切变基本纬向流中赤道 Rossby 包络孤立波 *

赵 强 刘式适
(北京大学地球物理系, 北京 100871)

P4 A

摘 要 利用多重尺度摄动法, 从描写赤道 Rossby 波的正压大气位涡度方程中推导出在切变基本纬向流中非线性赤道 Rossby 波包演变所满足的非线性 Schrödinger 方程, 并得到其单个包络孤立子波解, 分析基本流切变对非线性赤道 Rossby 波动的影响.

关键词: 赤道Rossby波; Schrödinger方程; 包络孤立子

1 引言

热带大气运动对全球气候变化有着密切联系, 因此, 人们对热带大气运动作了多方面的研究, 对热带大气运动规律有了许多新的认识, 其中, 热带大气波动理论可以说是低纬度大气动力学研究的重要内容。目前, 赤道波动理论已成为赤道大气动力学奠基石, 为我们了解许多低纬度大尺度天气现象提供一个动力学框架。Matsuno[1]导出赤道 β 平面大气运动的线性波动并分析研究它们的特性; Domaracki 和 Loesch[2]、Ripa[3]研究了赤道波与波之间的相互作用。Boyd[4~6]研究非线性 Kelvin 波及利用摄动法从赤道 β 平面浅水模式原始方程组导出小振幅长赤道 Rossby 波随时间演变满足 KdV 方程或者 mKdV 方程, 这表明存在赤道 Rossby 孤立波。Kindle[7]的数值试验指出一般风应力可激发孤立子, 很强的 El Niño 一般可产生二或三个孤立波列。Kindle 的结果一方面证实了 Boyd 纯解析理论 (参见文献[5]) 的可信性, 另一方面又提出新的问题, 例如, 有记录以来最强的 1982 年 El Niño 事件, 它的强度暗示其可以产生非常强的 Rossby 孤立子, 那么 Boyd[5]由小振幅扰动展开得到的解析理论能否应用到中等或者大振幅孤立波。为解决此问题, Boyd[8]将文献[5]中采用的摄动理论进一步推广到高阶问题, 并提出赤道 Modon 的概念。然而对于 KdV (mKdV) 型孤立波是考虑长波近似 (纬向波数 $k \to 0$, 或者 $L_y / L_x \ll 1$) 的情况, 在实际大气中, 特别是考虑到大气中存在大振幅的 Rossby 波, 长波近似严格来讲并不成立。本文利用多重尺度摄动法, 从描写赤道 Rossby 波的正压大气位涡度方程中推导出非线性赤道 Rossby 波包演变所满足的非线性 Schrödinger 方程, 并讨论其包络孤立波解特征。由于包络 Rossby 孤立子不使用长波近似, 因而更适合于描写大振幅非线性赤道 Rossby 波。

1999-04-28 收到, 1999-07-05 收到修改稿
* 高等学校骨干教师资助项目

2 非线性 Schrödinger 方程的导出

Charney[9]指出，在无凝结潜热释放大气中，热带大气运动是准水平和准无辐散的，在这种模型中只存在 Rossby 波而将重力波滤去了。为了使讨论尽可能简单化，我们采用一个简单模式方程，而不是直接应用复杂的原始方程组。适于描写赤道 Rossby 波的正压位涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\beta y+\nabla^2\psi-\frac{\beta^2y^2}{c_0^2}\psi\right)=0, \tag{1}$$

其中 ψ 为流函数；∇^2 为 Laplace 算子；β 为 Rossby 参数且为常数；$c_0^2=gH$为重力波速的平方。注意到(1)式中位涡度与在中纬度广泛采用的准地转位涡度$q=f+\nabla^2\psi-\lambda^2\psi$（其中$f=f_0+\beta y, \lambda=f_0/c_0$）是有区别的。方程（1）可以应用正规渐近展开法得到[10]，它已滤去了惯性–重力波、混合 Rossby–重力波和 Kelvin 波，而只保留了 Rossby 波，因此，利用方程（1）可以更加突出地分析研究赤道 Rossby 波。因为讨论热带赤道附近的波动运动，在远离赤道时可以认为波动消失，当 $y\to\pm\infty$时，经向速度 $v=0$，即相当于取如下边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \qquad \text{当} \quad y\to\pm\infty. \tag{2}$$

若令

$$t=\left(\frac{1}{\beta L}\right)t_*, \qquad (x,y)=L(x_*,y_*), \qquad \psi=(UL)\psi_*, \tag{3}$$

