

自适应网格技术在数值模式中的应用研究^{*}

II. 二维问题

康红文 王鹏云 徐祥德

(中国气象科学研究院, 北京 100081)

摘要 用一个具有解析解的二维动力锋生成过程算例, 对比自适应网格方案和固定网格方案的优劣, 结果表明: 同等误差要求下, 固定网格方案的网格点数为自适应网格方案的3倍。从时间演化上看, 自适应网格对温带气旋的预报, 在同等误差要求下, 可比固定网格的预报延长10小时以上。文章对加权系数选取及对解的影响进行了分析, 从几个切面的计算结果展示了自适应网格对网格的优良安排并能抓住锋面特征结构。文章分析了光滑性、正交性对结果的影响, 结果表明: 网格的光滑性影响有一个优化值; 在网格适当安排情况下, 要适度考虑正交性。

关键词: 自适应网格; 锋生; 数值模式

1 前言

在文献[1]中, 作者从计算格式、权重系数、定常问题和非定常问题、解的梯度大小等多方面对自适应网格技术的性能进行了研究, 由于所选算例均具有解析解, 因而从计算结果能清楚地对照出自适应网格和固定网格的优劣。该文对自适应网格在减少误差、节约算时、节省内存方面均给出了与固定网格比较的定量结果, 其结果令人鼓舞。

然而, 在实际大气中遇到的问题都至少是二维的。自适应网格在二维问题上的应用的性能如何? 本文选择了一个简化的二维气旋锋生成过程作为算例, 因其能反映实际大气中一些常见天气过程如温带气旋锋面、中尺度气旋等的发展演变, 且具有解析解, 因而用它来检验二维自适应网格技术在中尺度模式中的应用效果是较为理想的。

2 气旋锋生算例及其精确解

为研究大气环流中常见的气旋和锋的生消过程, Dosewell 分析了一个由于涡旋流场的作用而产生的气旋锋生成过程^[2]。

锋区由一个任意的标量场 Q (如位温) 的密集带代表。考虑一个二维情况, 其初始场在 x 方向无变化, 在 y 方向有一梯度, 即

1999-07-05 收到, 1999-08-30 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040907、国家自然科学基金资助项目 49735180 以及国家攀登专项“海峡两岸及邻近地区暴雨试验研究”95-专-03 共同资助

