

不稳定横波型扰动谱点分布的半圆定理^{*}

张 铭 张立凤 P4 A

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

摘 要 作者在理论上对不稳定横波型扰动的谱点分布作了分析, 得到了该不稳定扰动谱点分布的半圆定理, 即谱点分布在复平面上以原点为圆心、以 R_0 为半径的下半圆域上; 并发现扰动的波长越短, 模式层顶越高, 静力稳定度参数的绝对值越大, 基流的垂直切变越大, 纬度越高则该半径就越大。

关键词: 不稳定; 横波型扰动; 半圆定理

1 引言

横波型扰动指的是扰动等位相面垂直于基本气流, 即传播方向与基本气流平行的扰动。过去对该扰动不稳定的研究主要集中在天气尺度和对流尺度波段上, 斜压不稳定即为天气尺度波段上横波型扰动的不稳定^[1,2]。20世纪80年代后期张可苏又进一步研究了惯性尺度波段上横波型扰动的不稳定问题, 并指出可归结于求解一个超几何方程的特征值问题^[3]; 但该求解只是原则性的, 既困难也不直观, 为此她给出了用打靶法求得的数值解。以后我们也分别将该问题作为一个初值问题和将该微分方程的特征值问题离散化为一个矩阵的特征值问题来进行数值求解, 并对其结果作了讨论^[4,5]。人们认为, 有一类强风暴、锋面以及与其相联系的雨带的发生与该不稳定有关。

显然, 若在理论上能对不稳定横波型扰动的谱点分布作出估计, 则可得该不稳定增长率的上界, 并能看到环境参数变化对该不稳定增长率的影响, 这可用半圆定理的形式表现出来, 是一件很有意义的工作。

2 数学模型

本文采用张可苏研究横波型扰动不稳定的数学模型^[3], 由该模型可得横波型扰动满足的常微分方程及其相应的边界条件^[6]:

$$\begin{cases} (\sigma + \bar{u}k)[f^2 - (\sigma + \bar{u}k)^2] \frac{d^2 W}{dz^2} - 2f^2 k \bar{u}_z \frac{dW}{dz} \\ \quad - k^2 (\sigma + \bar{u}k)[N^2 - (\sigma + \bar{u}k)^2] W = 0, \\ W|_{z=0} = 0, \quad W|_{z=H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2000-07-18 收到, 2000-11-16 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040907 和国家自然科学基金资助项目 49875008 共同资助

这里 W 是该扰动垂直运动的振幅, N^2 、 f 则分别为大气基本场的静力稳定度参数和地转参数, 这里均取为常数. H 则为模式顶高, 可认为是逆温层底或对流层顶的高度. $\bar{u}(z)$ 为基本气流, 设其随高度呈线性变化, 注意到不失一般性可设 $\bar{u}(z) = \bar{u}_z z$, $z \in [0, H]$, 这里 $\bar{u}_z = d\bar{u}/dz$ 且为大于零的常数, 故有 $\bar{u}_H \geq \bar{u}(z) > 0$, 此处 $\bar{u}_H$ 为模式顶处的基流. σ 为扰动频率, 其为复数, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, 当 $\sigma_i < 0$ 时则有不稳定发生. k 为扰动波数且设 $k > 0$, 设 $\lambda = \sigma + \bar{u}(z)k$, 这里 λ 为 z 的函数, 当发生不稳定时因 σ 为复数, 显然 $\lambda \neq 0$. 此时 (1) 式可写成:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{2f^2 k \bar{u}_z}{\lambda(f^2 - \lambda^2)} \frac{dW}{dz} - k^2 \frac{N^2 - \lambda^2}{f^2 - \lambda^2} W = 0. \quad (2)$$

用 W 的共轭 W^* 乘 (2) 式, 在 $[0, H]$ 上对 z 积分, 并考虑到 $\frac{N^2 - \lambda^2}{f^2 - \lambda^2} = 1 + \frac{N^2 - f^2}{f^2 - \lambda^2}$ 和在上下边条件上有 $W = 0$, 可得:

$$\int_0^H \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz + k^2 \int_0^H |W|^2 dz + 2f^2 k \bar{u}_z \int_0^H \frac{1}{\lambda(f^2 - \lambda^2)} W^* \frac{dW}{dz} dz + k^2 \int_0^H \frac{N^2 - f^2}{f^2 - \lambda^2} |W|^2 dz = 0. \quad (3)$$

令

$$I_0 = \int_0^H \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz + k^2 \int_0^H |W|^2 dz > 0, \quad (4)$$

则有

$$2f^2 k \bar{u}_z \int_0^H \frac{1}{\lambda(f^2 - \lambda^2)} W^* \frac{dW}{dz} dz + k^2 \int_0^H \frac{N^2 - f^2}{f^2 - \lambda^2} |W|^2 dz = -I_0. \quad (5)$$

对方程两边取模后有

$$\left| 2f^2 k \bar{u}_z \int_0^H \frac{1}{\lambda(f^2 - \lambda^2)} W^* \frac{dW}{dz} dz + k^2 \int_0^H \frac{N^2 - f^2}{f^2 - \lambda^2} |W|^2 dz \right| = I_0. \quad (6)$$

