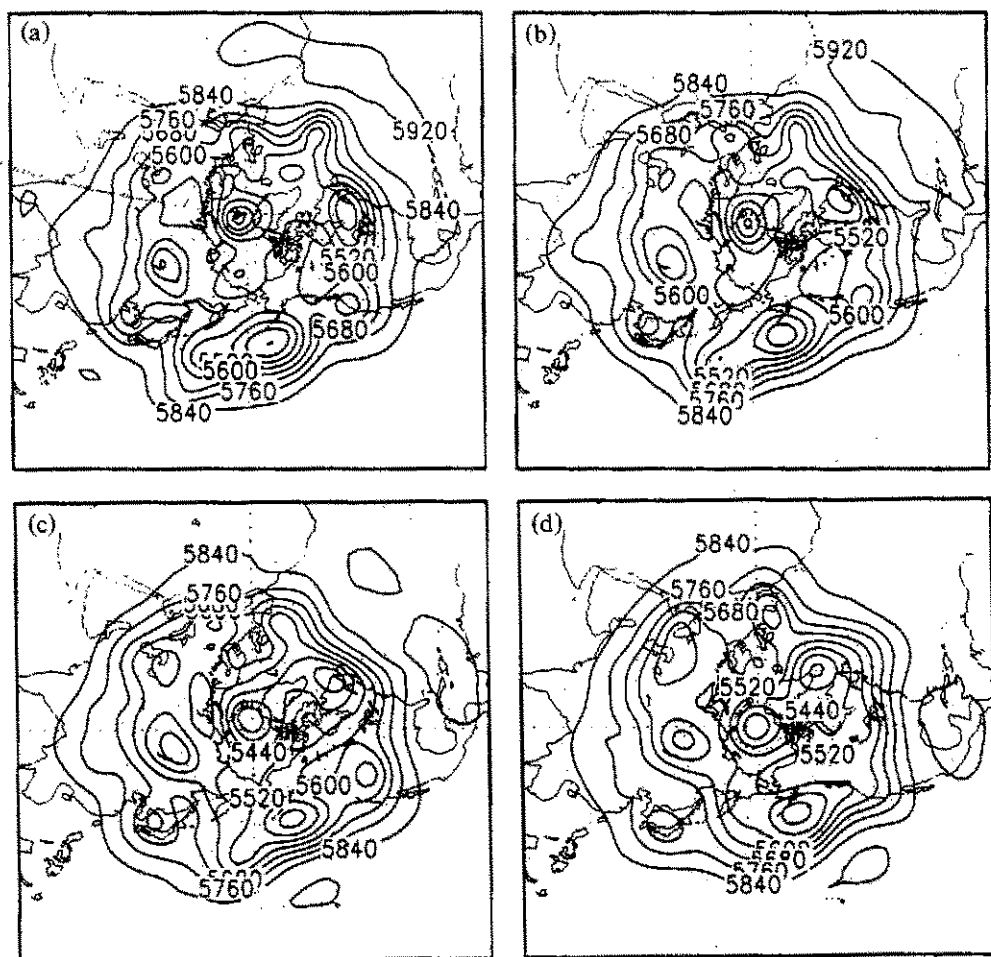


图6 欧拉方案预报的1993年6月1日00时的位势高度场, $\Delta t = 20 \text{ min}$

(a) 第一天预报; (b) 第二天预报; (c) 第三天预报; (d) 第四天预报

压中心位置和强度两种方案接近, 而 RISK 方案中已有一高压脊突起, 隔断了两低压中心。第二天预报中6月3日 NISL 方案和欧拉方案中高压脊突起, 低压中心位于脊的两侧, 位置和强度一致, 而 RISK 方案 90°E 中纬度低压区与高纬度低压区打通, 高压脊东侧到了 90°W 附近。第三天预报中6月4日, NISL 方案 $90^\circ\sim 120^\circ\text{E}$ 附近低压强度较弱, 而 RISK 方案预报的较强。第五天预报中6月6日, NISL 方案和欧拉方案的基本形势一致, 在 $(180^\circ\sim 150^\circ\text{W}, 40^\circ\sim 60^\circ\text{N})$ 之间有一低压区, 高压脊 552 线位于 $60^\circ\sim 70^\circ\text{N}$ 附近, 而 RISK 方案高压脊消失, 仅在中纬度附近有一低压区。