$$Q = -thy \quad (1)$$

图 1a 和 b 为初始时刻 Q 的等值线及其沿 y 方向的剖面, 图 1c 为锋生函数的初始分布。锋生函数 F 的定义是

$$F \equiv \frac{d}{dt} |\nabla Q|. \quad (2)$$

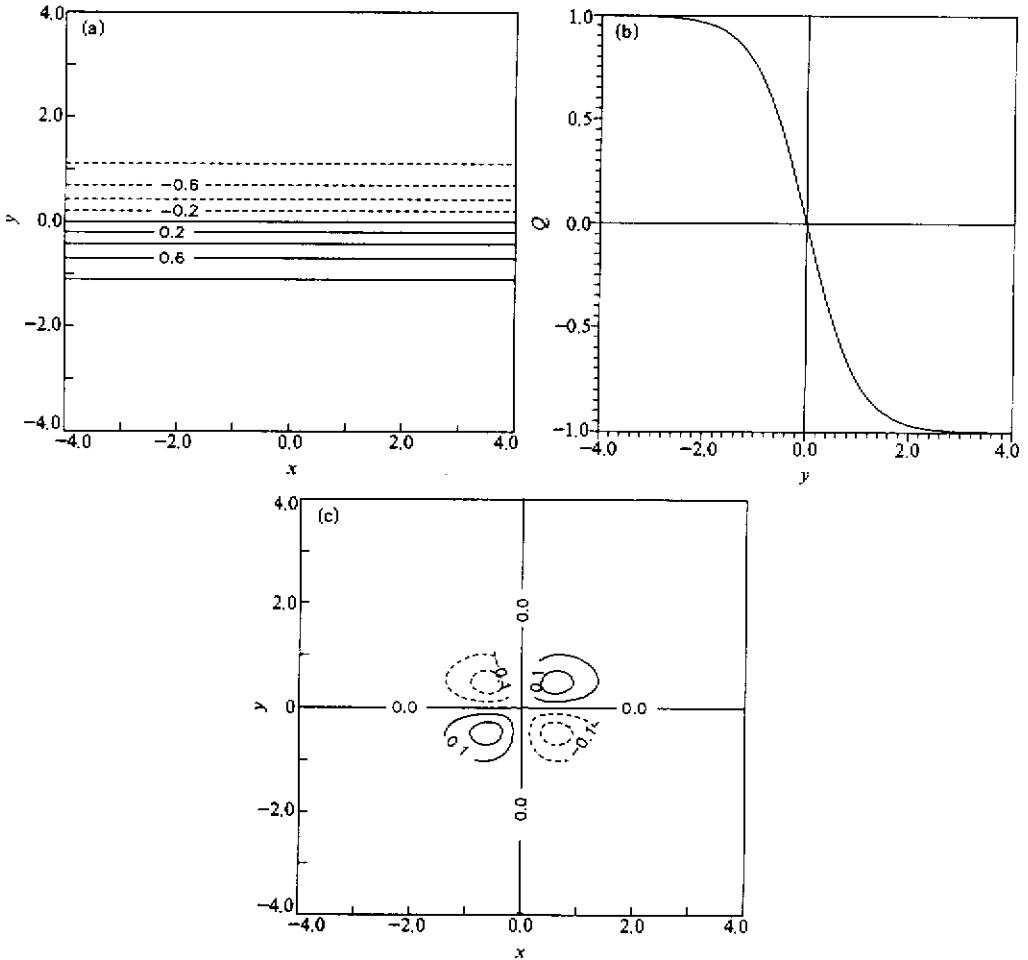


图 1 (a) Q 初始分布; (b) 初始时刻 Q 沿 y 方向的剖面; (c) 锋生函数 F 初始分布

为简化问题的求解, 假定 Q 为守恒量 (当 Q 为位温时, 即假定为绝热过程), 则

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

或

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

水平风场给定为一个定常无辐散的气旋性涡旋, 即风向沿围绕中心点的圆的切线逆时针方向, 风速沿径向方向变化, 径向风速和切向风速分别为

$$\begin{aligned} V_r &= 0, \\ V_t &= \operatorname{sech}^2 r \operatorname{thr}. \end{aligned} \quad (4)$$

图 2 给出流场矢量分布、风速等值线及沿径向的变化。Davies-Jones^[3]和 Dosewell^[4]分析并给出方程 (1)、(3)、(4) 联立的解析解, 见 (5) 式。图 3 给出 Q 的时间演化在 $t=1, 3.14, 6.28, 10$ 时刻的等值线分布。

$$Q(r, \theta, t) = Q(r, \theta, 0)[r \sin(\theta - \omega t)], \quad (5)$$

r, θ 分别是极坐标下的坐标, ω 是角速度。

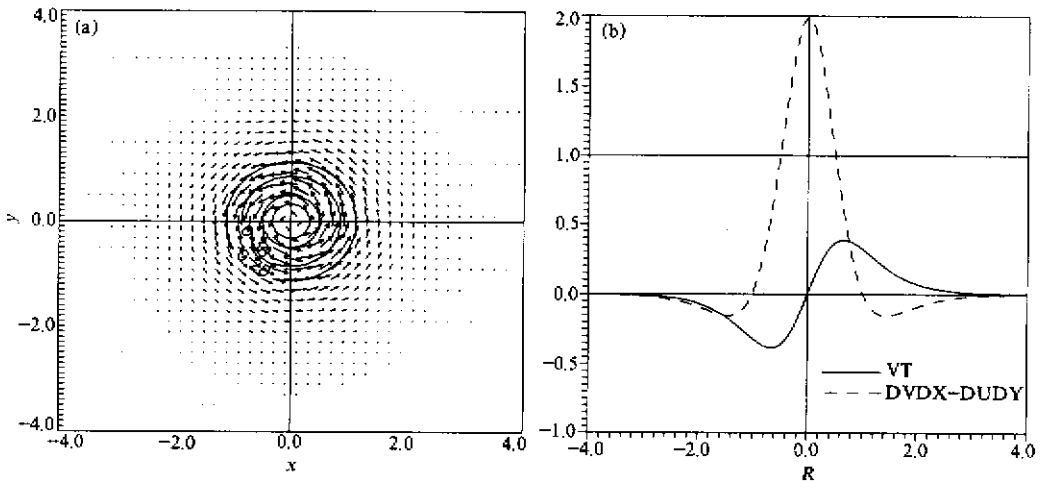


图 2 (a) 流场矢量分布、等值线分布; (b) 切向风速的径向剖面

将

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla Q + w \frac{\partial Q}{\partial z}$$

代入式 (2), 可得

$$F = e \cdot \left[\nabla \left(\frac{dQ}{dt} \right) - (\nabla Q \cdot \nabla) \bar{V} - \frac{\partial Q}{\partial z} \nabla w \right], \quad (6)$$

