

变分连续同化中优化步长的 推导方法及数值试验^{*}

王云峰^{1, 2)} 伍荣生²⁾ 王 元²⁾ 潘益农²⁾

1) (中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2) (南京大学大气系中尺度灾害性天气实验室, 南京 210093)

摘 要 一个好的变分同化方法, 必须考虑到预报模式具有误差, 并对模式误差进行纠正。变分连续同化 (VCA) 通过在模式方程中引进一个修正项, 连续地调整模式变量, 从而达到以上目的。在变分连续同化的迭代过程中, 优化步长的选取方法对于同化迭代是否收敛、收敛速度快慢与否都至关重要, 文中推导了一种有效利用观测资料计算优化步长的新方法, 并以大气运动方程中一维非线性平流波和二维惯性波为例, 进行了四维变分资料同化数值试验。数值结果表明, VCA 方法和计算优化步长的公式都是有效的。

关键词: 变分连续同化; 优化步长; 数值试验

文章编号 1006-9895 (2004) 03-0415-09 **中图分类号** P413 **文献标识码** A

1 引言

一个好的变分同化方法, 必须考虑到两方面的误差^[1]: 初始场误差和预报模式误差。如果用 M 表示一个预报模式, X 是初始场, Y 是随时间而变的状态变量, 即 $Y = M(X)$, 则 Y 的误差可近似表示为:

$$\delta Y = (M + \delta M)(X + \delta X) - M(X), \quad (1)$$

其中, δM 是模式的误差, δX 是初始场的误差。因此, 对应的四维变分同化也就有三类不同的思路: 第一类认为模式方程是准确的, 必需对存在误差的初始场进行调整; 第二类认为初始场是准确的, 必须对模式方程进行调整; 第三类认为初始场和模式都有误差, 因此必须利用大量的实际资料同时针对初始场和模式的未知参数进行订正。

事实上, 确实有必要针对模式误差来进行四维变分资料同化试验。这是因为: (1) 模式方程并不完全反映了大气的真实状况, 总有一些动力过程和物理过程不能被精确描述; (2) 模式分辨率即使再高, 总有更小尺度的天气现象不能被模式网格系统所分辨; (3) 在天气预报时由于模式误差而产生的误差, 已经接近于由于不正确的初始场而产生的误差; (4) 大多数针对初始场存在误差而做的资料同化试验, 在中纬度大尺度地区, 可以预报得很好, 但对于小尺度天气系统的特性或在热带地区, 则预报得不是很好。丑纪范^[2]认为, 人们通过观测而掌握的一些状态变量或者它们的泛函的时变

2002-12-11 收到, 2003-04-18 收到修改稿

^{*} 国家自然科学基金资助项目 40105012、40175025, 海外青年学者合作研究基金项目 49928504 和中国科学院创新课题 8-200038 共同资助

信息，可以被认为是方程的一些具有相当精度的离散的特解。利用四维变分同化方法，由这些“特解”提供的信息来推断方程的未知部分，应该是改进数值天气预报的一个非常有用的途径。

Courtier 等^[3]尝试通过设计资料的权重系数来减少模式的不准确性，然而模式本身并没有变化。Derber^[4]提出了变分连续同化（VCA）方法，通过在模式方程中引进一个纠正项，即对模式变量的时间导数进行修正的项，用来连续地调整模式变量，从而达到纠正模式误差的目的。因此，VCA 方法是用来调整模式方程本身而不是调整初始场的。Derber 的研究方法在四维变分资料同化方面开创了一条新途径，其后，Wergen^[5]、Zupanski^[6]、Li 等^[7]都做了许多有意义的工作。