为进一步比较 NISL 方案和 RISK 方案同欧拉方案之间的差异, 我们计算了这两种方案与欧拉方案预报结果的误差。设: 模式预报区域内 NISL 方案 (或 RISK 方案) 任一格点上 500 hPa 预报场位势高度为 $h_{i,j}$, 控制方案 (EU 方案) 为 $H_{i,j}$, 则 NISL 方案 (或 RISK 方案) 对 EU 方案的全场平均误差 H_{500} 为

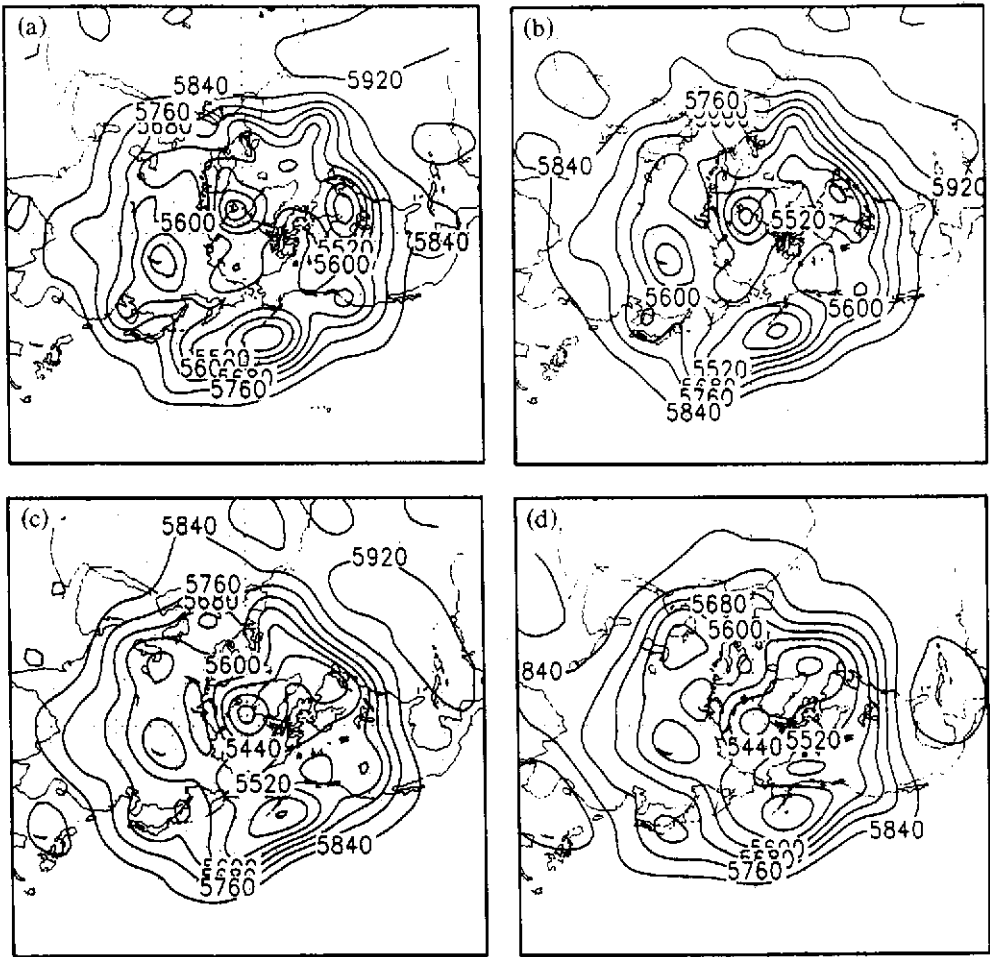


图7 NISL 方案预报的 1993 年 6 月 1 日 00 时的位势高度场, $\Delta t=90 \text{ min}$
(a) 第一天预报; (b) 第二天预报; (c) 第三天预报; (d) 第四天预报

$$H_{500} = \sum_{ij} (h_{ij} - H_{ij}) / N, \tag{38}$$

均方根误差为

$$r = \sqrt{\sum_{ij} (h_{ij} - H_{ij} - H_{500})^2 / N}, \tag{39}$$

其中 N 表示样本点数。

表 1 给出了完全非内插半拉格朗日方案 (NISL) 和 Ritchie 非内插半拉格朗日方案 (RISL) 与欧拉方案 (EU) 的对比结果。从表中可以看到, 不论是全球平均误差还是均方根误差, NISL 方案的预报结果都更接近欧拉方案计算的结果; 从平均误差看, NISL 方案的平均误差增长很慢, 远小于 RISL 方案; NISL 方案的均方根误差也小于 RISL 方案, 随时间增长, NISL 方案的均方根误差有所增长, 但仍小于 RISL 方案。