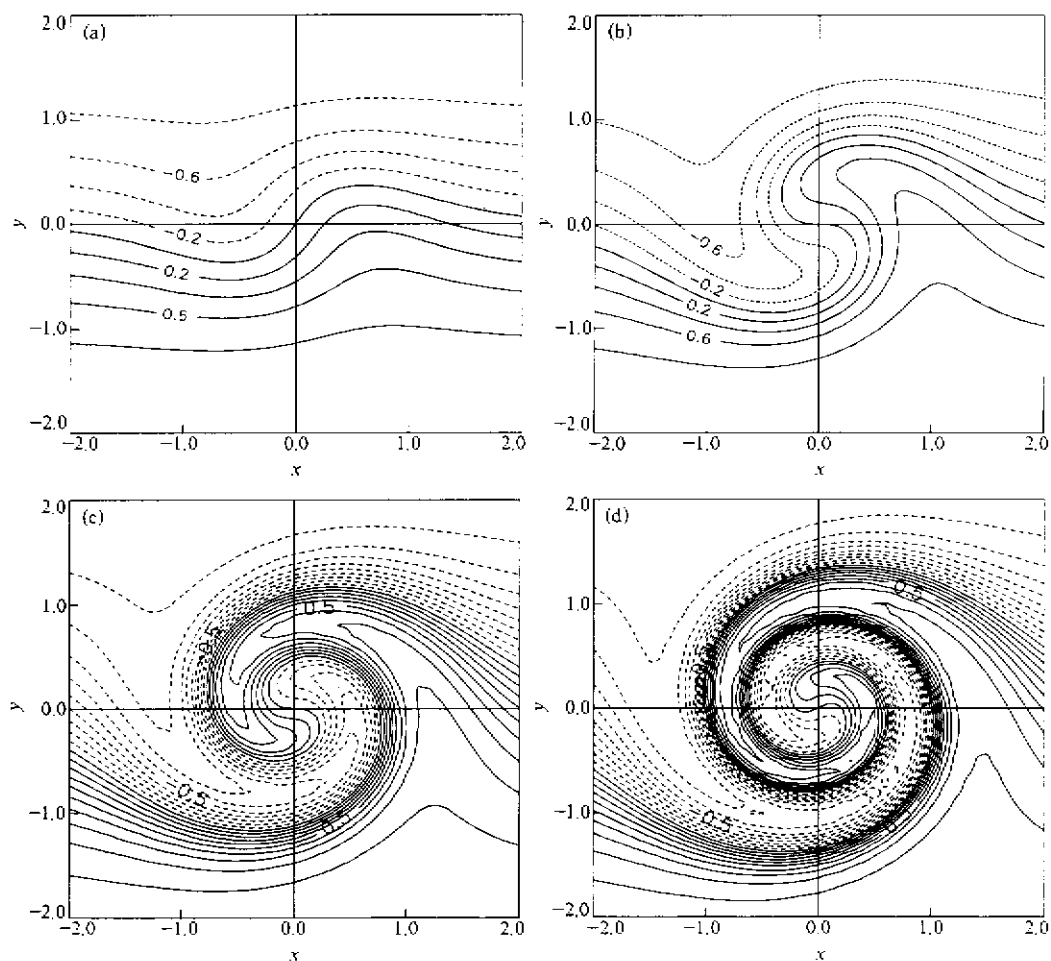
其中 e 为单位向量。(6) 式右端第一项为 Q 的非守恒项; 第二项为水平风场的变形和辐散项; 第三项为垂直速度在水平方向变化产生的倾斜项。

如前所述, 本算例中假定 Q 为守恒量, 即

$$\frac{dQ}{dt} = 0,$$

且只考虑水平风场影响, 故 (6) 式简化为

$$F = e \cdot [- (\nabla Q \cdot \nabla) \bar{V}],$$

图3 Q 的等值线分布(a) $t=1$; (b) $t=3.14$; (c) $t=6.28$; (d) $t=10$

进一步推导, 得

$$F = \frac{|\nabla Q|}{2} |F(r)| \cos 2\beta - \frac{|\nabla Q|}{2} D, \quad (7)$$