下降算法有很多种：最速下降法、共轭梯度法、牛顿法、有限内存拟牛顿法等。最速下降法形式简单便于利用，如果起始点 X_0 离极值点 X_* 较远时，这种方法非常有效，但是当接近极值点时收敛速度就会缓慢下来。牛顿法具有二次收敛率，但是要求储存 Hessian 矩阵，储存量太大，对于气象模式来说不可取。共轭梯度法和有限内存拟牛顿法的收敛速度介于最速下降法和牛顿法之间，在目标函数二次性较强的区域都具有较好的效果。以上几种算法，无论是下降方向还是优化步长，都各不相同，而且不同算法的相对效率还依赖于它们所研究的特殊问题。不过，当得到优化梯度后，都可根据公式 $X^{v+1}=X^v+\rho^v d^v$ 来进行优化。其中 d^v 是与变量 X 维数相同的矢量，称为下降方向， ρ^v 是沿下降方向的最优步长，上标 v 表示迭代次数。Wang 等^[8]指出，优化步长对于迭代收敛速度至关重要，在一定程度上已成为控制算法效率成败的关键因素之一。最优步长的确定一般常用单维搜索法，由于单维搜索法并非一次搜索就能成功，有时需要搜索许多次，而每次搜索过程都需要重新计算一次目标函数，也就需要积分一次气象模式，即计算量会非常大，因此单维搜索法的效率就成为算法成败的关键。文献 [8] 在针对初始场进行修正的变分资料同化中，推导出一种有效利用观测资料计算优化步长的方法，并证明了该方法比单维搜索法要好。因此，也非常有必要研究如何在变分连续同化中有效利用观测资料计算优化步长的方法。

本文首先介绍了 VCA 方法，然后以最速下降法为例，介绍了一种利用观测资料计算优化步长的新方法，并以大气运动方程中一维非线性平流波和二维惯性波为例，进行了四维变分资料同化的数值试验，论证了 VCA 方法对于纠正模式误差的可行性以及优化步长计算公式的有效性。

2 VCA 方法的介绍

模式方程可以写成如下的递推形式：

$$\Psi^n = A^n(\Psi^{n-1}), \tag{2}$$

其中， Ψ 是模式控制变量， $n=1$ 表示初始时刻， Ψ^1 表示初始场， $n=2, 3, \cdots, N$ 是模式计算的时次数， A 表示模式算子。

如果模式存在误差，需要对模式进行修正，最常用的方法就是在模式方程（2）的右端加上一个强迫项作为修正项。这个修正项，最好既包含时间信息，又包含空间信息。也就是说，不仅在时间分布上具有一定的特点，而且在空间分布上也具有一定的

特点。修正项的给出有很多形式，而其中最便利的一种构造方法就是假设控制时间信息的变量和控制空间信息的变量可以分离，则有

$$\Psi^n = A^n(\Psi^{n-1}) + \lambda^n \phi, \tag{3}$$

其中，修正项 $\lambda^n \phi$ 假设为控制时间信息的变量 λ 和控制空间信息的变量 ϕ 的乘积。模式修正项代表数值模式所不能描述的动力或物理过程，也包括将微分方程化为差分格式时带来的误差等，即模式误差包括了参数化误差和离散化误差。假设时间部分 λ 是事先描述好的，则只需要对空间部分 ϕ 进行调整。因此，可以把模式误差的空间部分看成是一个控制变量。通常所用的四维变分资料同化是相对于初始条件来求最优的，而 VCA 技术是相对于 ϕ 来求最优的。某种程度上，这种方法相当于是弱限制，因此近似满足模式方程^[4]。

如果以 $p=1, 2, \cdots, P$ 表示观测资料的时次数。记第 p 个观测时次对应的观测资料为 $\tilde{\Psi}^p$ ，对应时刻的模式解为 Ψ^{N_p} ， N_p 表示第 p 个观测时次所对应的模式积分步数。特例情况下，模式每积分一步，都有观测资料与之对应，即为 Derber^[4] 的假设。不过，实际情形中观测资料的时间间隔可能会远远大于模式积分时间间隔，即模式积分一定的时步后，才会在对应时刻出现一组观测资料，即有 $N \gg P$ 。本文以下推导都是基于这种情况推导出来的。

将目标函数 I 定义为

$$I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p)^T (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p), \tag{4}$$