其中$L=\sqrt{c/\beta}$为赤道 Rossby 变形半径，无量纲变量带星号表示。将（3）式代入方程（1），则得到其无量纲形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\nabla}^2\psi+\varepsilon J(\psi,\hat{\nabla}^2\psi)+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{4}$$

其中

$$J(a,b)=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}, \qquad \varepsilon=\frac{U}{\beta L^2}, \qquad \hat{\nabla}^2=\nabla^2-y^2, \tag{5}$$

J 为 Jacobi 算子，无量纲参数 ε 相当于赤道 Rossby 数，它表征非线性的强弱。为了方便，在上面我们已省略了无量纲方程（4）中变量的星号。Benney[11]和 Yamagata[12]最早获得了中高纬度大气中非线性 Rossby 调制波所满足的非线性 Schrödinger 方程，Benney 把弱切变作为摄动参数来导出基本气流切变中大振幅 Rossby 波所满足的非线性 Schrödinger 方程；Yamagata 利用局地 Rossby 数作为摄动参数。在本文中如果 $U=10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $g=10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $H=10^4$ m，那么$\varepsilon\sim O(10^{-2})$为小参数，就很自然地被作为摄动量。一般情况下要求得（4）式的解析解是很困难的，但是由于非线性项带有小参数，可以利用多重尺度摄动法来求它的弱非线性解. 由于地球大气运动具有多时空尺度的特征，为此除了快变量（x, y, t）外，可以引入如下慢时空变量:

$$T_1=\varepsilon t,\qquad T_2=\varepsilon^2 t;\qquad X_1=\varepsilon x,\qquad X_2=\varepsilon^2 x. \tag{6}$$

于是可作相应的变换:

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2};\qquad \frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial X_2}, \tag{7}$$

因此可以把方程（4）改写为

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\right)+\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial X_1}+\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial X_2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial X_2}\right)\right]\right\}\times\left[\hat\nabla^2\psi+2\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial X_1}\right.\\&\quad\left.+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial X_2}\right)+2\varepsilon^3\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1\partial X_2}+\varepsilon^4\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2}\right]\\&\quad+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial X_2}\right)\psi=0.\end{aligned} \tag{8}$$

将流函数 ψ 分解为纬向平均及其扰动偏差两部分，即

$$\psi=-\int^y\bar u(s)\mathrm{d}s+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\psi_m(x,y,t;X_1,X_2,T_1,T_2), \tag{9}$$

在上面表达式中，假定基本纬向流仅为 y 的函数，扰动流函数已按 WKB 方法展开为幂级数形式。将（9）式代入（8）式得到各阶摄动问题的方程，

$O(\varepsilon)$阶问题:

$$\mathscr{L}(\psi_1)=0, \tag{10}$$

$O(\varepsilon^2)$阶问题:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi_2)=&-\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\bar u\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\hat\nabla^2\psi_1-(1-\bar u'')\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}\\&-2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X_1}-J(\psi_1,\hat\nabla^2\psi_1),\end{aligned} \tag{11}$$

$O(\varepsilon^3)$阶问题:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi_3)=&-\left(\frac{\partial}{\partial T_2}+\bar u\frac{\partial}{\partial X_2}\right)\hat\nabla^2\psi_1-(1-\bar u'')\frac{\partial\psi_1}{\partial X_2}-2\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\bar u\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X_1}\\&-J\left(\psi_1,2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X_1}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial X_1^2}+2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X_2}+2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial X_1}\right)\\&-\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial y}\hat\nabla^2\psi_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X_1}\hat\nabla^2\psi_1-\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\bar u\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\hat\nabla^2\psi_2\\&-(1-\bar u'')\frac{\partial\psi_2}{\partial X_1}-J(\psi_1,\hat\nabla^2\psi_2)-J(\psi_2,\hat\nabla^2\psi_1),\end{aligned} \tag{12}$$

其中算子$\mathscr{L}(\ )$定义为

$$\mathscr{L}(\ )=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\nabla}^2+(1-\bar{u}'')\frac{\partial}{\partial x}. \tag{13}$$

显然，ψ_1满足的（10）式是线性方程，在方程（10）中设其谐波解为

$$\psi_1=A(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_1(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\text{c.c.}, \tag{14}$$