利用一些不等关系, (6) 式可写为

$$2f^2 k \bar{u}_z \int_0^H \frac{1}{|\lambda| |f^2 - \lambda^2|} |W^*| \left| \frac{dW}{dz} \right| dz + k^2 |N^2 - f^2| \int_0^H \frac{1}{|f^2 - \lambda^2|} |W|^2 dz \geq I_0. \quad (7)$$

对 (7) 式应用积分中值定理, 有

$$\frac{2f^2 k \bar{u}_z}{|\lambda_c| |f^2 - \lambda_c^2|} \int_0^H |W^*| \left| \frac{dW}{dz} \right| dz + \frac{k^2 |N^2 - f^2|}{|f^2 - \lambda_d^2|} \int_0^H |W|^2 dz \geq I_0, \quad (8)$$

这里

$$\begin{cases} |\lambda_c| = |\sigma + k\bar{u}(z_c)| = |\sigma + k\bar{u}_c| > 0, & z_c \in [0, H], \\ |\lambda_d| = |\sigma + k\bar{u}(z_d)| = |\sigma + k\bar{u}_d| > 0, & z_d \in [0, H]. \end{cases} \quad (9)$$

在此记 $\bar{u}(z_c)$ 为 $\bar{u}_c$, $\bar{u}(z_d)$ 为 $\bar{u}_d$, $\bar{u}_H$ 为 $\bar{u}(H) = \bar{u}_z H$ 。这样有

$$|f^2 - \lambda_c^2| = |\lambda_c + f| \cdot |\lambda_c - f| = |\sigma + k\bar{u}_c + f| \cdot |\sigma + k\bar{u}_c - f| > 0, \quad (10a)$$

同理, 有

$$|f^2 - \lambda_d^2| = |\lambda_d + f| \cdot |\lambda_d - f| = |\sigma + k\bar{u}_d + f| \cdot |\sigma + k\bar{u}_d - f| > 0, \quad (10b)$$

令

$$\tau = \min(|\sigma + k\bar{u}_c|, |\sigma + k\bar{u}_d|, |\sigma + k\bar{u}_c + f|, |\sigma + k\bar{u}_c - f|, |\sigma + k\bar{u}_d + f|, |\sigma + k\bar{u}_d - f|) > 0, \quad (11)$$

在此 τ 有 $\tau = |\sigma + \Delta|$ 的形式, Δ 为 $k\bar{u}_c$, $k\bar{u}_d$, $k\bar{u}_c + f$, $k\bar{u}_c - f$, $k\bar{u}_d + f$, $k\bar{u}_d - f$ 中之一。用 τ 和 τ^2 分别置换 (8) 式分母中的 $|\lambda_c|$ 和 $|f^2 - \lambda_c^2|$, $|f^2 - \lambda_d^2|$ 项, 考虑到 (11) 式后知分母变小, 故不等式 (8) 左边增大, 则有

$$\frac{2f^2 k\bar{u}_z}{\tau^3} \int_0^H |W|^2 dz + \frac{k^2 |N^2 - f^2|}{\tau^2} \int_0^H |W|^2 dz \geq I_0. \quad (12)$$

令 $\beta = \int_0^H |W|^2 dz > 0$, $\gamma = \int_0^H |W|^2 \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz > 0$, 并引入无量纲量 $\xi = \gamma / (\beta k)$ 后, 可得

$$\alpha \tau^3 - |N^2 - f^2| \tau - 2f^2 \bar{u}_z \xi \leq 0, \quad (13)$$

上式中:

$$\alpha \equiv \frac{I_0}{\beta k^2} = \frac{1}{\beta k^2} \int_0^H \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz + \frac{1}{\beta} \int_0^H |W|^2 dz = 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\int_0^H \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz}{\int_0^H |W|^2 dz} > 1. \quad (14)$$

不等式 (13) 也可写为标准形式:

$$\tau^3 + p\tau + q \leq 0, \quad (15)$$

这里有

$$\begin{cases} p = -\frac{|N^2 - f^2|}{\alpha} \leq 0, \\ q = -2f^2 \bar{u}_z \frac{\xi}{\alpha} \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

令 $F(\tau) = \tau^3 + p\tau + q$, 现考察函数 $F(\tau)$ 的图像和性质。虽然我们感兴趣的 τ 的区间是 $0 < \tau < +\infty$, 但为直观, 这里不妨设 $-\infty < \tau < +\infty$ 。显然此时函数 $F(\tau)$ 在纵轴上的截距为 q 。解方程 $\frac{dF(\tau)}{d\tau} = 3\tau^2 + p = 0$ 可知, $\tau_{1,2} = \pm \sqrt{-p/3}$ 。因 $p \leq 0$, 故 τ_1, τ_2

为实数。解方程 $\frac{d^2 F(\tau)}{d\tau^2} = 6\tau = 0$ 可知, $\tau_0 = 0$ 。此外有 $\tau \rightarrow \infty$ 时 $F(\tau) \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow -\infty$ 时

