

关于半拉格朗日半隐式大气模式的时步问题

胡志晋 史月琴

中国气象科学研究院, 北京 100081

摘要 讨论半拉格朗日半隐式大气模式中时步的限制, 展示时步过大时用一般的首尾两点平均方案计算非线性源汇项的严重误差, 提出精确的源汇项计算格式并作了特例计算和比较, 讨论了被模拟的大气过程和波动的特征对时步的要求, 指出柯朗数 $N_c = C \cdot \Delta t / \Delta X$ 是大气模式时空步长匹配的重要参数。指出云降水和大气化学过程特征时间对相应的正定变量的计算时步的限制。

关键词 半拉格朗日半隐式格式 非线性源汇项 时步

文章编号 1006-9895(2006)01-0001-10 **中图分类号** P435 **文献标识码** A

On the Time Step of Semi-Lagrangian Semi-Implicit Atmospheric Model

HU Zhi-Jin and SHI Yue-Qin

Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

Abstract Semi-Lagrangian Semi-Implicit (SLSI) atmospheric model has some advantages and a longer time step is usually used. The limitation of the time step for SLSI model is discussed. The source-sink term in SLSI model is usually calculated by the average value at departure and arrived time-space points.

Serious computation error is shown in a stationary point source case with a constant advection speed u_0 by using a usual SLSI model if time step Δt is significantly greater than $\Delta X/u_0$, where Δt is time step and ΔX is grid spacing. These errors could not be reduced by using the weighted average value of the source-sink term.

It is shown in this simple case that the accurate results can be gotten if an accurate form of the source-sink term is used.

To ensure the accuracy of SLSI model for calculating the nonlinear source-sink term case there is the alternative of the simplified scheme with a shorter time step or the sophisticated scheme with a longer time step.

Atmospheric waves also have a nonlinear source-sink term. It is shown in a non-advection wave case that the absolute value of source term by using the averaged value at beginning and end points is always less than the accurate ones. The computation error grows with Δt , and becomes serious for $\Delta t > T_w/4$, where T_w is time period of the wave. The solution becomes a stationary one when $\Delta t = T_w/2$. Better results are given by using the sophisticated source scheme for $\Delta t < T_w/4$. But significant error appears when $\Delta t > T_w/4$, and simulated wave becomes a standing one for $\Delta t = T_w/2$. Generally speaking, minimum period and length (T_{\min} , L_{\min}) of atmospheric waves, which may be simulated by the model, are determined by the time step and grid length (Δt , ΔX), such as $T_{\min} = 4\Delta t$, $L_{\min} = 4\Delta X$. Serious error occurring in calculating the shorter wave ($T < 4\Delta t$) is inevitable as shown in the above case. T_{\min} will match with L_{\min} when $\Delta t = \Delta X/C_0$, where C_0 is the wave speed. If $\Delta t > \Delta X/C_0$, only waves with $L > 4\Delta t \cdot C_0$ can be accurately simulated by the model, but waves with $4\Delta X < L < 4\Delta t \cdot C_0$ will be misrepresented. So the Courant number $N_c = C \cdot \Delta t / \Delta X$ is a useful index for determining the Δt value in all atmospheric models. Various at-

atmospheric phenomena have different typical life time (T_a) and size (L_a). $\Delta t < T_a/4$ and $\Delta X < L_a/4$ are essential for correct simulation.

The SLSI model has better computation stability even if a longer time step Δt is used. But the characteristic time (T_0) of cloud or atmospheric chemical processes must be considered in calculating the positively defined variables. The calculated value may be negative when $\Delta t > T_0$ for explicit model or $\Delta t > 2T_0$ for the SLSI model, which leads to an unreasonable result.