其中，上标 T 表示转置。

目标函数 I 的梯度可以由 (4) 式对控制变量进行一阶偏导，求得：

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \sum_{p=1}^P \left(\frac{\partial \Psi^{N_p}}{\partial \phi} \right)^T (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p). \tag{5}$$

由 (3) 式对控制变量进行一阶偏导，可得：

$$\frac{\partial \Psi^n}{\partial \phi} = B^n \frac{\partial \Psi^{n-1}}{\partial \phi} + \lambda^n, \tag{6}$$

其中， B^n 是一个线性算子。对于观测时次 p ，模式积分步数为 $n=N_p$ 。则

$$\frac{\partial \Psi^{N_p}}{\partial \phi} = B^{N_p} \frac{\partial \Psi^{N_p-1}}{\partial \phi} + \lambda^{N_p}. \tag{7}$$

如果认为初始场是完美的，即初始时刻的模式解与 ϕ 无关，所以 $\partial \Psi^1 / \partial \phi = 0$ 。则由方程 (6) 依次对 n 递推，可以得到

$$\frac{\partial \Psi^n}{\partial \phi} = \lambda^n + \sum_{l=2}^{n-1} \left(\prod_{m=n}^{l+1} B^m \right) \lambda^l. \tag{8}$$

对于观测时次 p ，有

$$\frac{\partial \Psi^{N_p}}{\partial \phi} = \lambda^{N_p} + \sum_{l=2}^{N_p-1} \left(\prod_{m=N_p}^{l+1} B^m \right) \lambda^l. \tag{9}$$

将 (9) 式代入 (5) 式中，可以得到

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \sum_{p=1}^P \left[\lambda^{N_p} + \sum_{l=2}^{N_p-1} \left(\prod_{m=N_p}^{l+1} B^m \right) \lambda^l \right]^T (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p). \tag{10}$$

或者重新组合写成

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \sum_{p=1}^P \left\{ \lambda^{N_p} + \sum_{l=2}^{N_p-1} \lambda^l \left[\prod_{m=l+1}^{N_p} (B^m)^T \right] \right\} (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p). \quad (11)$$

如果定义伴随方程为:

$$\xi^n = (B^{n+1})^T \xi^{n+1} + \delta_n \Psi. \quad (12)$$

其中, ξ 是伴随变量, $\delta_n \Psi$ 是一个判断开关变量, 当 $n = N_p$ 时, 有 $\delta_n \Psi = \Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p$, 否则, $\delta_n \Psi = 0$ 。

如果初始时取 $\xi^N = \Psi^N - \tilde{\Psi}^p$, 利用 (12) 式对 n 进行递推, 考虑 $\delta_n \Psi$ 的取值, 并采用合并同类项的原则, 则可以推得

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \lambda^n \xi^n &= \sum_{p=2}^P \sum_{l=2}^{N_p-1} \lambda^l \left[\prod_{m=l+1}^{N_p} (B^m)^T \right] (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p) + \sum_{p=2}^P \lambda^{N_p} (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p) \\ &= \sum_{p=2}^P \left\{ \lambda^{N_p} + \sum_{l=2}^{N_p-1} \lambda^l \left[\prod_{m=l+1}^{N_p} (B^m)^T \right] \right\} (\Psi^{N_p} - \tilde{\Psi}^p). \end{aligned} \quad (13)$$

对比 (11) 式和 (13) 式, 可知

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \sum_{n=2}^N \lambda^n \xi^n. \quad (14)$$

在得到目标函数 I 相对于 ϕ 的梯度 $\partial I / \partial \phi$ 后, 然后可以用下式对 ϕ 进行优化, 以达到最小化目标函数 I 的目的

$$\phi^{v+1} = \phi^v - \rho^v \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v, \quad (15)$$