$F(\tau) \rightarrow -\infty$ 。由此可画出 $F(\tau)$ 的图像如图 1 所示, 并可知此时三次方程 $F(\tau) = 0$ 必有且仅有一非负实根 τ_+ 。注意到 $q \leq 0$ 且 $\tau \in [0, \tau_+]$ 时必有 $F(\tau) \leq 0$, 这样 τ_+ 即为 (14) 式成

立时 τ 的上界 (参见图 1)。考虑到 $\tau = |\sigma + \Delta|$, 显然此时有

$$\tau = |\sigma + \Delta| \leq \tau_+, \quad (17)$$

由此可得

$$|\sigma| - |\Delta| \leq |\sigma + \Delta| \leq \tau_+. \quad (18)$$

上式也可写为

$$|\sigma| \leq \tau_+ + |\Delta|. \quad (19)$$

注意到有

$$|ku_c| < ku_H, \quad |ku_d| < ku_H, \quad |k\bar{u}_c \pm f| \leq k\bar{u}_H + f, \quad |k\bar{u}_d \pm f| \leq k\bar{u}_H + f, \quad (20)$$

故有

$$|\Delta| \leq k\bar{u}_H + f, \quad (21)$$

这样有

$$|\sigma| \leq \tau_+ + |\Delta| \leq \tau_+ + k\bar{u}_H + f \equiv R_0, \quad (22)$$