Key words semi-Lagrangian semi-implicit scheme, nonlinear source-sink term, time step

1 引言

在大气模式中半拉格朗日半隐式计算格式正受到广泛的重视^[1~4]。它在平流项计算中具有较小的计算扩散误差,能保持非连续或近似非连续分布外形。它具有较好的稳定性,可以突破柯朗条件的约束,允许采用较长的时间步长,从而节省计算资源。最近,陈嘉滨等^[5, 6]提出了半拉格朗日半隐式平方守恒计算格式可以保证总能量的守恒。我国自主开发的新一代的数值预报系统 GRAPES(Global/Regional Assimilation PrEdiction System)就采用这种计算格式^[7]。这种格式可以用较长的时步计算非静力平衡大气模式。孙健^①用 GRAPES 模式在水平格距 $\Delta X = 30$ km 时采用时步 $\Delta t = 1800$ s,模拟台风有较好结果。这个时步远大于 MM5 等中尺度模式所采用的 $\Delta t = \Delta X/330$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) = 90 s 的时步。这种超长时步显然能节省计算量,但它的计算精度和描述不同大气过程的能力必须进行深入的讨论。

2 非线性源汇项对半拉格朗日半隐式格式计算精度的影响

半拉格朗日半隐式格式具有下列形式:

$$A_i^{n+1} = A_{i-a}^n + \bar{F} \cdot \Delta t, \quad (1)$$

式中 i, n 为空间和时间格点序号, A 为任一变量, a 为一时步的质点移动格距:

$$a = \frac{\bar{u} \cdot \Delta t}{\Delta X}, \quad (2)$$

式中 $\Delta X, \Delta t$ 为空间和时间步长, \bar{u}, \bar{F} 为 n 到 $n+1$ 时段,质点从 $i-a$ 到 i 区间的平均移速和平均源汇项。可以采用不同的具体计算格式,最广泛采用的是:

$$\bar{F} = \frac{1}{2}(F_{i-a}^n + F_i^{n+1}), \quad (3)$$

或

$$\bar{F} = \beta F_{i-a}^n + (1 - \beta) F_i^{n+1}, \quad (4)$$

式中, β 为小于 1 的正数。当 $\beta = 0.5$ 时,式(4)即转化为式(3)。

在拉格朗日格式中,1 时步的移动格距可以大于 1,因为 A_{i-a}^n 可以从相邻的格点值内插。在欧拉格式中此值必须小于 1,否则上游点就会超过其内插的范围(如 A_{i-1} 到 A_{i+1})而造成很大误差。柯朗数

$$N_c = \frac{|\bar{u}| \Delta t}{\Delta X} \leq 1, \quad (5)$$

这是欧拉方案的一条稳定性指标,相应的时步限制为

$$\Delta t \leq \frac{\Delta X}{|\bar{u}|}. \quad (6)$$

对于拉格朗日格式,从平流来说无此项时步限制,但较长时步对于计算精度是否有影响?当时步和 a 值越大时,从 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 时段,从 $(i-a)\Delta X$ 到 $i\Delta X$ 的间隔越大,如果源汇项(或称强迫项)的时空分布是线性的或近线性的,那么常用的计算格式(3)和(4)是可用的。如果源汇项是高度非线性的,甚至是不连续的,如实际大气模式中遇到的地形分布、地表特征分布、水汽和水凝物分布等,半拉格朗日半隐式格式的计算精度将怎样?这是半拉格朗日半隐式计算格式研究中需要深入的问题^[2]。

以最简单的定常等速平流过程为例,设 $u = u_0$, $\Delta X/u_0 = t_0$,源汇项 F 具有不连续性,具体形式如下:

$$F = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq 3 \quad \left(i > 3 \frac{1}{2} \text{ 或 } i < 2 \frac{1}{2}\right) \\ F_0, & \text{当 } i = 3 \quad \left(2 \frac{1}{2} \leq i \leq 3 \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (7)$$

其精确解列于表 1 第 2 行。为了对比,采用半拉格朗日格式(1),并用式(3)以及取 $\beta = 0.25$ 和 $\beta = 0.75$ 的式(4)和其他不同表达式作了 \bar{F} 的计算,同时采用欧拉方案,即

① 私人通讯

表 1 不同时步下不同方案计算结果的对比

Table 1 Results of different calculation schemes with different time steps

格点 Grid i		2	3	4	5	6
精确解 Accurate results		A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
$\Delta t = t_0$ 欧拉方案	F_i	A_0	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
Euler scheme	$(F_i + F_{i-1})/2$	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
半拉格朗日方案	式 Eq. (3)	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
Semi-Lagrangian scheme	$(F_i + F_{i-a})/2$					
$2t_0$ 欧拉方案	F_i	A_0	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
Euler scheme	$(F_i + F_{i-1})/2$	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$
半拉格朗日方案	式 Eq. (3)	A_0	$A_0 + F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0
Semi-Lagrangian scheme	$(F_i + F_{i-1})/2$					
	式 Eq. (4) $\beta=0.25$	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{2}$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0
	$\beta=0.75$	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0
	$(F_i + 2F_{i-1} + F_{i-2})/4$	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$

$$A_i^{n+1} = A_i^n - (A_i^n - A_{i-1}^n) \frac{u_i \Delta t}{\Delta X} + F \cdot \Delta t, \quad (8)$$