其中, v 表示迭代次数, ρ 表示优化步长。

3 优化步长的推导

如何推求优化步长 ρ 直接关系到同化过程的收敛速度。本节主要讨论如何求算优化步长的问题。由 (3) 式递推可以得到

$$\Psi^l = \lambda^i \phi + \sum_{l=2}^{i-1} \left(\prod_{m=i}^{l+1} A^m \right) \lambda^l \phi + \left(\prod_i^2 A^m \right) \Psi^1, \quad (16)$$

其中, $i=2, 3, \dots, N$ 。

根据 (15) 式和 (16) 式可以推得

$$(\Psi^i)^{v+1} = \lambda^i (\phi^v - \rho^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + \sum_{l=2}^{i-1} \left(\prod_{m=i}^{l+1} A^m \right) \lambda^l (\phi^v - \rho^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + \left(\prod_i^2 A^m \right) \Psi^1. \quad (17)$$

记 $F^i = \sum_{l=2}^{i-1} \left(\prod_{m=i}^{l+1} A^m \right) \lambda^l$ 表示作用在 $(\phi^v - \rho^v \frac{\partial I}{\partial \phi})$ 上的算子, 所以上式又可以写为

$$(\Psi^i)^{v+1} = \lambda^i (\phi^v - \rho^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + F^i (\phi^v - \rho^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + \left(\prod_i^2 A^m \right) \Psi^1. \quad (18)$$

如果假设事先给出一个猜想的优化步长 $\hat{\rho}^v$ (对于第一次猜想, 可以用 $\hat{\rho}^1 = \frac{1}{J}$ 来代替; 对于以后的迭代, 可用上一次迭代的优化步长来代替, 即 $\hat{\rho}^v = \rho^{v-1}$), 则对于 ϕ 的优化可以用如下公式来表示

$$\hat{\rho}^{v+1} = \phi^v - \hat{\rho}^v \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v. \quad (19)$$

符号“ $\sim$ ”表示该物理量是由猜想的优化步长经过计算而得到的值。同样可以推得：

$$(\hat{\Psi}^i)^{v+1} = \lambda^i (\phi^v - \hat{\rho}^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + F^i (\phi^v - \hat{\rho}^v \frac{\partial I}{\partial \phi}) + (\prod_i^2 A^m) \Psi^1. \quad (20)$$

为了计算优化步长，可以引进一个假设，认为对于沿寻优方向的一个非常小的扰动来说，模式的数值解是随之线性变化的^[9]。引进 F_L^i 是 F^i 的切线性算子，由 (18) 式可以得到：

$$\begin{aligned} (\Psi^i)^{v+1} &= \lambda^i \phi^v + F^i \phi^v + (\prod_i^2 A^m) \Psi^1 - \lambda^i \rho^v \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v - \rho^v F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \\ &= (\Psi^i)^v - \rho^v \left[\lambda^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v + F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \right], \end{aligned} \quad (21)$$

即

$$(\Psi^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v = -\rho^v \left[\lambda^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v + F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \right] \quad (22)$$

同理，由 (20) 式可以得到

$$(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v = -\hat{\rho}^v \left[\lambda^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v + F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \right]. \quad (23)$$

由 (22) 和 (23) 的两端同时乘以一个相同的量，分别可得到

$$\begin{aligned} & [(\Psi^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v][(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T \\ &= -\rho^v \left[\lambda^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v + F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \right] [(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T, \end{aligned} \quad (24)$$

和

$$\begin{aligned} & [(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v][(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T \\ &= -\hat{\rho}^v \left[\lambda^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v + F_L^i \left(\frac{\partial I}{\partial \phi} \right)^v \right] [(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T, \end{aligned} \quad (25)$$

上标 T 表示转置。由 (24) 式、(25) 式可以推得

$$\frac{\rho^v}{\hat{\rho}^v} = \frac{[(\Psi^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v][(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T}{[(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v][(\hat{\Psi}^i)^{v+1} - (\Psi^i)^v]^T}. \quad (26)$$