其中

$$F(r) = [(u_x - v_y)^2 + (v_x + u_y)^2]^{1/2},$$

β 为变形轴与 Q 等值线的夹角。

式 (7) 右端第一项为变形场对锋生的贡献; 第二项 D 为水平辐散对锋生的贡献, 因本算例中风场为无辐散, 故 $D=0$ 。

图 4 给出与图 3 对应时刻锋生函数的等值线分布。

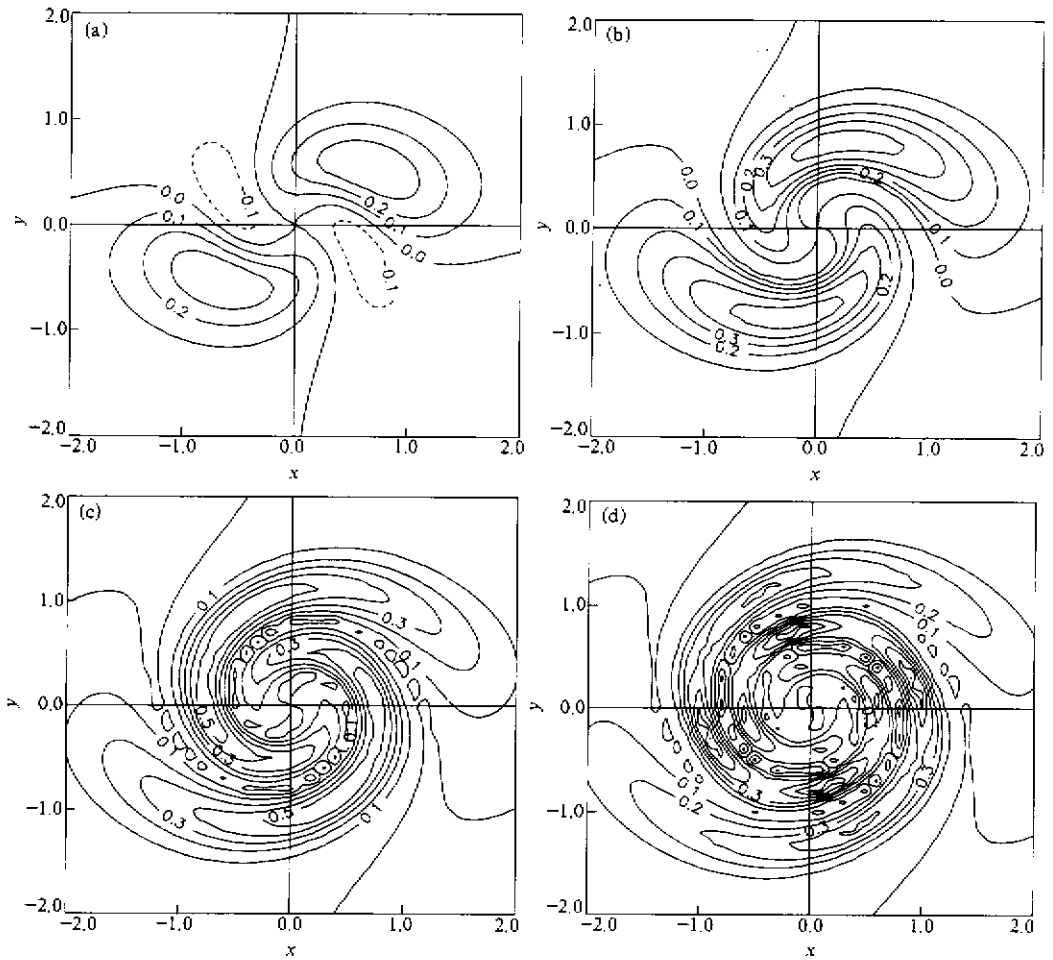


图4 锋生函数的等值线分布
(a) $t=1$; (b) $t=3.14$; (c) $t=6.28$; (d) $t=10$

3 自适应网格技术

对于方程 (3), 首先将其从物理坐标系 (x, y, t) 转换到计算坐标系 $(\varepsilon, \eta, \tau)$, 其中 $t = \tau$, 此时方程 (3) 变为

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = -U_E \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} - V_E \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} U_E &= [(u - x_\tau)y_\eta - (v - y_\tau)x_\eta]G^{-1/2}, \\ V_E &= [(v - y_\tau)x_\varepsilon - (u - x_\tau)y_\varepsilon]G^{-1/2}, \\ G^2 &= x_\varepsilon y_\eta - x_\eta y_\varepsilon. \end{aligned}$$

二维自适应网格技术,从原理上讲是一维自适应网格技术的扩展,但它得考虑网格正交性的影响。我们依旧采用 Brackbill 和 Saltzman^[5]的方法,来构造网格方程。在考虑正交性时引进其度量 $\lambda_0(g_{12})^2$,其中 λ_0 是可调参数。网格方程的构造通过求解下列变分问题:

$$\min \int F(g, w) dx dy \eta, \quad (9)$$

其中 $F = (1 + \lambda_w w^2)G + \lambda_0(g_{12})^2$, w 是权函数, λ_w 是加权系数。其相应的欧拉方程是^[6]

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial g_{ji}} + \frac{\partial F}{\partial g_{jk}} \right) \frac{\partial^2 x_l}{\partial \varepsilon^j \partial \varepsilon^k} + \frac{\partial x_l}{\partial \varepsilon^j} \left(\sum_{m=1}^2 \frac{\partial w}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial \varepsilon^k} \right) \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial F}{\partial g_{kj}} + \frac{\partial F}{\partial g_{jk}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial x_l}{\partial \varepsilon^j} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial g_{mn}} \left(\frac{\partial F}{\partial g_{jk}} + \frac{\partial F}{\partial g_{jk}} \right) \right] \sum_{p=1}^2 \left(\frac{\partial^2 x_p}{\partial \varepsilon^m \partial \varepsilon^k} \frac{\partial x_p}{\partial \varepsilon^n} + \frac{\partial x_p}{\partial \varepsilon^m} \frac{\partial^2 x_p}{\partial \varepsilon^k} \right) \right\} \right\rangle \\ & - \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x_l} = 0, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

与一维时情况相同,我们也让 w 和 g_{12} 分别除以其最大值,使得它们的值分布在0和1之间,这样便于 λ_w 和 λ_0 的调控。

为了求解(10)式,令其左边为 R ,根据 Brackbill 和 Saltzman^[5]的迭代方法,有

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} + \frac{\partial R_l^{(k)}}{\partial x_{ij}} \delta x_{ij} + \frac{\partial R_l^{(k)}}{\partial y_{ij}} \delta y_{ij}, \quad l = 1, 2. \quad (11)$$

通过迭代,当 $R^{(k+1)}$ 小于某一误差值后,此时的格点位置即为新坐标值。

本文数值计算时均采用中心差分格式。

现在来确定权函数 w 。Brackbill 和 Saltzman^[5]、Dietachmayer^[6]等分别给出了不同权函数定义方法。有的因考虑了二阶偏导项,使得 w 的表达式变得十分繁复。实际上权函数的选取最终为了网格疏密有个适当的安排,而且可以通过调节 λ_w 来控制疏密程度,因而只要能找到一个合理的能抓住算例特征的量,从而能有效地调节网格的疏密,便能成为权函数。当然,权函数对计算结果的影响也是很大的,我们将结合计算结果再予以分析。

考虑三个函数:

$$\begin{aligned} f_1 &= u^2 + v^2, \\ f_2 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2, \\ f_3 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta} \right)^2. \end{aligned}$$

权函数由它们的组合构成,

$$w = w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3, \quad (12)$$

其中 w_1 、 w_2 、 w_3 分别是可调系数。

4 计算结果及与精确解的比较

定义一个误差度量方法;

$$E_{rms} = \left\{ \frac{\iint [Q(x,y) - Q_E(x,y)]^2 dx dy}{\iint dx dy} \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