其中A为波动的复振幅，它是慢变量的函数，其随时空的演变特征将由高阶近似问题来确定；k为纬向波数，ω为圆频率，$\Phi_1(y)$决定波动的经向结构，c.c.表示它前项的共轭。将（14）式代入（10）式就是下面关于Φ_1的方程：

$$\left[L_1+\frac{k(1-\bar{u}'')}{\hat{\omega}}\right]\Phi_1=0, \tag{15}$$

其相应边界条件为$\Phi_1|_{y\to\pm\infty}=0$，其中算子$L_1$定义为

$$L_1=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-k^2-y^2, \tag{16}$$

而$\hat{\omega}=k\bar{u}-\omega$为Doppler位移频率。方程（15）在边界条件下的本征值来确定。方程（15）与边界条件构成所谓Sturm-Liouville型方程的本征值问题。对于确定的基本风速$\bar{u}$，这是确定的本征值问题，则Φ_1是可以完全确定的本征函数。对于一般的速度廓线$\bar{u}(y)$，这是一个变系数问题，一般不能够求得解析解。关于纬向基本气流对线性赤道波动的影响，已有许多详细研究（例如文献[13]）。对于不考虑基本气流影响的特殊情况（即$\bar{u}=0$），那么方程（15）就退化为Weber方程，该方程的本征值为

$$-k^2-\frac{k}{\omega}=2n+1,\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{17}$$

其中n为经向模态数。相应的本征函数为

$$\Phi_1(y)=C_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}H_n(y),\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{18}$$

其中C_n是任意常数，$H_n(y)$为n阶Hermite多项式。对于给定n，由（17）式易导出自由Rossby振荡频率ω的频散关系以及纬向传播的相速度c分别为

$$\omega=-\frac{k}{k^2+2n+1},\qquad c=-\frac{1}{k^2+2n+1},\qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{19}$$

这就是Matsuno[1]结果中的一种情况。对于赤道Rossby长波$k\approx O(\varepsilon^{1/2})$，则有

$$c(k,n)-c(0,n)\approx O(\varepsilon). \tag{20}$$

（20）式则表明对于满足（19）式的赤道Rossby长波，尽管其波数可以相差较大$O(1)$；不同波的相速度却相差很小$O(\varepsilon)$。从而扰动波包将在$T\approx O(\varepsilon^{-1})$时间尺度缓慢地频散，即弱频散。如果波动振幅也为$O(\varepsilon)$，这时将看到弱非线性作用可与弱频散作用平衡而产生单一驼峰式孤立波。在不考虑基本气流和没有包括任何物理上的强迫作用情况下，Boyd[5]利用摄动法从赤道β平面浅水模式原始方程组导出赤道非线性Rossby孤

立波，当 n 为奇数时，Rossby 波振幅满足 KdV 方程；当 n 为偶数时，Rossby 波振幅满足 mKdV 方程。从 Boyd 的文章中可以看出，其零阶问题实际上就是长波近似后的方程组，它已经滤去高频惯性-重力波、混合 Rossby-重力波、Kelvin 波和短 Rossby 波，而只保留了线性、非频散 Rossby 长波

$$c=-\frac{1}{2n+1},\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{21}$$

相当于（19）式中纬向波数$k\to 0$。而在一阶或者二阶近似，弱频散性和弱非线性同时出现导出 KdV 方程或者 mKdV 方程。因此，KdV 方程或者 mKdV 方程是在长波近似下得到的，它描述的是小振幅超长尺度非线性赤道 Rossby 波。然而，长波近似不仅依赖于运动的尺度，而且依赖于经向尺度与纬向尺度之比（即$L_y / L_x \ll 1$）。对于经向尺度较大的赤道 Modons[8]来说，长波近似显然是不合适的。

在$O(\varepsilon)$阶问题得出的结论同线性情况完全相同，它只能确定波动的空间结构，而不能确定波动振幅的演变。尽管在$O(\varepsilon)$阶问题的解确定了频率$\bar{\omega}$，但波动振幅的函数$A(X_1,X_2;T_1,T_2)$仍未确定。因此，有必要考虑下一阶近似问题，将（14）式代入（11）式并利用（15）式，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi_2)=&-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial T_1}+\bar{u}\frac{\partial A}{\partial X_1}\right)L_1\Phi_1+(1-\bar{u}''-2k\bar{\omega})\Phi_1\frac{\partial A}{\partial X_1}\right]e^{i(kx-\omega t)}\\&-ik\left(\Phi_1\frac{d}{dy}L_1\Phi_1-\frac{d\Phi_1}{dy}L_1\Phi_1\right)A^2e^{2i(kx-\omega t)}+\text{c.c.}\\=&\frac{1-\bar{u}''}{\bar{u}-c}\Phi_1\left(\frac{\partial A}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial A}{\partial X_1}\right)e^{i(kx-\omega t)}+ikQ(y)A^2e^{2i(kx-\omega t)}+\text{c.c.},\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$c_1=c+\frac{2k^2(\bar{u}-c)^2}{1-\bar{u}''},\qquad Q(y)=\Phi_1^2\frac{d}{dy}\left(\frac{1-\bar{u}''}{\bar{u}-c}\right). \tag{23}$$