对于某个观测时次 p ，我们当然希望在第 $v+1$ 次迭代后所得到模式解 $(\Psi^{N_p})^{v+1}$ 等于观测值 $\tilde{\Psi}^p$ ，则有：

$$\frac{\rho^v}{\hat{\rho}^v} = \frac{[\tilde{\Psi}^p - (\Psi^{N_p})^v][(\hat{\Psi}^{N_p})^{v+1} - (\Psi^{N_p})^v]^T}{[(\hat{\Psi}^{N_p})^{v+1} - (\Psi^{N_p})^v][(\hat{\Psi}^{N_p})^{v+1} - (\Psi^{N_p})^v]^T} = \frac{\langle \Phi_p', \Phi_p^* \rangle}{\langle \Phi_p^*, \Phi_p^* \rangle}, \quad (27)$$

其中， $\Phi_p' = \tilde{\Psi}^p - (\Psi^{N_p})^v$ 是观测值 $\tilde{\Psi}^p$ 与模式解 $(\Psi^{N_p})^v$ 之间的偏差， $\Phi_p^* = \hat{\Psi}^{v+1} - \Psi_p^v$ 是利用估猜的优化步长计算出来的模式解 $(\hat{\Psi}^{N_p})^{v+1}$ 与模式解 $(\Psi^{N_p})^v$ 之间的偏差，符号“ $\langle, \rangle$ ”表示内积。或写成

$$\rho^v = \hat{\rho}^v \frac{\langle \Phi_p', \Phi_p^* \rangle}{\langle \Phi_p^*, \Phi_p^* \rangle}. \quad (28)$$

对于所有观测时次来说上式都应成立，所以 ρ^v 应该是一个权重之和的形式，即

$$\rho^v = \hat{\rho}^v \sum_{i=1}^N W_i \frac{\langle \Phi_p', \Phi_p^* \rangle}{\langle \Phi_p^*, \Phi_p^* \rangle}, \quad (29)$$

其中， W_i 是权重系数，其最简单的形式可为 $1/N$ ，即所有时次的权重系数都一样。

4 数值试验

本节主要利用 VCA 方法和计算优化步长的方法，基于大气运动方程中非线性一维平流方程和二维惯性波方程来进行变分连续同化试验，由于这里不涉及到参数化过程，所以模式误差就是指离散误差。

4.1 非线性一维平流方程

对于非线性一维平流方程及其初值

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{30a}$$

$$u(x, 0) = -\sin(x), \tag{30b}$$

根据伍荣生^[10]的工作，可以得到 (30a)、(30b) 式的近似解析解为

$$\tilde{u}(x, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (nt)^{-1} J_n(nt) \sin(nx), \tag{31}$$

其中， n 阶的 Bessel 积分为

$$J_n(z) = \frac{z}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin\theta) \cos\theta d\theta. \tag{32}$$

若 Bessel 积分的截断阶数取为 $n=500$ ，由 (30)、(31) 式得到不同时刻的近似解析解，如图 1 所示。

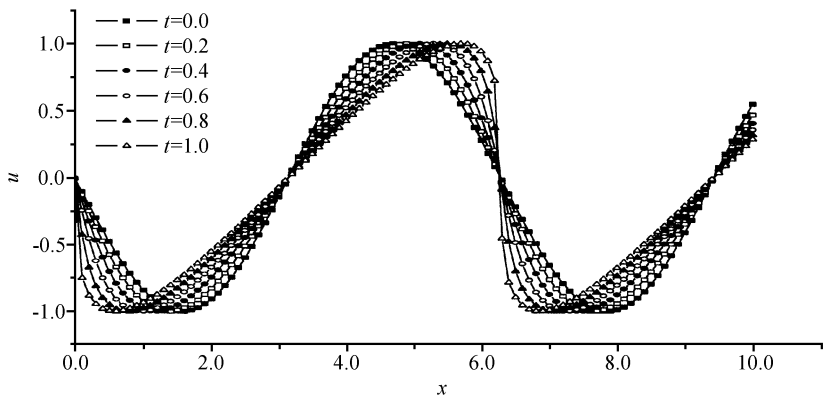


图 1 不同时刻的解析解

本文中将离散的解析解 $\bar{u}_i^p = \bar{u}(i\Delta x, p\Delta t)$ ($i=0, 1, \dots, 301$; $p=1, 2, \dots, 11$) 作为观测资料，并取 $\Delta x=0.1$, $\Delta t=0.05$ 。