即有

$$\sigma_r^2 + \sigma_i^2 \leq R_0^2. \quad (23)$$

由上式可知, (1) 式中和边条件所构成的常微分方程的特征值问题, 其谱点在复平面上分布在一个以原点为圆心、以 R_0 为半径的圆域上 (参见图 2)。

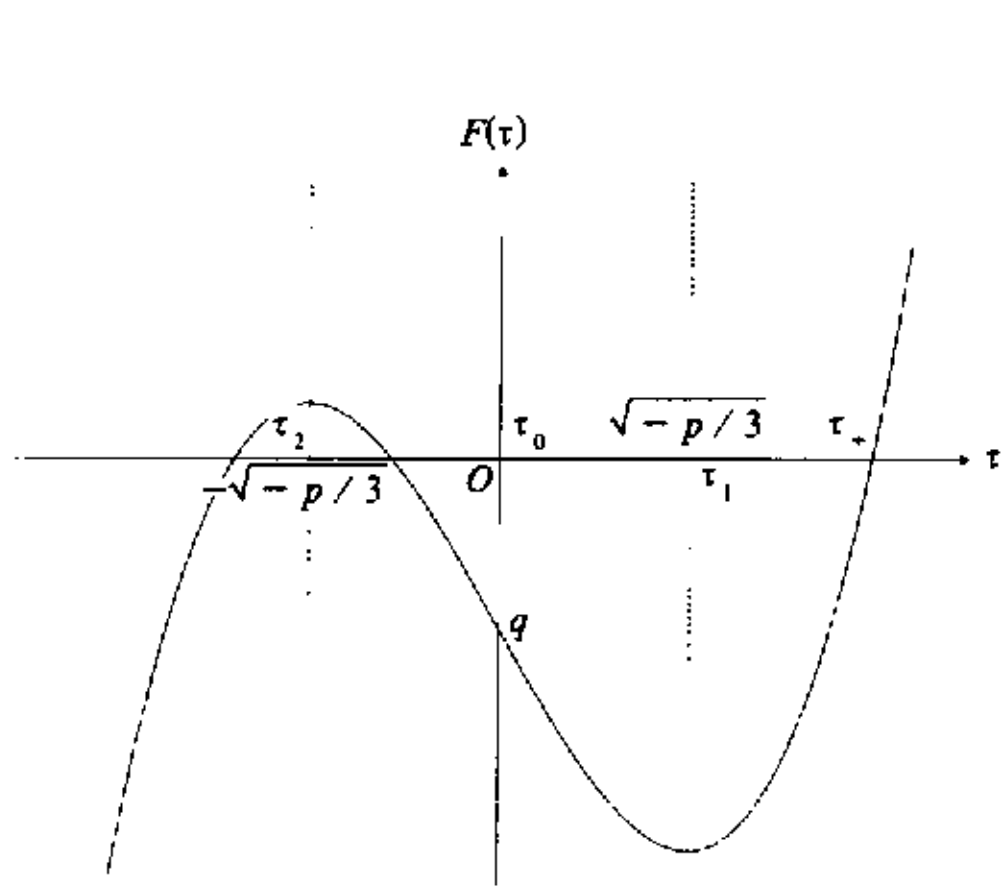


图 1 函数 $F(\tau)$ 的图像

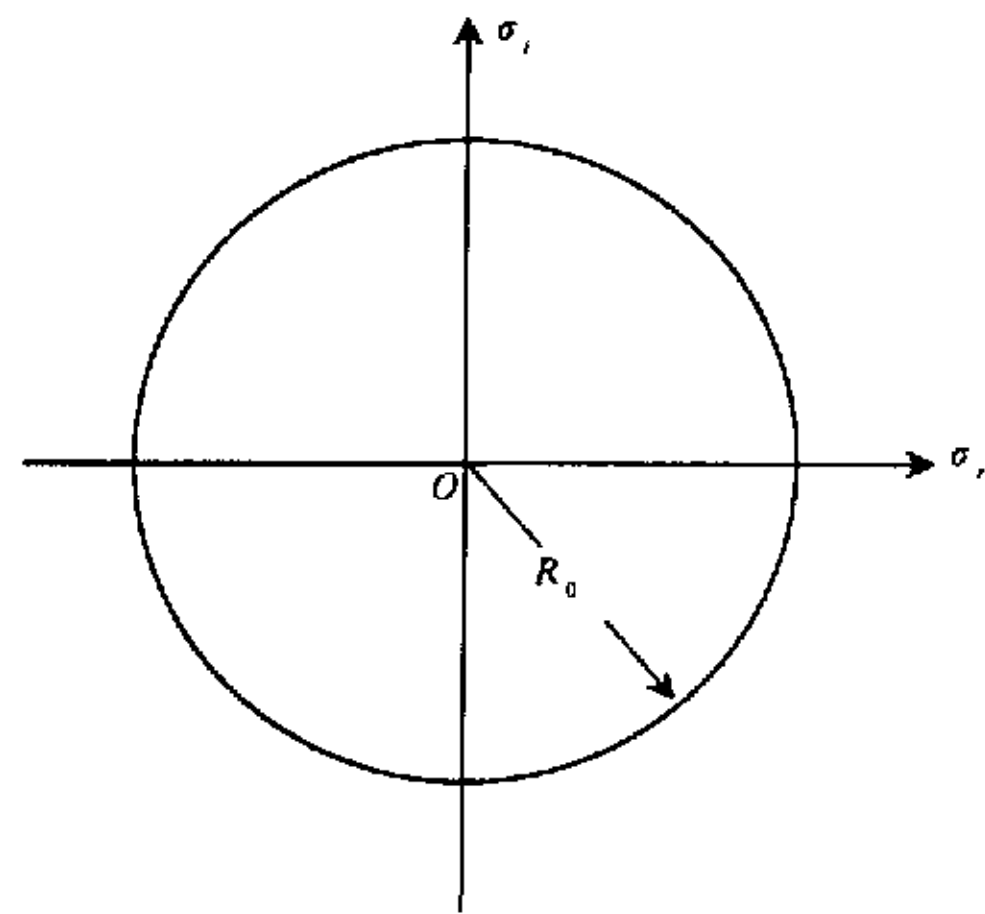


图 2 不稳定横波型扰动的谱点分布

当发生横波型扰动不稳定时, σ_i 必小于零, 这样不稳定谱点均应分布在复平面上上述圆域的下半部分, 即图 2 上的阴影部分。故横波型扰动不稳定的谱点分布在复平面上一个以原点为圆心、以 R_0 为半径的下半圆域中, 此即横波型扰动不稳定谱点分布的半

圆定理。由 (15)、(16) 和 (22) 式可见影响 R_0 值大小的环境因子有 $\bar{u}_z$ 、 k 、 N^2 、 f 和 H 等。

由该半圆定理可见, 当 R_0 固定后, $|\sigma_i|$ 可能达到的最大值即为 R_0 , 此时有 $\sigma_r = 0$; 而扰动传播的最大相速则为 $R_0 / k = C_{\max}$, 即有

$$C_{\max} = \frac{R_0}{k} = \bar{u}_H + \frac{f}{k} + \frac{\tau_+}{k}. \quad (24)$$

此时则有 $\sigma_i = 0$, 即该扰动是稳定的, 任何不稳定扰动的相速均小于该值 (参见图 2)。

3 R_0 的估计

由 (21) 式可见, R_0 分别由大于零的两部分组成, 第一部分为 τ_+ , 第二部分为 $k\bar{u}_H + f$ 。显然, k 、 $\bar{u}_z$ 、 H 、 f 越大, 第二部分的值就越大。下面对第一部分即 τ_+ 作出估计。此时可认为有

$$\begin{cases} \frac{1}{H} \int_0^H \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz \sim \frac{1}{H} \frac{\tilde{W}^2}{H^2} H = \frac{\tilde{W}^2}{H^2}, \\ \frac{1}{H} \int_0^H |W|^2 dz \sim \frac{1}{H} \tilde{W}^2 H = \tilde{W}^2, \\ \frac{1}{H} \int_0^H |W^*| \left| \frac{dW}{dz} \right| dz \sim \frac{1}{H} \tilde{W} \frac{\tilde{W}}{H} H = \frac{\tilde{W}^2}{H}, \end{cases} \quad (25)$$

这里 $\tilde{W}$ 为垂直运动振幅 W 的估计量, 由此可对 α 和 ξ / α 进行如下估计:

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\int_0^H |dW/dz|^2 dz}{\int_0^H |W|^2 dz} \sim 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\tilde{W}^2 / H}{\tilde{W}^2 H} = 1 + \frac{1}{k^2 H^2} = \frac{kH}{1 + 1/kH}, \\ \frac{\xi}{\alpha} = \frac{\gamma}{k\alpha\beta} = \frac{\int_0^H |W^*| |dW/dz| dz}{k\alpha \int_0^H |W|^2 dz} \sim \frac{\tilde{W}^2}{k(1 + 1/k^2 H^2) \tilde{W}^2 H} = \frac{1}{kH + 1/kH}. \end{cases} \quad (26)$$