其中 Q_E 是精确值。

将计算区域定义为一个正方形, $-4 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$, 以下结果若无特别说明, 计算终止时间默认值是 $t=6.28$ 个时间单位, 对于自适应网格, 各参数默认值分别是:

$$\lambda_w = 100, \quad \lambda_0 = 0, \quad m = 25, \quad w_1 = 10, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 0.$$

λ_w 、 λ_0 在 (9) 式中已给出了说明, w_1 、 w_2 、 w_3 在 (12) 式中也作了说明。 m 是光滑系数, 将在 4.4 节中给出说明。

4.1 网格点数的影响

在表 1 中, $E_{rms, f}$ 表示固定网格 (fixed) 方案时误差, $E_{rms, a}$ 表示自适应网格 (adaptive) 方案时误差, 从表 1 可以看出不论采用固定网格方案还是采用自适应网格方案, 误差均随网格点数增加逐渐减小。通过对比可以发现: 在网格点数相同时, $E_{rms, a}$ 大约只有 $E_{rms, f}$ 的一半。

表 1 误差随网格点数的变化

N	15×15	21×21	31×31	41×41	51×51	61×61	81×81
$E_{rms, f}$	9.73	7.31	4.24	3.03	2.08	1.57	0.96
$E_{rms, a}$	5.43	3.75	1.92	1.34	0.92	0.73	0.56

以 A31 表示算例采用自适应网格方案且网格点数取 31×31 , F51 表示算例采用固定网格方案且网格点数取 51×51 , 其余符号如 A41、A51、F61、F81 依此类推。由表 1 可见:

$$E_{rms}(A31) < E_{rms}(F51),$$

$$E_{rms}(A41) < E_{rms}(F61),$$

$$E_{rms}(A51) < E_{rms}(F81).$$

通过对比上面各不等式左右两边的网格点数, 可以认为: 在同等误差要求下, 采用自适应网格方案后, 只需固定网格 $1/3$ 的网格点数。若所求变量有 10 个气象参数或更多, 自适应网格对内存的节省是十分可观的。

当 N 取 81×81 时, 图 5 给出 Q 及 F 的计算结果, 它与精确解图 3c 和图 4c 非常接近。而当 N 取 31×31 时, Q 及 F 的计算结果如图 6 所示, 图 6a 与精确解图 3c 对比, 发现旋度不够, 在中心区 Q 值已基本失真。图 6b 与精确解图 4c 对比, 发现锋生函数等值线已很模糊, 很难看出图 4c 所示的图型。