(30a) 式的线性化的伴随方程可以写成：

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{\partial u u^*}{\partial x} + u^* \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{33}$$

对原方程 (30) 离散求其数值解 $u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$ (取 $i=0, 1, \dots, 301$; $j=1, 2, \dots, 51$)，并取 $\Delta x=0.1$, $\Delta t=0.01$ 。左边界条件为： $u(0, t)=0$ ；右边界条件为输入/输出边界条件。时间变量 λ 有很多种取法^[4]，本文中取为常数 $\lambda=1/(P-1)$ ，其中 P

表示观测资料的时次总数。

图 2a 是同化过程中，标准化的梯度范数（实心点）及标准化的目标函数（空心点）随迭代次数的变化；图 2b 是同化过程中，优化步长的随迭代次数的变化。由图 2 可见，标准化的梯度范数、标准化的目标函数以及优化步长都是随迭代次数下降得很快，在迭代次数为 5 时就都已基本上达到了平稳值，这既说明了 VCA 方法可以达到优化模式，降低预报误差的目的，也说明了本文中推导的优化步长的公式的有效性。

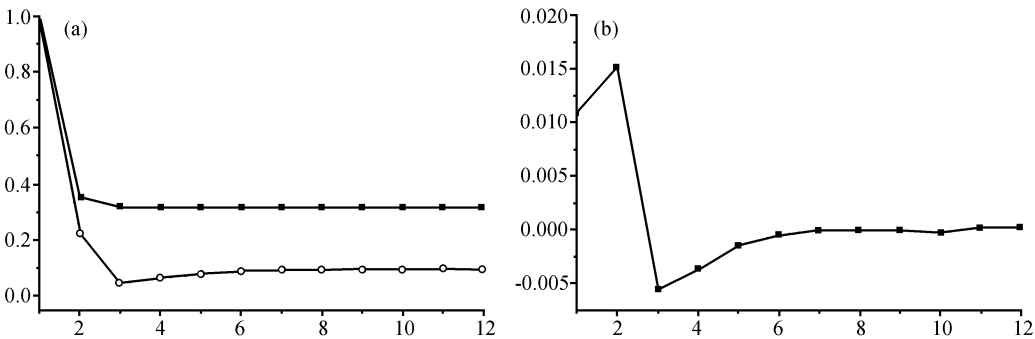


图 2 在一维非线性平流方程中运用 VCA 技术进行四维资料同化的情况（横坐标为迭代次数）
(a) 标准化后的梯度范数（实心点）及目标函数（空心点）随迭代次数的变化；
(b) 优化步长随迭代次数的变化

4.2 二维惯性波方程

本节中，我们以二维惯性波方程为例，对 VCA 方法进行数值试验。所用的方程组形式如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0. \end{cases} \tag{34}$$

如果给定初始风场为 $u|_{t=t_0}=0$ 和 $v|_{t=t_0}=v_0$ ，初始位相为 ϕ_0 （本文中给定 $v_0=5\text{ m s}^{-1}$ ， $\phi_0=0$ ），则可以计算出 (34) 式的解析解为

$$\begin{cases} u_{\text{ana}} = v_0 \sin(ft + \phi_0), \\ v_{\text{ana}} = v_0 \cos(ft + \phi_0), \end{cases} \tag{35}$$

下标 “ana” 表示解析解。引进 u^* 、 v^* 分别是 u 、 v 的伴随变量，(34) 式的伴随方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} + fv^* = 0, \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} - fu^* = 0. \end{cases} \tag{36}$$