估计出 α 、 ξ / α 后, 则可得 p 和 q 的估计值 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$:

$$\begin{cases} \tilde{p} = -\frac{kH \cdot |N^2 - f^2|}{kH + 1/kH} \leq 0, \\ \tilde{q} = -\frac{2f^2 \bar{u}_c}{kH + 1/kH} \leq 0. \end{cases} \quad (27)$$

注意到在此 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的表达式仅由环境参数组成, 与 $\tilde{W}$ 无关, 这样给定环境参数后 τ_+ 的估计值 $\tilde{\tau}_+$ 则是以下三次方程的唯一非负的根:

$$\tilde{F}(\tau) = \tau^3 + \tilde{p}\tau + \tilde{q} = 0. \quad (28)$$

方程 (28) 的形式与方程 $F(\tau) = 0$ 全同, 故对函数 $\tilde{F}(\tau)$ 的性质不再赘述。当参数 $\bar{u}_z$ 、 k 、

N^2 、 f 和 H 确定后, 则 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 就确定了, 这样方程 (28) 可解, 由此即可得 τ_+ 的估值 $\tilde{\tau}_+$ 。

由函数 $\tilde{F}(\tau)$ 的性质可知, 当 $|\tilde{p}|$ 和 $|\tilde{q}|$ 越大时, 则 $\tilde{\tau}_+$ 越大 (可参见图 1)。由上面 $\tilde{p}$ 、 $\tilde{q}$ 的表达式中可知: $\bar{u}_z$ 越大则 $\tilde{q}$ 越大, 这样 $\tilde{\tau}_+$ 也就越大, 即大的风速垂直切变该相速的上界较大。从该表达式中还可见, kH 越大则 $|\tilde{p}|$ 越大, 而 kH 对 $\tilde{q}$ 的影响则相对较小, 这样 kH 越大, k 、 H 越大, $\tilde{\tau}_+$ 应越大。当模式顶高 H 固定后, 则扰动的水平尺度越小则 $\tilde{\tau}_+$ 越大。静力稳定度参数 N^2 对 $\tilde{\tau}_+$ 的影响取决于 $|N^2 - f^2|$ 。该项越大则 $\tilde{\tau}_+$ 也越大。这里还可见, k 、 $\bar{u}_z$ 、 H 对 R_0 中上述第一部分和第二部分的影响是相同的, 故它们大则 R_0 也大, 而 N^2 、 f 对 R_0 的影响则仅由上述第一部分即由 $\tilde{\tau}_+$ 来决定。

以下分别取参数 N^2 、 f 、 k 及 $\bar{u}_z$ 的不同数值来计算 $\tilde{\tau}_+$ 、 R_0 和 $C_{\max}$, 这里取 $R_0 = \tilde{\tau}_+ + k\bar{u}_H + f$, $C_{\max} = \bar{u}_H + f/k + \tilde{\tau}_+/k$, 以探讨这些参数的影响并同时验证上面的结果。

首先讨论水平波长 L 对 $\tilde{\tau}_+$ 和 R_0 的影响。表 1 给出了取参数 N^2 、 f 、 $\bar{u}_z$ 和 H 分别为 $0.8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$ 、 $0.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 、 $4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 和 10 km 时 (此时基流为 $\bar{u}(0) = 0 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{u}(H) = \bar{u}_H = 40 \text{ m s}^{-1}$)。上述参数也是文献[5]、[7]上的取值, 以下若无特别说明均取该值), 对不同的 L (水平波长) 的计算结果。当基流为一常数 $\bar{u}_H$ 且 $N^2 > 0$ 时, 横波型扰动是稳定的。此时方程 (1) 退化为一个常系数方程, 其与边条件构成的本征值问题可解析求解, 并可得其频散关系为

$$\begin{cases} C_1 = \bar{u}_H, \\ C_{2,3} = \bar{u}_H \pm \sqrt{\frac{\frac{f^2}{k^2} \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + N^2}{\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + k^2}}. \end{cases} \quad (29)$$

这里已取垂直波数为 1。在表 1 上也给出了其他参数相同, 但基流无垂直切变, 即取常数 $\bar{u} \equiv \bar{u}_H = 40 \text{ m s}^{-1}$ 时, 按 (29 式) 对 $C_{2,3}$ 的计算结果 (这里 C_1 为 40 m s^{-1} , 无须计算)。由该表可见 C_2 的变化趋势及量级与 $C_{\max}$ 相近。由表 1 还可见, L 越大, $\tilde{\tau}_+$ 和 R_0 就越小, 这与上面的讨论完全一致。

表 1 相应不同 L 算得的 $\tilde{\tau}_+$ 、 R_0 和 $C_{\max}$ ($H = 10 \text{ km}$)