表 1 NISL 方案和 RISL 方案与 EU 方案 500 hPa 位势高度场的全球平均误差和均方根误差, 1993 年 6 月 1 日 5 天预报的例子

		第一天预报	第二天预报	第三天预报	第四天预报	第五天预报
全球平均误差	NISL-EU	-1.05	-2.67	-1.76	0.04	-2.45
	RISL-EU	-3.79	-4.87	-10.65	-16.41	-20.99
全球均方根误差	NISL-EU	17.25	16.11	19.37	23.88	23.15
	RISL-EU	19.98	24.70	25.02	30.60	35.05

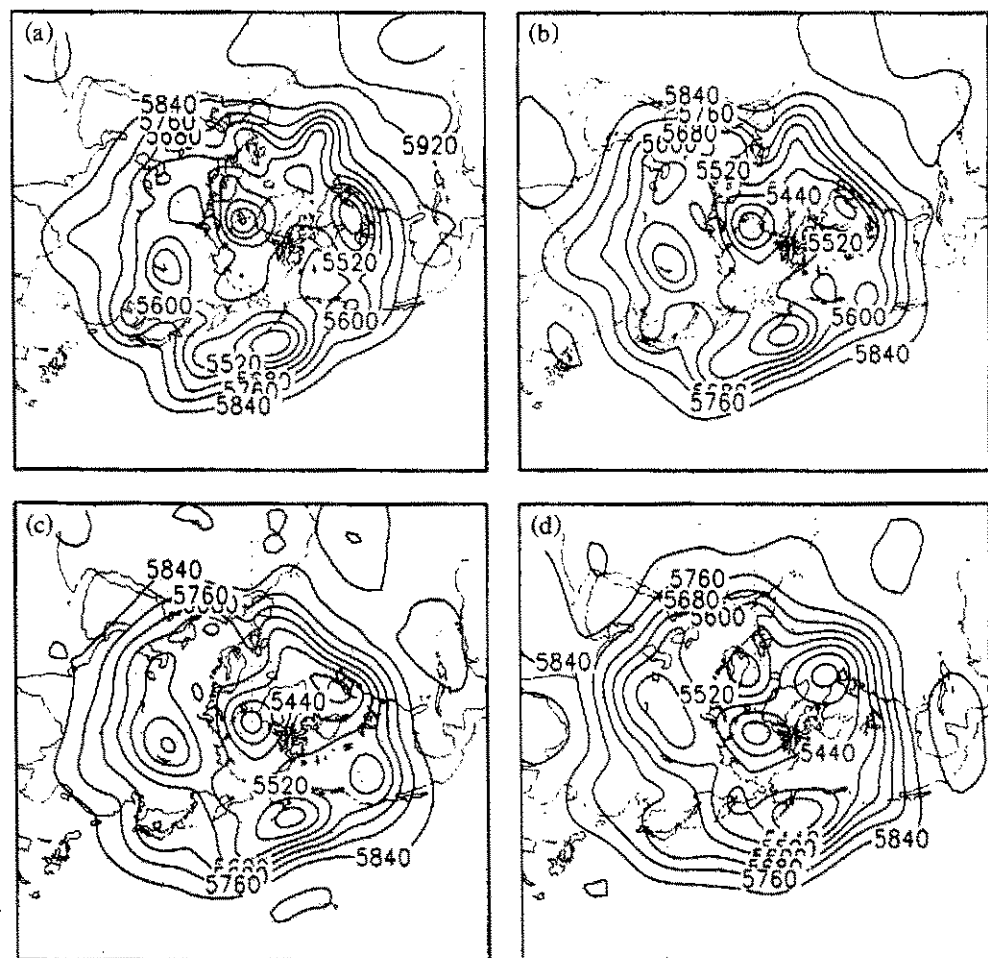


图 8 RISL 方案预报的 1993 年 6 月 1 日 00 时的位势高度场, $\Delta t = 90 \text{ min}$

(a) 第一天预报; (b) 第二天预报; (c) 第三天预报; (d) 第四天预报

通过以上分析, 可以看到, 尽管两种方案的结果与欧拉方案大体相同, 但完全内插半拉格朗日方案确实能够采用较大时间步长稳定积分, 而且计算结果更接近用较小结果步长积分的欧拉方案的预报结果。