取模式积分时间步长取为 187 s，积分 336 个时步，总积分时间为 62832 s。同化的时间窗口是 10472 s，共有 7 个同化时次。图 3 是同化过程中，标准化的目标函数、标准化的梯度范数等随迭代次数的变化，以及迭代过程中优化步长的变化。

由图 3 可见，标准化的目标函数、标准化的梯度范数以及优化步长都是随迭代次数下降得很快，在迭代次数为 3 时就都已基本上达到了最小值，这个个例也同样可以

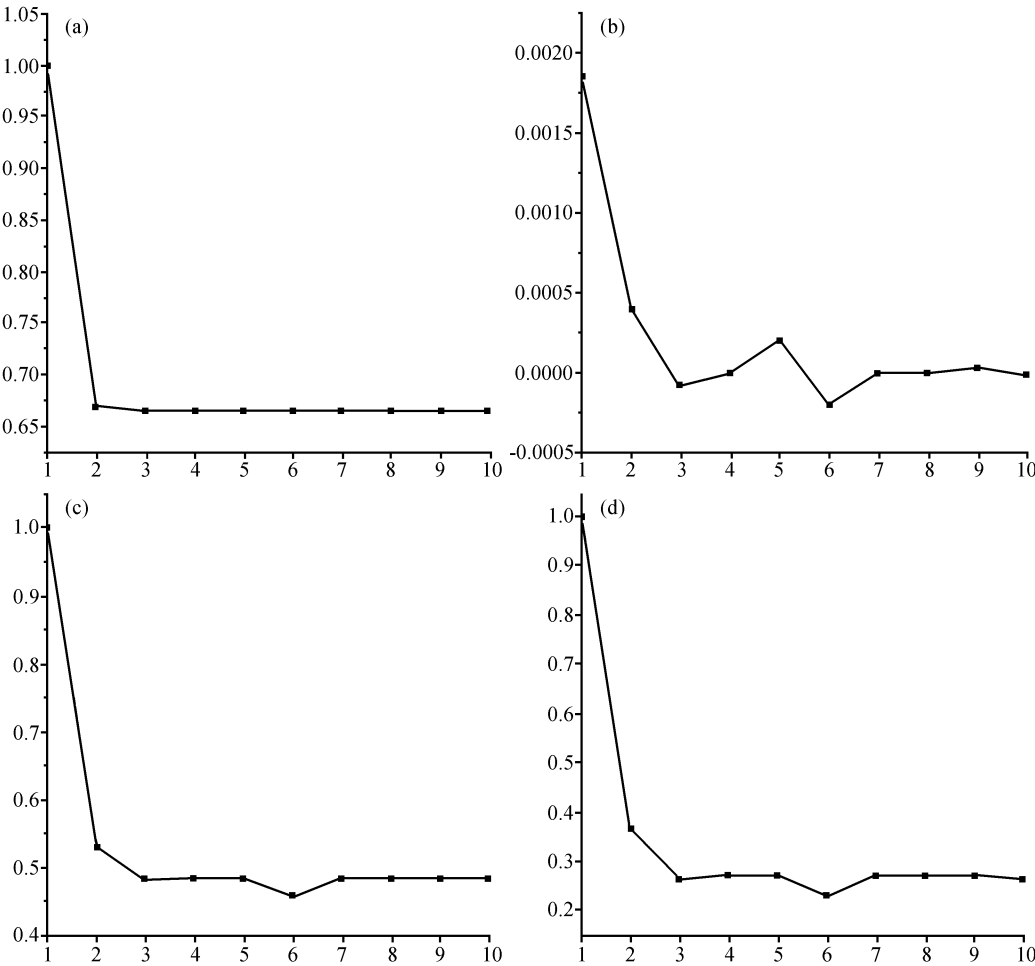


图 3 二维平流方程中运用 VCA 技术进行资料同化试验的情况 (横坐标为迭代次数)
(a) 标准化的目标函数 J 随迭代次数的变化; (b) 优化步长 ρ 随迭代次数的变化;
(c) 标准化的梯度范数 $\|\nabla J_u\|$ (对 u 进行优化) 随迭代次数的变化;
(d) 标准化的梯度范数 $\|\nabla J_v\|$ (对 v 进行优化) 随迭代次数的变化。