利用本征函数的正交性对方程（22）消除长期项，则有

$$\frac{\partial A}{\partial T_1}+c_g\frac{\partial A}{\partial X_1}=0, \tag{24}$$

其中

$$c_g=c+\frac{I_1}{I},\qquad I_1=2k^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1^2\,dy,\qquad I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\bar{u}''}{(\bar{u}-c)^2}\Phi_1^2\,dy. \tag{25}$$

该式表明，在$O(\varepsilon^2)$问题、波动振幅 A 是以c_g速度传播。从物理意义上讲c_g就是群速度，这时方程（22）可变为

$$\mathscr{L}(\psi_2)=ikQ(y)A^2e^{2i(kx-\omega t)}+\text{c.c.}. \tag{26}$$

假定方程（26）有如下谐波解

$$\psi_2=B(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_2(y)e^{2i(kx-\omega t)}+\text{c.c.}, \tag{27}$$

把（27）式代入（26）式可得到关于Φ_2的方程:

$$B\left[L_2+\frac{k(1-\bar{u}'')}{\hat{\omega}}\right]\Phi_2=\frac{A^2Q(y)}{2(\bar{u}-c)},\tag{28}$$

及其边界条件 $\Phi_2|_{y\to\pm\infty}=0$，其中算子$L_2$定义为

$$L_2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-(2k)^2-y^2.\tag{29}$$

在方程（28）中可以看出 A 和 B 不是两个独立变量，由于 A 和 B 都为慢变量（X_1,X_2,T_1,T_2）的函数，并且 B 与A^2成比例，为简单化起见，显然可以将 B 取成如下形式

$$B=A^2,\tag{30}$$

将（14）式和（27）式代入（12）式，得:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi_3)=&-\left\{\left[\left(\frac{\partial A}{\partial T_2}+\bar{u}\frac{\partial A}{\partial X_2}\right)L_1+(1-\bar{u}'')\frac{\partial A}{\partial X_2}+2\mathrm{i}k\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1\partial X_1}+\mathrm{i}\hat{\omega}\frac{\partial A}{\partial X_2}\right)\right.\right.\\&+\left.\mathrm{i}(\hat{\omega}+2k\bar{u})\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2}\right]\Phi_1-\mathrm{i}kA^*B\left[\left(\Phi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+2\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}y}\right)L_2\Phi_2\right.\\&\left.\left.-\left(2\Phi_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}y}\right)L_1\Phi_1\right]\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}+\square,\end{aligned}\tag{31}$$

其中A^*表示 A 的共轭。□代表与$\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}(kx-\omega t)}$和$\mathrm{e}^{\pm3\mathrm{i}(kx-\omega t)}$相联系的其他项。利用（15）式和（28）式及（30）式，则（31）式可以改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi_3)=&\left\{\frac{1-\bar{u}''}{\bar{u}-c}\left[\frac{\partial A}{\partial T_2}+c_1\frac{\partial A}{\partial X_2}+\mathrm{i}k\frac{\bar{u}-c}{1-\bar{u}''}(c+2c_g-3\bar{u})\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2}\right]\Phi_1\right.\\&\left.+\mathrm{i}k\left[\frac{\Phi_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{Q}{\bar{u}-c}\right)+\frac{Q}{(\bar{u}-c)}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}y}\right]|A|^2A\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}+\square.\end{aligned}\tag{32}$$

事实上，没有必要求解ψ_3，利用与（32）式相联系的可解性条件就可以确定波包振幅 A 和基本流的演变方程。显然，利用本征函数的正交性对以上方程消除长期项，则得到振幅 A 必须满足以下非线性 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial A}{\partial T_2}+c_g\frac{\partial A}{\partial X_2}\right)+\alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2}+\delta|A|^2A=0,\tag{33}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{I_2}{I},\qquad \delta=\dfrac{I_3}{I},\qquad I_2=k\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(c+2c_g-3\bar{u})}{\bar{u}-c}\Phi_1^2\,\mathrm{d}y,\\ I_3=k\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\bar{u}-c)}\left[\frac{\Phi_1^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{Q}{\bar{u}-c}\right)+\frac{\Phi_1 Q}{(\bar{u}-c)}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}y}\right]\mathrm{d}y,\end{cases}\tag{34}$$