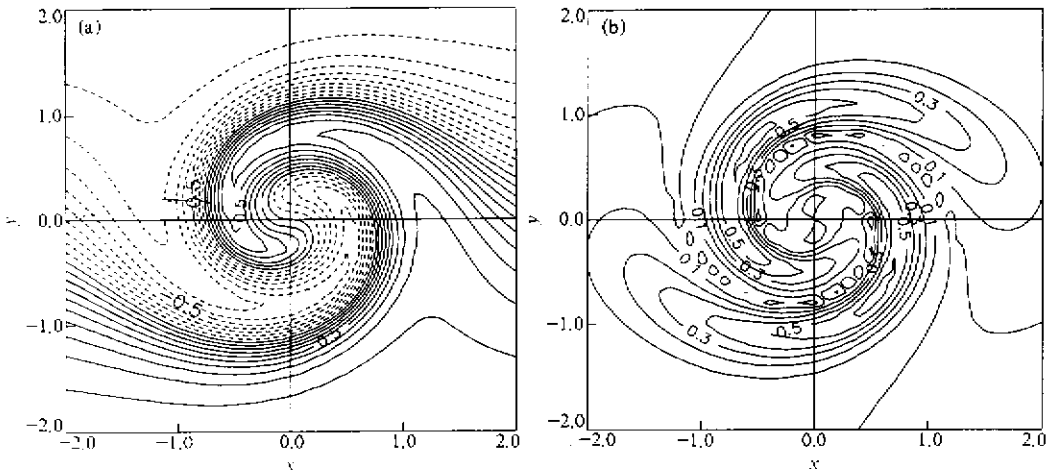


图5 $t=6.28$ 的数值解, 固定网格点数 81×81

(a) Q ; (b) 锋生函数 F

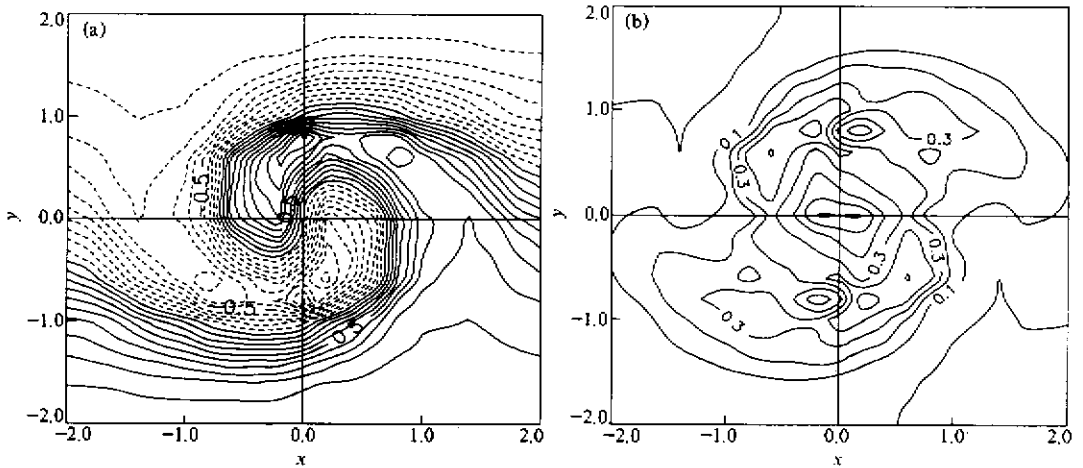


图6 $t=6.28$ 的数值解, 固定网格点数 31×31

(a) Q ; (b) 锋生函数 F

采用自适应网格后, N 依然取 31×31 , 计算结果如图 7 所示, 它与精确解图 3c 和图 4c 已基本符合。网格点分布如图 8 所示, 可见网格点已基本集中在中心附近, 因而在图 7 中心区域的计算结果有所改善。下面给出两个剖面的计算情况。我们取通过中心点, 沿 $J = (J_{\max} - 1) / 2 + 1$ 的一条线作一个切面, J_{\max} 是 y 向网格点数, 图 9a 给出了 $N=31 \times 31$ 时固定网格结果及自适应网格结果与精确解的比较, 图 9b 给出了 $N=31 \times 31$ 时自适应网格结果以及 $N=61 \times 61$ 时固定网格结果与精确解的比较。我们发现, 当 $N=31 \times 31$ 时, 固定网格在中心域网格点过少, 不能有效地表示出这里特征结构, 因而计算失真。而自适应网格结果则有显著改善, 它能将网格点集中在中心附近, 在远离

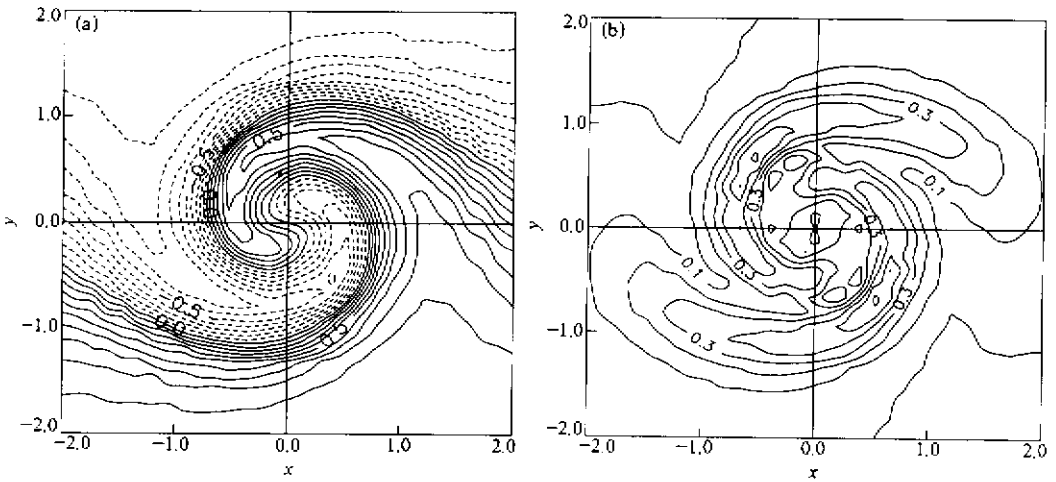


图7 $t=6.28$ 的数值解, 自适应网格点数 31×31

(a) Q ; (b) 锋生函数 F

中心区, 自适应网格技术即使只分配了很少的网格点, 计算也很准确。相比之下, 固定网格方案在这里浪费了许多网格, 而在中心区网格点又不足于表达锋面的基本结构和变化。只有当 N 取 61×61 时, 固定网格结果才与精确解接近, 而取得同样效果的自适应网格点数只需要 31×31 。

4.2 随时间演化

表 2 给出了 $N=31 \times 31$ 时, 采用固定网格方案和采用自适应网格方案误差随时间增长的情况。

我们用 AT7 表示算例采用自适应网格方案且 $t=7$; 同样, 用 FT4 表示算例采用固定网格方案且 $t=4$ 。其余符号依此类推。从表 2 可见:

$$\begin{aligned}
 E_{rms}(AT7) &\approx E_{rms}(FT4), \\
 E_{rms}(AT8) &< E_{rms}(FT5), \\
 E_{rms}(AT9) &< E_{rms}(FT6), \\
 E_{rms}(AT10) &< E_{rms}(FT7).
 \end{aligned}$$

表 2 误差随时间变化

t	3	3.14	4	5	6	6.28	7	8	9	10
$E_{rms, t}$	1.19	1.29	2.03	3.15	4.04	4.24	5.77	7.57	9.07	11.31
$E_{rms, a}$	1.07	1.07	1.1	1.34	1.77	1.92	2.33	3.10	3.72	4.75