说明 VCA 方法可以达到优化模式、降低预报误差的目的。而且优化步长在迭代过程中还可以取为负值,这是因为当某次对模式的修正过头了一点后,下一次迭代利用优化步长的取值又可以弥补过来。

5 结论

一个好的四维变分资料同化方法,必须也要考虑预报模式具有误差,并对模式进行纠正。本文根据 VCA 方法的思想,从更具普遍性的角度进行了推导,通过在模式方程中引进一个纠正项,即对模式变量的时间导数进行修正的项,用来连续地调整模式的解,从而达到资料同化的目的。因为优化步长的选取方法对于同化迭代是否收敛、收敛速度快慢与否,都至关重要,所以我们还提出了一种简单求算优化步长的新方法,

并以大气运动方程中一维非线性平流波和二维惯性波为例，进行了四维变分资料同化数值试验。数值结果表明，无论是标准化的梯度范数，还是标准化的目标函数都随迭代次数下降得很快，在迭代次数为 3 时就都已基本上达到了最小值，这既证明了 VCA 方法可以达到优化模式，降低预报误差的目的，也证明了本文中推导的优化步长的公式的有效性。

参 考 文 献

1 Bennett, A. F., and R. N. Miller, Weighting initial conditions in variational assimilation schemes, *Mon. Wea. Rev.*, 1991, **119**, 1098~1102.

2 丑纪范, 四维同化的理论和新方法, 数值天气预报中的若干新技术, 北京: 气象出版社, 1995, 262~294.

3 Courtier, P., and O. Talagrans, Variational assimilation of meteorological observations with the direct and ad-joint shallow-water equations, *Tellus*, 1990, **42A**, 531~549.

4 Derber, J. C., A variational continuous assimilation technique, *Mon. Wea. Rev.*, 1989, **117**, 2437~2446.

5 Wergen, W., The effect of model errors in variational assimilation, *Tellus*, 1992, **44A**, 297~313.

6 Zupanski, D., The effects of discontinuities in the Bettes-Miller cumulus convection scheme on four-dimensional variational data assimilation, *Tellus*, 1993, **45A**, 511~524.

7 Li, Y., I. M. Navon et al., Four-dimensional variational data assimilation experiments with a multilevel semi-Lagrangian semi-Implicit general circulation model, *Mon. Wea. Rev.*, 1994, **122**, 966~983.

8 Wang Yunfeng, Wu Rongsheng, Wang Yuan et al., A simple method to calculate the optimal step size in 4DVAR, *Adv. Atmos. Sci.*, 2000, **17** (3), 433~444.

9 Derber, J. C., Variational four-dimensional analysis using quasi-geostrophic constraints, *Mon. Wea. Rev.*, 1987, **115**, 998~1008.

10 伍荣生, 平流与耗散波动, 大气动力学, 北京: 气象出版社, 1990, 296~304.

The Method of Calculating the Optimal Step Size in Variational Continual Assimilation and the Numerical Experiments

Wang Yunfeng^{1, 2)}, Wu Rongsheng²⁾, Wang Yuan²⁾, and Pan Yinong²⁾

- 1) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)
- 2) (Mesoscale Server, Weather Laboratory, Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract A good variational assimilation method must consider the errors of numerical forecast model and correct them. By introducing a forcing term into the model forecast equation, the variational continual assimilation method can continually adjust the model variables and achieve the above objective. Because the optimal step size is very important to the iterative convergent rate, a new method of calculating the optimal step size is introduced in this paper. The nonlinear one-dimensional advective equation and the two-dimensional inertial wave equations are used in the numerical experiments. The numerical results verify that the VCA and the new method of calculating the step size are both available.

Key words: variational continual assimilation; the optimal step size; numerical experiment