α 和 δ 分别是所谓的频散系数和 Landau 常数。在上述推导过程中，已假定$\bar{u}\neq c$，（15）式、（33）式和（34）式可以完全确定切变基本流中非线性赤道 Rossby 波包的经

向结构。(33) 式就是描述切变基本流中赤道 Rossby 波包演变的非线性 Schrödinger 方程，它反映了切变基流中非线性赤道 Rossby 波的特征。仿效 Jeffrey 和 Kawahara[14]作坐标变换

$$T = T_2, \qquad X = \frac{1}{\varepsilon}(X_2 - c_g T_2) = X_1 - c_g T_1, \tag{35}$$

则 (33) 式化为标准的非线性 Schrödinger 方程。

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial T} + \alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \delta|A|^2 A = 0. \tag{36}$$

(36) 式已被深入地研究过 (参见文献[15])，当 $\alpha\delta<0$ 时，非线性 Schrödinger 方程的渐近解与其相应的线性 Schrödinger 方程的渐近解的性质是定性一致的，都为频散波列。它们的差别在于非线性项的作用是使波包变宽，非线性波列比线性波列频散快。这就是所谓"散焦"或"超线性"频散现象。当 $\alpha\delta>0$ 并且$\int_{-\infty}^{+\infty}|A(X,0)|\mathrm{d}X>0.904$ 时，非线性 Schrödinger 方程的解由频散波列和若干包络孤立波构成，包络孤立波的个数和性质由初始扰动状态决定，光滑的初始扰动将其大部分能量贡献给孤立波，极少部分能量留给衰减的波列。由于 α 和 δ 的值与扰动波数和基本气流状态有关，故对于一定的基本流分布，只有某些特定波数的扰动才能产生包络孤立波。当基本气流不存在切变 ($\bar{u}=$常数) 时，由 (23) 式可知 $Q=0$，这时由 (34) 式可知 $\delta=0$，非线性项消失，因而非线性 Schrödinger 方程就不存在。由此可见，非线性 Schrödinger 方程 (36) 式成立的必要条件是基本气流有水平切变。而实际情形，基流的切变总是存在的，故非线性赤道 Rossby 孤立波也是经常存在的。我们还注意到，当 $k\to 0$ 时，频散系数 α 和 Landau 常数 δ 都消失，这表明方程 (36) 并不适于描写非线性超长尺度 ($k\to 0$) Rossby 波，这时候就有必要由 KdV 或 mKdV 方程来替代非线性 Schrödinger 方程[5]。方程 (36) 有如下单个包络孤立波解为

$$A(X,T) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}\,M\,\mathrm{sech}\,M(X - 2\alpha\xi T)\exp\{\mathrm{i}[\xi X - \alpha(\xi^2 - M^2)T]\}, \tag{37}$$

其中参数 M 和 ξ 分别表示 Rossby 包络孤立波的振幅和移速，它们的值由$A(X,T)$的初始状态来决定。将 (37) 式和 (14) 式代入 (9) 式，可以得到包络 Rossby 孤立波的流函数为

$$\psi = -\int^{y}\bar{u}(s)\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}\,M\,\mathrm{sech}\,\varepsilon M(x - Vt)\Phi_1(y)\exp[\mathrm{i}(Kx - \Omega t)], \tag{38}$$

其中

$$V = c_g + 2\varepsilon\alpha\xi, \qquad K = k + \varepsilon\xi, \qquad \Omega = \omega + \varepsilon\xi c_g + \alpha\varepsilon^2(\xi^2 - M^2). \tag{39}$$

(37) 和 (38) 两式表明，赤道 Rossby 包络孤立波传播速度 V 等于线性 Rossby 波的群速度加上一小修正量，载波波数 K 等于线性 Rossby 波的波数 k 加上一小修正量，载波频率 Ω 等于线性 Rossby 波的频率 ω 加上两项小修正量，而且它与波振幅有关，显示非线性波的特征。这说明赤道大气中 Rossby 波与切变的基本气流的非线性相

互作用，可以使大气中形成具有 sech 形状孤立子。而且这种 Rossby 包络孤立波是并不需要长波近似条件的频散波，它可以解释赤道大气中西移 Modons 最后通过自身能量频散而崩溃消失。然而，对于 KdV 和 mKdV 型 Rossby 孤立波则必须要求长波近似，并且它们是具有sech^2形状的非频散结构[16]，因而在没有包括任何物理上的强迫耗散作用下，它们是难以解释赤道大气中西移 Modons 崩溃消失的物理机制。此外，由(25) 式看出，包络孤立波的存在还必须