L / km	20	50	100	200	500	1000	2000	5000
$\tilde{\tau}_+ / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	26.951	22.153	15.104	8.5992	3.8115	2.2278	1.4727	0.9788
$R_0 / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	153.51	73.318	41.137	22.066	9.7380	5.6411	3.6294	2.3814
$C_{\max} / (\text{m s}^{-1})$	48.865	58.345	65.472	70.237	77.493	89.780	115.53	189.51
$C_2 / (\text{m s}^{-1})$	46.369	48.386	48.939	49.401	51.495	56.915	70.028	112.18
$C_3 / (\text{m s}^{-1})$	33.631	31.614	31.016	30.599	28.505	23.085	9.9722	-32.183

其次讨论 N^2 对 $\tilde{\tau}_+$ 和 R_0 的影响。除 f 外环境参数仍取上述值, 为方便讨论 f 取为 $1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 。表 2 则分别给出了 L 为 50 km 、 200 km 和 2000 km 时 $\tilde{\tau}_+$ 和 R_0 随 N^2 的变化。由此表可见, $|N^2 - f^2| = 0$ 时 (即表中 $N^2 = 10^{-8} \text{ s}^{-2}$ 的情形) $\tilde{\tau}_+$ 和 R_0 最小。对于

表 2 对应不同的 L 和 N^2 算得的 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 ($H=10$ km)

	L / km	N^2 / s^{-2}					
		10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$\bar{\tau}_+ / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	50	3.4448	3.3906	3.9284	8.0891	24.764	78.274
	200	2.8482	2.8387	2.9336	3.8513	9.5981	29.983
	2000	1.3594	1.3592	1.3613	1.3831	1.5986	3.2602
$R_0 / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	50	54.710	54.656	55.194	59.355	76.029	129.51
	200	16.415	16.405	16.500	17.418	23.164	43.549
	2000	3.6160	3.6158	3.6180	3.6397	3.8553	5.5169

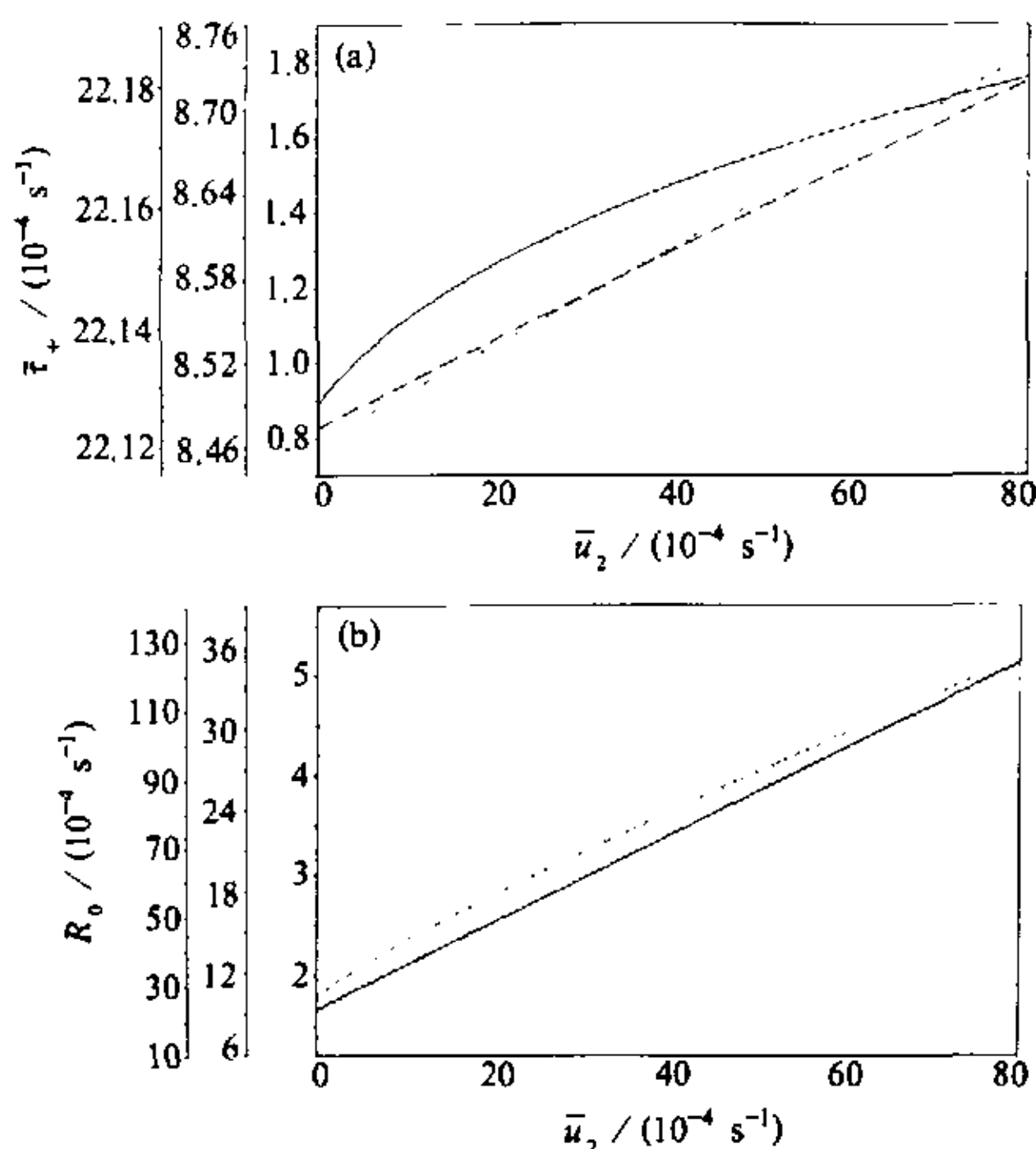


图 3 $\bar{\tau}_+$ (a) 和 R_0 (b) 随 $\bar{u}_z$ 的变化图
 实线为 2000 km (右标尺), 虚线为 200 km (中间标尺),
 点线为 50 km (左标尺)