5 结论

本文针对原有半拉格朗日格式中存在的内插问题, 进一步发展了完全非内插的半拉格朗日方法, 证明了格式的稳定性, 并将此格式在一维、二维问题上应用, 得到如下一些结论:

(1) 此格式能够较好地应用于一维、二维问题, 时间步长较一般的内插方法有较大的提高, 节省了计算时间, 达到设计格式的目的, 同时为以后推广到三维打下了基础。

(2) 此格式在无粘 Burgers 方程上的应用表明: 它能较好地描写具有较大梯度的方程, 与 Ritchie 方案计算的结果大致相同, 两者都明显好于内插格式。这为以后描写水汽方程提供了依据。

(3) 此格式在二维浅水波方程上的应用表明: 它消除了一些场的人为光滑, 而保持了格式的稳积分。计算结果与 Ritchie 方案相比更接近用较小时间步长积分的欧拉方案的预报结果。

本工作的目的是为了以后推广到全球模式上, 目前进行的都是一些基础性的工作, 还需要大量的改进。但已表明这种格式是一种稳定、省时、有效的格式。

参 考 文 献

- 1 Staniforth, A. and Cote, J., Semi-Lagrangian integration scheme for atmosphere models—a review, *Mon. Wea. Rev.*, 1991, **119**, 2207~2223.
- 2 Fjortoft, R., On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation, *Tellus*, 1952, **4**, 179~194.
- 3 王宗皓, 若干显式差分格式的浮动算法 (Courant-Friedrich-Lewy稳定条件的灵活应用), *科学探索*, 1981, **1**(2), 11~24.
- 4 季仲贞、王斌, 保持总能量守恒的“半拉格朗日算法”, *计算物理*, 1996, **13**(4), 403~409.
- 5 Robert, A., A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equation, *Atmos. Ocean.*, 1981, **19**, 35~46.
- 6 Robert, A., Semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equation, *J. Meteor. Soc. Japan*, 1982, **60**, 319~325.
- 7 Williamson, D. and J. G. Olson, Climate simulation with a semi-Lagrangian version of the NCAR CCM2, *Mon. Wea. Rev.*, 1994, **122**, 1594~1610.
- 8 Ritchie, H., Implimentation of the semi-Lagrangian method in a high-resolution version of the ECMWF forecast model, *Mon. Wea. Rev.*, 1995, **123**, 489~514.
- 9 Ritchie, H., Eliminating the interpolation associated with the semi-Lagrangian scheme, *Mon. Wea. Rev.*, 1986, **114**, 135~146.
- 10 Chen Jiabin and Wang Jun, Studies on non-interpolating semi-Lagrangian scheme and numerical solution to KdV equation, *Adv. Atmos. Sci.*, 1996, **13**, 265~268.
- 11 Chen Jiabin and Wang Jun, On noninterpolation semi-Lagrangian scheme, CAS/JSC WGNE Report, 1996, **23**, 3.3~3.4.
- 12 Kuo, H.-C and R. T. Williams, Semi-Lagrangian solution to the inviscid Burgers equation, *Mon. Wea. Rev.*, 1990, **118**, 1278~1288.

An Application of Noninterpolating Semi-Lagrangian Scheme to One-Dimensional Burgers Equation and Two-Dimensional Shallow Water Equations

Wang Jun

(National Meteorological Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081)

Chen Jiabin

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract A new noninterpolating semi-Lagrangian scheme is further developed here based on the authors' previous noninterpolating semi-Lagrangian scheme. It eliminates any interpolation, so it eradicates the numerical smoothing caused by interpolation. Its stability in computation is proved. The new scheme is applied to one- and two-dimensional models respectively in order to test its property. The one-dimensional model uses Burgers equation with large variable gradient; and the two-dimensional one, the shallow water equation. The performances of the scheme are assessed by comparing their computational results with those obtained by Ritchie's noninterpolating semi-Lagrangian scheme, Eulerian scheme or the usual interpolating semi-Lagrangian scheme. It is shown that the new scheme eliminates the interpolation and so it gets rid of the smoothing caused by it. The computational accuracy is improved to some degree. The work makes a preparation for applying the scheme to global spectral models.

Key words: semi-Lagrangian scheme; computational stability; artificial smoothing