用 $F = F_i^n$ 和 $F = (F_i^n + F_{i-1}^n)/2$ 两种表达式作了计算。为了不涉及上游点的内插问题, 时步简单地取为 t_0 和 $2t_0$, 结果列于表 1。

从表 1 可见:

(1) 当 $\Delta t = t_0$ 时, 欧拉和半拉格朗日方案都可以得到精确解;

(2) 当 $\Delta t = 2t_0$ 时, 欧拉方案仍能得到精确解; 一般认为欧拉方案采用 $\Delta t > t_0$ 时应不稳定, 但本例为定常过程, $A_i^{n+1} = A_i^n$, 从式(8)可得

$$(A_i^n - A_{i-1}^n) \frac{u_i}{\Delta X} \Delta t = F_i^n \Delta t, \quad (9)$$

即

$$A_i^n = A_{i-1}^n + F_i^n \frac{\Delta X}{u_i}. \quad (10)$$

可见, 在定常过程中时步对欧拉方案的计算结果没有影响。

(3) 当 $\Delta t = 2t_0$ 时, 半拉格朗日方案的源强 \bar{F} 的计算格式对结果有很大影响。当 $\bar{F} = (F_i + F_{i-a})/2$ 或 $\bar{F} = \beta F_{i-a}^n + (1-\beta) F_i^{n+1}$ 时都得到了波动解, 同精确解差别很大。只有采用

$$\bar{F} = \frac{F_i + 2F_{i-1} + F_{i-2}}{4}, \quad 1 < a \leq 2, \quad (11)$$

才能得到精确解。这个特例已经能够说明当 $\Delta t > \Delta X/u$ 时, 对于非线性源汇项采用简单的源强计算格式可能带来严重的计算误差。

3 半拉格朗日半隐式方案中源强的精确计算格式

公式(1)中 \bar{F} 是质点从 n 时刻到 $n+1$ 时刻、从 $i-a$ 点移动到 i 点这一过程中特性 A 所受到的平均强迫。

$$\bar{F} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} F_x^t dt / \Delta t, \quad (12)$$

式中, 下标 x 为对应于 t 时刻的质点空间位置, 当 $t = n \cdot \Delta t$ 时, 质点位于 $x = (i-a) \cdot \Delta X$; 当 $t = (n+1) \cdot \Delta t$ 时, 质点位于 $x = i \cdot \Delta X$ 处。

当 u 为常数($u = u_0$)时,

$$\bar{F} = \int_{(i-a)\Delta X}^{i\Delta X} F_x^t \frac{dx}{u_0} \bigg/ \frac{a\Delta X}{u_0} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^i \bar{F}_k. \quad (13)$$

如果采用线性内插, 即

$$\bar{F}(k, k-1) = \frac{1}{2}(F_k + F_{k-1}), \quad (14)$$

则 $\bar{F} = \frac{a'}{2a}(F_{i-a_0-1} + F_{i-a_0})$, $a_0 = 0$,

$$\bar{F} = \frac{a'}{2a}(F_{i-a_0-1} + F_{i-a_0}) +$$

$$\frac{1}{2a} \sum_{k=i-a_0+1}^i (F_{k-1} + F_k), \quad a_0 > 0, \quad (15)$$

式中, $a' = a - a_0$ 为 a 的非整数部分, a_0 为 a 的整数部分。用式(15)可以导出前述特例在各种时步 $\Delta t = a \Delta X/u$ 下的 \bar{F} 精确表达式, 而且可以适用于 a 为非正整数的情况。