参数仍取以上的值。由该图可见, 随着纬度的增加则 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 均增大。

观测表明, 很多强对流天气爆发前在大气边界层顶附近 (其高度约 1 km 左右) 均有逆温层, 该层对不稳定能量的积累有重要作用。正如上面所说, 该逆温层底可作为模式层顶。为此下面取 $H=1$ km 来进一步讨论 L 、 N^2 、 $\bar{u}_z$ 、 f 对 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 的影响。这时 $\bar{u}_z$ 可依据 $z=0$ 处, $\bar{u}=0 \text{ m s}^{-1}$, $z=1$ km 处, $\bar{u}=20 \text{ m s}^{-1}$ 来确定, 即取 $\bar{u}_z=2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, 而 f 为讨论方便仍取值为 $1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 由于逆温层范围不会太大, 这里水平波长 L 取为 10~200 km。表 3 给出了此时对应于不同的 L 和 N^2 计算得到的 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 。

比较表 2、表 3 可见, 此时虽然风切变 $\bar{u}_z$ 增大了, 但因 H 减小了, 故 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 也

50 km 的扰动, N^2 大于阈值 10^{-6} s^{-2} 时, $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 随 N^2 增加而迅速增大。对于 200 km 的扰动, 该阈值增至 10^{-5} s^{-2} 。当扰动尺度达 2000 km 时, 对于上表中的 N^2 的取值, $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 均不大。故可推测, 当 N^2 在 10^{-5} s^{-2} 或略大时, 对 β 中尺度系统扰动, 发生不稳定时其极易增长, 故对此应引起注意。

下面再讨论 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 随 $\bar{u}_z$ 的变化情况。图 3 给出了 L 为 50 km、200 km 和 2000 km 时 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 随 $\bar{u}_z$ 的变化。图中环境参数均取以上的值。由图可见, 随着 $\bar{u}_z$ 的增大, $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 均增大。

最后考察 f 对 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 的影响。图 4 给出了相应不同的 L 在不同纬度上 (即 f 不同) 算得的 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 的曲线图。这里环境

表 3 对应不同的 L 和 N^2 算得的 $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 ($H=1$ km)

	L / km	N^2 / s^{-2}					
		10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$\bar{\tau}_+ / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	10	5.6632	5.6482	5.7985	7.2674	17.125	53.231
	50	3.6726	3.6713	3.6840	3.8110	5.0356	12.624
	200	2.3243	2.3241	2.3254	2.3381	2.4652	3.6471
$R_0 / (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	10	132.33	132.31	132.46	133.93	143.79	179.89
	50	29.805	29.804	29.817	29.944	31.168	38.757
	200	9.6074	9.6073	9.6086	9.6213	9.7484	10.930

减小了。另外, 与表 1、表 2 类似, $\bar{\tau}_+$ 和 R_0 也随 L 的增大而减小。

4 结语

本文对不稳定横波型扰动的谱点分布作了理论分析和计算, 并得到以下主要结论:

(1) 不稳定横波型扰动的谱点分布在复平面上以原点为圆心、以 R_0 为半径的下半圆域上, 此即不稳定横波型扰动谱点分布的半圆定理。

(2) 扰动的波长越短, 模式顶 H 越高, 则该半径 R_0 越大。

(3) 静力稳定度参数 N^2 的绝对值越大, 则该半径 R_0 越大。

(4) 垂直风切变越大, 则该半径 R_0 越大。

(5) 纬度高处该半径 R_0 要较纬度低处大。

最后要指出的是: 虽然 R_0 可被认为是不稳定横波型扰动最大增长率的上界, 但这并不意味着一定有不稳定发生。一般说来 R_0 中包含有扰动振荡频率的部分, 即 $k\bar{u}_H + f$ 项。这样用 R_0 来估计该不稳定扰动最大增长率的上界就太宽, 应用 $\bar{\tau}_+$ 来估计更好。如何对不稳定横波型扰动最大增长率的上界作出较好的估计, 我们已在研究中。