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\bar{u}''}{(\bar{u}-c)^2}\Phi_1^2\,\mathrm{d}y\neq 0, \tag{40}$$

这表示不能产生正压不稳定[17]。事实上，一旦产生正压不稳定，就不可能保持恒定波型了。

3 结论

本文利用多重尺度摄动法，从描写赤道 Rossby 波的正压大气位涡度方程中推导出在切变基本纬向流中非线性赤道 Rossby 波包演变所满足的非线性 Schrödinger 方程，并得到其包络孤立波解。这说明赤道大气中 Rossby 波与切变的基本气流的非线性相互作用，可以使大气中形成 Rossby 包络孤立子，而且这种孤立波是并不需要长波近似条件的频散波，它可以解释赤道大气中西移 Modons 最后通过能量频散而崩溃消失。因此、赤道 Rossby 包络孤立子比具有非频散结构的且必须要求长波近似条件的 KdV 和 mKdV 型 Rossby 孤立波更适合于描写向西移动赤道 Modons 事件。

参 考 文 献

1 Matsuno, T., Quasi-geostrophic motions in the equatorial area., *J. Meteor. Soc. Japan*, 1966, **44**, 25～43.

2 Domaracki, A. and A. Z. Loesch, Nonlinear interactions among equatorial waves, *J. Atmos. Sci.*, 1977, **34**,486～498.

3 Ripa, P., Nonlinear wave-wave interactions in a one-layer reduced-gravity model on the equatorial β plane, *J. Phys. Oceanogr.*, 1982, **12**, 97～111.

4 Boyd, J. P., The nonlinear equatorial Kelvin wave, *J. Phys. Oceanogr.*, 1980a, **10**, 1～11.

5 Boyd, J. P., Equatorial solitary waves, Part I: Rossby solitons, *J. Phys. Oceanogr.*, 1980b, **10**, 1699～1717.

6 Boyd, J. P., Equatorial solitary waves, Part 4: Kelvin soliton in a shear flow, *Dyn. Atmos. Oceans*, 1984, **8**, 173～184.

7 Kindle, J. C., On the generation of Rossby solitons during El Niño, *Hydrodynamics of the Equatorial Ocean*, J. C. J. Nihoul, Ed., Elsevier, 1983, 353～368.

8 Boyd, J. P., Equatorial solitary waves, Part 3: Westward-traveling modons, *J. Phys. Oceanogr.*, 1985, **15**, 46～54.

9 Charney, J. G., A note on large-scale motions in the tropics, *J. Atmos. Sci.*, 1963, **20**, 607～609.

10 Gill, A. E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 1982.

11 Benney, D. J., Large amplitude Rossby waves, *Stud. App. Math*, 1979, **60**, 1～10.

12 Yamagata, T., The stability, modulation and long wave resonance of a planetary wave in a rotating two-layer fluid on a channel beta plane, *J. Meteor. Soc. Japan*, 1980, **58**, 160～171.

13 Zhang, C. D. and P. J. Webster, Effects of zonal flows on equatorial trapped waves, *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**, 3632～3652.

14 Jeffrey, A. and Kawahara, T., *Asymptotic Methods in Nonlinear Theory*, Pitman Publishing Inc, 1982.
15 Boyd, J. P., Equatorial solitary waves, Part II: Envelope solitons, *J. Phys. Oceanogr.*, 1983, **13**, 428~449.
16 Malgu i, P. and Malanotte–Ri oli P., Nolinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking, Part I: The analytical theory, *J. Atmos. Sci.*, *1984*, **41**, 2620~2628.
17 Kuo, H. L., Dynamical instability of two–dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteor.*, 1949, **6**, 105~122.

Equatorial Rossby Envelope Solitary Waves in a Mean Zonal Flow with Shear

Zhao Qiang and Liu Shikuo
(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract With a simple shallow–water model on an equatorial β–plane, the nonlinear equatorial Rossby waves in a mean zonal flow with meridional shear are investigated by the asymptotic method of multiple scales. The nonlinear Schrödinger equation, satisfied by large amplitude Rossby envelope solitary waves in shear basic flow, is derived. The effects of basic flow shear on the nonlinear equatorial Rossby waves are also analyzed.

Key words: equatorial Rossby waves; Schrödinger equation; envelope soliton