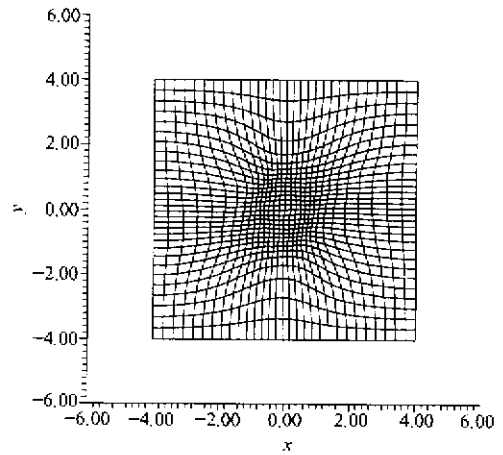


图 8 自适应网格点位置 31×31

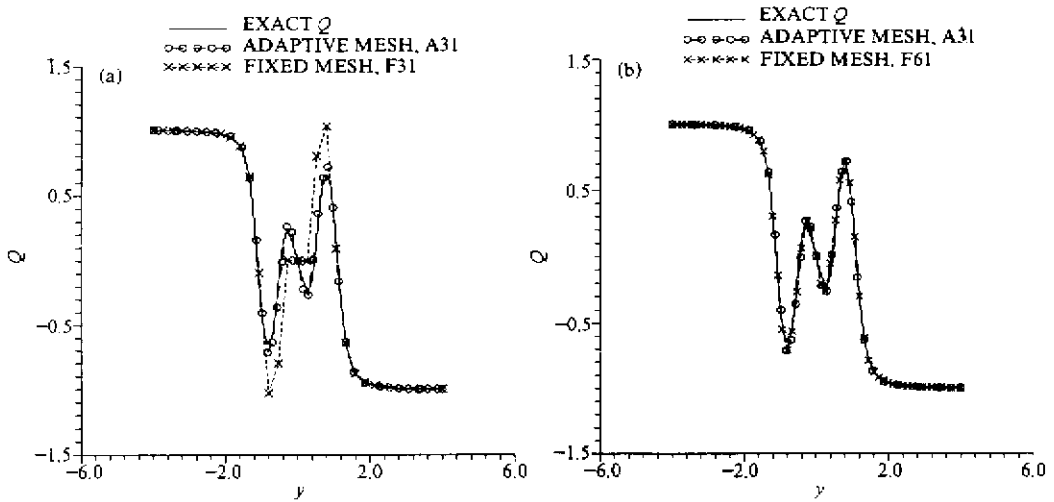


图 9 固定网格结果与自适应网格结果及精确解的比较
 (a) 固定网格 31 × 31; (b) 固定网格 61 × 61

在同等误差要求下，用自适应网格预报可以增加 3 个多时间单位。而且采用固定网格方案在 $t=6$ 后误差增长幅度显著加快，采用自适应网格方案则在 $t=10$ 内误差增长较慢。对于温带气旋， $t=6.28$ 相当于 24 个小时^[3]。由此推论，采用自适应网格后，对温带气旋的预报可以延长 10 个小时以上。

4.3 权函数及加权系数的影响

本文计算所用权函数是根据 (12) 式来定义的。我们在调试时主要是选用下面两种组合： $w_2 = 0$ ，其他两项进行组合； $w_3 = 0$ ，其他两项进行组合。由此进行了大量的试验。发现“ $w_1 = 10, w_2 = 1, w_3 = 0$ ”时，误差 E_{rms} 最小。从调试情况看，权函数不同，对精度影响很大。因此对一个实际问题，确定权函数是很关键的。关于权函数的选取，我们将另文专门论述。对于“ $w_1 = 10, w_2 = 1, w_3 = 0$ ”这样的组合，之所以结果较好，是因为它既能有效地将网格点集中在速度大的地方，又能适度地随着 Q 梯度的变化而变化，而且其表达式也很简单。

当权函数确定后，我们对加权函数系数的影响又进行了试验，见表 3。

表 3 加权函数系数的影响

λ_w	10	50	80	100	110	120	150	200	300
E_{rms}	3.75	2.52	2.04	1.92	1.91	1.93	2.14	2.59	3.67

λ_w 选取决定了网格的疏密程度。因此既要考虑局部适度加密，又要照顾全局平衡。从表 3 可见， λ_w 对误差有一定的影响，它有一个最优值，即 $\lambda_w = 110$ ，在最优值附近， λ_w 的选取对误差影响不大。当 λ_w 较小时，网格不能有效地集中在 Q 变化大的区域，因而误差较大；当 λ_w 较大时，网格又过于集中在 Q 变化大的区域，因而误差也较大。应该说，对不同的问题有不同的最优值。在最优值附近， λ_w 的选取对误差影响不大。

4.4 光滑系数的影响

为使得自适应网格沿空间过渡光滑, 我们通过对其权函数进行光滑处理,

$$w_{ij,\text{new}} = \frac{1}{3} w_{ij} + \frac{1}{6} (w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}). \quad (14)$$

用 m 表示对 (14) 式重复的次数, m 越大, 网格沿空间变化越光滑。我们对 m 的取值也进行了试验, 见表 4。

表 4 光滑系数的影响

m	5	10	15	20	23	25	27	30	40	50
E_{rms}	2.81	2.44	2.08	1.95	1.93	1.92	1.92	1.93	1.94	1.96