致谢: 研究生王丽琼校阅了本文的公式, 特此致谢。

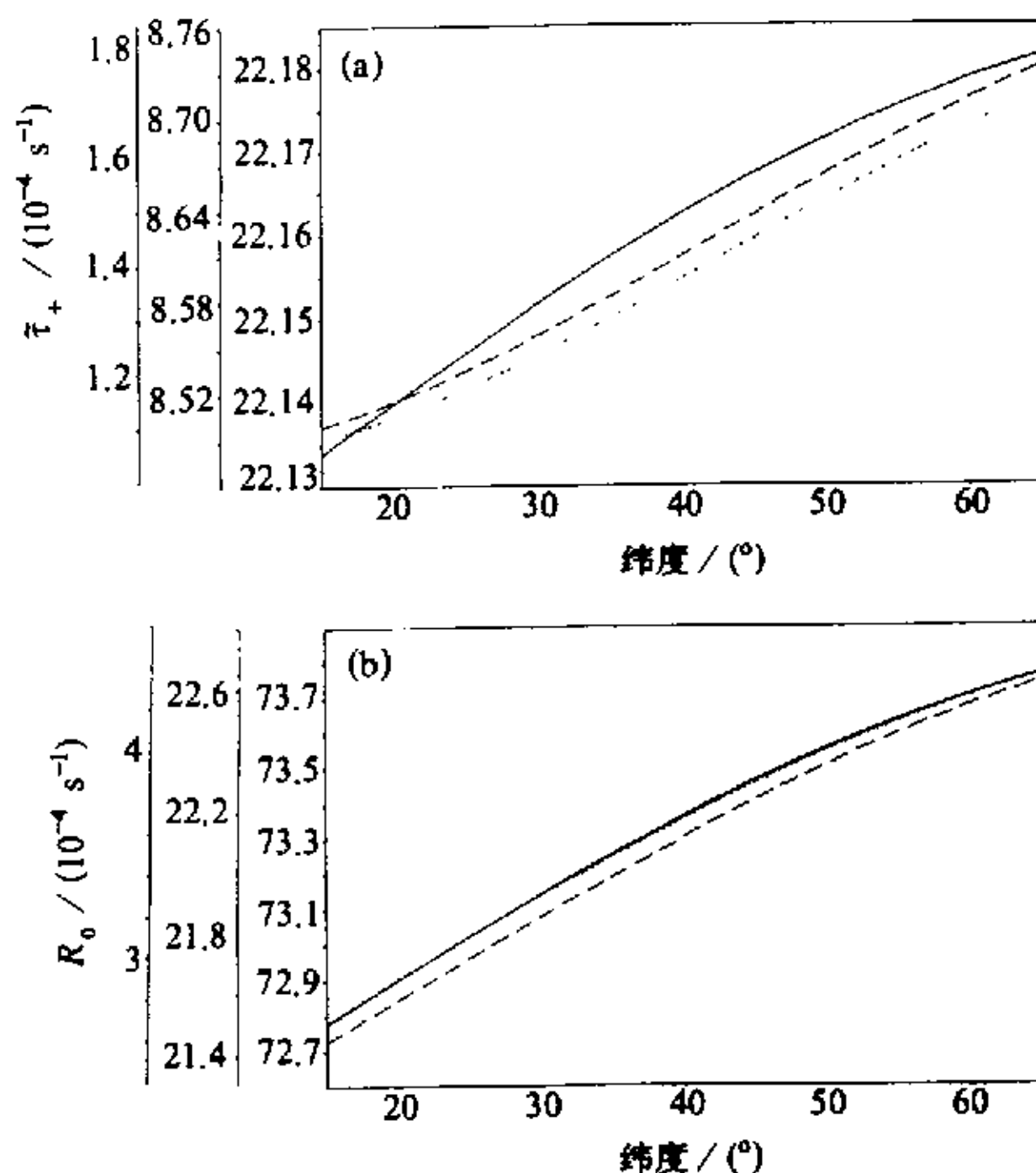


图 4 $\bar{\tau}_+$ (a) 和 R_0 (b) 随纬度的变化图
实线为 2000 km (左标尺), 虚线为 200 km (中间标尺),
点线为 50 km (右标尺)

参 考 文 献

- 1 Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteor.*, 1947, **4**, 135~162.
- 2 Eady, E. T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*, 1949, **1**, 33~52.
- 3 张可苏, 斜压气流的中尺度稳定性II.横波型不稳定, 气象学报, 1988, **46**(4), 385~391.
- 4 张颖、张铭, 线性和非线性横波型不稳定的数值研究, 气象学报, 1998, **56**(4), 447~457.
- 5 张立凤、张铭, WAVE-CISK与沿切变基流传播的非地转不稳定, 空军气象学院学报, 1991, **12**(2), 56~63.
- 6 张立凤、张铭, 斜压切变基流中横波型扰动的特征波动 I: 谱点分析, 气象学报, 1999, **57**(5), 571~580.
- 7 沈新勇, ENSO动力学及中尺度动力学的若干理论问题研究, 南京大学博士后研究工作报告, 1998, 29~37.

A Semicircle Theorem on the Spectral Distribution in Transverse Instability Perturbation

Zhang Ming and Zhang Lifeng

(Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101)

Abstract The spectral distribution of the transverse instability perturbation is theoretically studied. A semicircle theorem on the spectral distribution in transverse instability perturbation is derived. The theorem reveals that this distribution is in the lower semicircle of complex plane with the centerend radius R_0 . The results show that the shorter the wavelength, the higher the mode top and the latitude, the larger the vertical shear of basic flow and the absolute value of static stability parameter, the larger the radius.

Key words: instability; transverse distribution; semicircle theorem