表 2 不同步下定常源强表达式及其比较

Table 2 Expressions of stationary source at different time steps

a	式 Eq. (15) \bar{F}	式 Eq. (17) \bar{F}	式 Eq. (4)($\beta=0.25$) \bar{F}	式 Eq. (4)($\beta=0.75$) \bar{F}
1	$\frac{1}{2}F_{i-1} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{2}F_{i-1} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-1} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{4}F_{i-1} + \frac{1}{4}F_i$
1.5	$\frac{1}{6}F_{i-2} + \frac{1}{2}F_{i-1} + \frac{1}{3}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-2} + \frac{1}{4}F_{i-1} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{8}F_{i-2} + \frac{1}{8}F_{i-1} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{8}F_{i-2} + \frac{3}{8}F_{i-1} + \frac{1}{4}F_i$
2	$\frac{1}{4}F_{i-2} + \frac{1}{2}F_{i-1} + \frac{1}{4}F_i$	$\frac{1}{2}F_{i-2} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-2} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{4}F_{i-2} + \frac{1}{4}F_i$
2.5	$\frac{1}{10}F_{i-3} + \frac{3}{10}F_{i-2} + \frac{4}{10}F_{i-1} + \frac{2}{10}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-3} + \frac{1}{4}F_{i-2} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{8}F_{i-3} + \frac{1}{8}F_{i-2} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{8}F_{i-3} + \frac{3}{8}F_{i-2} + \frac{1}{4}F_i$
3	$\frac{1}{6}F_{i-3} + \frac{1}{3}F_{i-2} + \frac{1}{3}F_{i-1} + \frac{1}{6}F_i$	$\frac{1}{2}F_{i-3} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-3} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{4}F_{i-3} + \frac{1}{4}F_i$
4	$\frac{1}{8}F_{i-4} + \frac{1}{4}F_{i-3} + \frac{1}{4}F_{i-2} + \frac{1}{4}F_{i-1} + \frac{1}{8}F_i$	$\frac{1}{2}F_{i-4} + \frac{1}{2}F_i$	$\frac{1}{4}F_{i-4} + \frac{3}{4}F_i$	$\frac{3}{4}F_{i-4} + \frac{1}{4}F_i$

表 3 不同步下式(15)、式(17)以及式(4)的计算结果对比

Table 3 Calculation results of Eqs. (15), (17) and (4) at different time steps

格点 Grid	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
时步 Time step	式 Eq. (15)											
1. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$...							
2 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$...							
2. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$...					
3 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$...					
4 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$	$A_0 + F_0 t_0$...			
	式 Eq. (17)											
1. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{9F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{33F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{63F_0 t_0}{64}$	$A_0 + \frac{129F_0 t_0}{128}$	$A_0 + \frac{255F_0 t_0}{256}$			
2 t_0	A_0	$A_0 + F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$		
2. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	A_0	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{35F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{65F_0 t_0}{64}$
3 t_0	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{2}$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0
4 t_0	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0
	式 Eq. (4) $\beta=0.25$											
1. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{9F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{9F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{33F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{63F_0 t_0}{64}$	$A_0 + \frac{129F_0 t_0}{128}$	$A_0 + \frac{255F_0 t_0}{256}$			
2 t_0	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{2}$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$		
2. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{8}$	A_0	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{35F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{65F_0 t_0}{64}$
3 t_0	A_0	$A_0 + \frac{9F_0 t_0}{4}$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0
4 t_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0
	式 Eq. (4) $\beta=0.75$											
1. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{9F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{33F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{63F_0 t_0}{64}$	$A_0 + \frac{129F_0 t_0}{128}$	$A_0 + \frac{255F_0 t_0}{256}$			
2 t_0	A_0	$A_0 + \frac{F_0 t_0}{2}$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$	A_0	$A_0 + 2F_0 t_0$		
2. 5 t_0	A_0	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{8}$	A_0	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{8}$	$A_0 + \frac{5F_0 t_0}{4}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{35F_0 t_0}{32}$	$A_0 + \frac{15F_0 t_0}{16}$	$A_0 + \frac{65F_0 t_0}{64}$
3 t_0	A_0	$A_0 + \frac{3F_0 t_0}{4}$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0	A_0	$A_0 + 3F_0 t_0$	A_0
4 t_0	A_0	$A_0 + F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0	A_0	$A_0 + 4F_0 t_0$	A_0	A_0

对式(3)中的 F_{i-a} 取简单线性内插,

$$F_{i-a} = a'F_{i-a_0-1} + (1-a')F_{i-a_0}, \quad (16)$$

那么, 式(3)转变为

$$\bar{F} = \frac{1}{2}[a'F_{i-a_0-1} + (1-a')F_{i-a_0} + F_i]. \quad (17)$$

表 2 列有式(15), 式(17)以及式(4)取 $\beta=0.25$ 和 $\beta=0.75$ 时, 当 $a=1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 和 4 时的 \bar{F} 表达式。