可见 m 对误差也有一定影响, m 有一个最优值, 即 $m=25$, 在最优值附近, 对误差影响不大。当 m 较小时, 因网格沿空间变化不够光滑, 因此误差较大。在最优值之后, 即使 m 增加很多, 对误差的影响也不大, 因为此时网格沿空间变化已足够光滑。

4.5 网格正交性影响

对网格正交性影响, 我们也做了探讨, 表 5 给出 λ_0 取值对 E_{rms} 的影响, 其他参数取默认值。

表 5 网格正交性影响

λ_0	0	1	5	10	20	50	100	200	500
E_{rms}	1.92	2.2	2.8	3.06	3.36	3.72	3.89	4.08	4.16

随着正交性增强, 网格逐渐趋于固定网格时的情况。从表 1 可知, 固定网格的误差 $E_{\text{rms}}(F31)=4.24$ 。从表 5 可见, 误差逐渐趋于这个值。图 10 给出了 $\lambda_0=10$ 时网格点分布。可见为了使得网格正交, 而不得不牺牲网格疏密的适当安排。实际上, λ_0 较大时, 网格变化很小, 与固定网格基本一样。这表明此时由于考虑了正交性, 而使得网格加权函数几乎起不到作用。我们知道, 固定网格是完全正交的, 变网格后, 正交性必然受损害, 但它换来的是网格的适当安排。当然, 在网格有适当安排前提下, 正交性越好就越有利。特别对实际问题模拟时, 网格局部可能变形很严重, 则坐标间相关性增强, 因关联而使求导公式不准确, 误差增大。

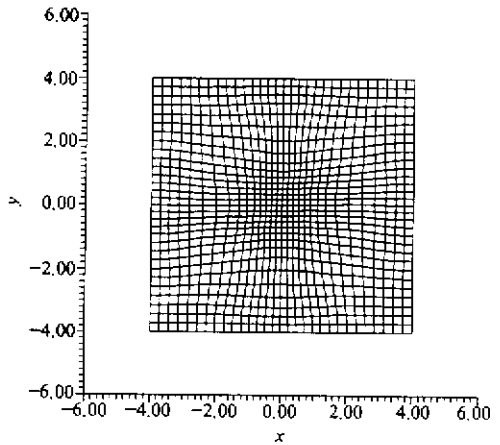


图 10 自适应网格点(31×31)在 $\lambda_0=10$ 时的位置

5 结论

通过以上数值试验, 得出如下结论:

(1) 自适应网格能有效地将网格点集中在所关心的区域, 因而能抓住主要特征。在网格点数相同时, 自适应网格方案误差基本上比固定网格方案误差要小一倍多。在同等误差要求下, 采用自适应网格方案后, 只需固定网格 $1/3$ 的网格点数。

(2) 在同等误差要求下, 用自适应网格方案预报可以增加预报时间。如对温带气旋的预报可以延长 10 小时以上。

(3) 权函数选取很重要。既要能抓住特点, 使网格有效地集中, 同时又要使网格变化适度。

(4) 加权系数、光滑系数均有最优值, 在最优值附近其对误差影响不大。在网格有适当安排情况下, 要适度考虑正交性。

总之, 通过用精确解检验自适应网格各方面的性能特点, 为自适应网格在数值模式上的使用奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 康红文、王鹏云、徐祥德, 自适应网格技术在数值模式中的应用研究 I. 一维问题, 大气科学, 2000, 24(5), 615~624.
- 2 Dosewell, C. A. III., A kinematic analysis of frontogenesis associated with a nondivergent vortex, *J. Atmos. Sci.*, 1984, 41, 1242~1248.
- 3 Davies-Jones, R., Comments on "A kinematic analysis of frontogenesis associated with a nondivergent vortex.", *J. Atmos. Sci.*, 1985, 42, 2073~2075.
- 4 Dosewell, C. A. III., Reply to: Comments on "A kinematic analysis of frontogenesis associated with a nondivergent vortex.", *J. Atmos. Sci.*, 1985, 42, 2076~2079.
- 5 Brackbill, J. U. and J. S., Saltzman, Adaptive zoning for singular problems in two dimensions, *J. Comput. Phys.*, 1982, 46, 342~368.
- 6 Dietachmayer, G. S. and K. K. Droegemeier, Application of Continuous dynamic rgrid adaptive techniques to meteorological modelling, *Mon. Wea. Rev.*, 1992, 120, 1675~1722.

A Study of Application of Adaptive Grids Technique in Numerical Model Part II: Two-Dimensional Case Test

Kang Hongwen, Wang Pengyun and Xu Xiangde

(Chinese Academy of Meteorological Science, Beijing 100081)

Abstract A two-dimensional kinematic frontogenesis process is considered in examining the use of adaptive grids of numerical models. From the comparison of the numerical results using fixed and adaptive grids with exact solution, it is found that the adaptive runs with $1/3$ fewer grid points has the same accuracy, and it can catch the structure of the front because of its excellent redistribution of grid points. The results also shows that the adaptive runs can increase by more than 10 hours for the forecasting of extratropical cyclone with the same accuracy in comparison with fixed grids. The sensitivity of results to the choice of weight function is great. There is an optimum value for grid smoothness and the errors increase as the grid orthogonality is considered.

Key words: adaptive grids; frontogenesis; numerical model