从表 2 可见, 当 $a \leq 1$ 时, 式(15)同式(17)是一致的, 但当 $a > 1$ 时, 式(4)和式(17)都低估了中间各点的作用, a 值越大这种差异就越大。

仍以定常源强式(7)为例, 计算了不同时步下式(15)、式(17)以及式(4)取 $\beta=0.25$ 和 $\beta=0.75$ 的结果, 列于表 3。

以 $a=1.5$ 为例,

$$A_i = A_{i-1.5} + \bar{F} \cdot \Delta t = \frac{1}{2}(A_{i-2} + A_{i-1}) + \left(\frac{1}{6}F_{i-2} + \frac{1}{2}F_{i-1} + \frac{1}{3}F_i\right) \cdot 1.5t_0, \quad (18)$$

当 $i < 3$ 时, $A_i = A_0$ 从式(18)可得,

$$A_3 = A_0 + \frac{1}{2}F_0t_0, \\ A_4 = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_3 + \frac{1.5}{2}F_0t_0 = A_0 + \frac{1}{4}F_0t_0 + \frac{3}{4}F_0t_0 = A_0 + F_0t_0, \quad (19)$$

$$A_5 = \frac{1}{2}(A_3 + A_4) + \frac{1.5}{6}F_0t_0 = A_0 + \frac{3}{4}F_0t_0 + \frac{1}{4}F_0t_0 = A_0 + F_0t_0, \quad (20)$$

$$A_6 = \frac{1}{2}(A_4 + A_5),$$

$$A_7 = \frac{1}{2}(A_5 + A_6),$$

.....

从表 3 可见, 式(15)同精确解是一样的。虽然采用了很大的时步, 但由于这是一个定常过程, 所以采用 \bar{F} 精确表达式(15)后, 仍能得到精确解。式(4)和式(17)的结果就比较差, 当采用时步为 t_0 的整数倍数时, 即出发点为格点时, 由于没有计算扩散, 得出的解分布上是跳跃的, 但总量是保守的, 同精确解有很大差别。当出发点不在格点时, 由于计算扩散, 计算值向后逐渐趋向于精确解, 但是靠近源强的各格点值同精确值有很大差别, 时步越

长, 差别越大。当采用加权平均式(4)时, 无论 β 取什么值, 本例中式(4)与式(17)的计算结果没有本质差异。

在实际模式中, 对于起始点往往采用更为复杂的多点内插方案, 而不是式(16)的两点内插方案。理论上, 它们不能改变 a 为正整数时的计算结果, 也不能解决当 a 过大时, \bar{F} 中没有考虑 $i-1, i-2, \dots, i > k > i-a_0$ 各点的源汇值的实质问题, 但对于 a 较小时的计算结果可能有改进。

从上述分析和实例计算都可以看出, 不论 β 取什么值都不能改变式(4)在 $a > 1$ 时忽略中间各点源强作用的根本弱点。

现在考虑时变过程。在式(3)中, \bar{F} 的起点 $i-a$ 取 n 时刻值, 而终点 i 取 $n+1$ 时刻值, 这是合理的。对于式(15), 在平流速度 u 为常数的近似下, 可以得出从起点 $i-a$ 在 n 时刻开始, 在不同时刻历经模式各格点, 最后在 $n+1$ 时刻到达 i 点的过程并按时间和空间内插得到 F_x^t 值。具体表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{F} &= \frac{a'}{2a}[F_{i-a_0-1}^n + F_{i-a_0}^{n+1}], & a_0 &= 0, \\ \bar{F} &= \frac{1}{2a} \sum_{i-a_0+1}^i \left[\frac{i-k+1}{a} F_{k-1}^n + \frac{a-i+k-1}{a} F_{k-1}^{n+1} + \frac{i-k}{a} F_k^n + \frac{a-i+k}{a} F_k^{n+1} \right] + \\ &\quad \frac{a'}{2a} \left[F_{i-a_0-1}^n + \frac{a-a'}{a} F_{i-a_0}^n + \frac{a'}{a} F_{i-a_0}^{n+1} \right], & a_0 &> 0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

相应的式(3)的内插表达式为

$$\bar{F} = \frac{1}{2}[a'F_{i-a_0-1}^n + (1-a')F_{i-a_0}^n + F_i^{n+1}]. \quad (22)$$

对于 $a=0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 的计算表达式列于表 4。

从表 4 可见, 当 $\Delta t \leq \Delta X/u_0$, 即 $a \leq 1$ 时, 式(22)同式(21)是完全一致的; 但当 $a > 1$ 时式(22)明显低估了质点所历经的中间各点的源强作用, a 越大, 其计算差别也越大。

在平流速度不为常值时,

$$\bar{F} = \int_{i-a}^i \frac{F}{u} dx / \int_{i-a}^i \frac{dx}{u} = \int_{i-a}^i \frac{F}{u} dx / \Delta t = \sum_{i-a}^i \frac{F_k}{u_k} \Delta X / \Delta t \quad (23)$$

不考虑 u 在 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 时段的变化,

表 4 不同时步下时变源强的半隐式表达式

Table 4 Semi-implicit expression of time-varying source at different time step

a	式 Eq. (21) \bar{F}	式 Eq. (22) \bar{F}
0.5	$\frac{1}{2}F_{i-1}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{4}F_{i-1}^n + \frac{1}{4}F_i^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$
1	$\frac{1}{2}F_{i-1}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{2}F_{i-1}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$
1.5	$\frac{1}{6}F_{i-2}^n + \frac{1}{3}F_{i-1}^n + \frac{1}{6}F_{i+1}^n + \frac{1}{3}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{4}F_{i-2}^n + \frac{1}{4}F_{i-1}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$
2	$\frac{1}{4}F_{i-2}^n + \frac{1}{4}F_{i-1}^n + \frac{1}{4}F_{i+1}^n + \frac{1}{4}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{2}F_{i-2}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$
2.5	$\frac{1}{10}F_{i-3}^n + \frac{2}{10}F_{i-2}^n + \frac{1}{10}F_{i+2}^n + \frac{2}{10}F_{i-1}^n + \frac{2}{10}F_{i+1}^n + \frac{2}{10}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{4}F_{i-3}^n + \frac{1}{4}F_{i-2}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$
3	$\frac{3}{18}F_{i-3}^n + \frac{4}{18}F_{i-2}^n + \frac{2}{18}F_{i+2}^n + \frac{2}{18}F_{i-1}^n + \frac{4}{18}F_{i+1}^n + \frac{3}{18}F_i^{n+1}$	$\frac{1}{2}F_{i-3}^n + \frac{1}{2}F_i^{n+1}$

表 5 中小尺度大气运动的时空尺度典型值

Table 5 Typical values of time and space scales of meso- and micro-scale atmospheric motions

	L/km	T/h	$\Delta L_m/\text{km}$	$\Delta t_m/\text{min}$	$U = \frac{L}{T}/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\frac{\Delta L_m}{V_1}/\text{s}$	$\frac{\Delta L_m}{V_2}/\text{s}$
β 中尺度	200	24	50	360	2.3	500	120
Meso- β -scale	20	3	5	45	1.9	50	12
γ 中尺度	2	0.5	0.5	8	1.1	5	1.2
Meso- γ -scale							
对流单体	10	0.8	2.5	12	3.3	25	6
Convection cell							

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F} = \frac{a'}{2a} [F_{i-a_0-1}^n + F_{i-a_0}^{n+1}], \quad a_0 = 0, \\ \bar{F} = \frac{\Delta X}{2\Delta t} \sum_{k=i-a_0+1}^i \left[\frac{i-k+1}{a} F_{k-1}^n + \frac{a-i+k-1}{a} \cdot \right. \\ \left. F_{k-1}^{n+1} + \frac{i-k}{a} F_k^n + \frac{a-i+k}{a} F_k^{n+1} \right] / [u_{k-1}^n + u_k^n] + \\ \frac{a'\Delta X}{2\Delta t} \cdot \left[F_{i-a_0-1}^n + \frac{a-a'}{a} F_{i-a_0}^n + \frac{a'}{a} F_{i-a_0}^{n+1} \right] / \\ \left[a'u_{i-a_0-1}^n + (1-a')u_{i-a_0}^n \right], \quad a_0 > 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t < \frac{T}{4}, \\ \Delta X < \frac{L}{4}, \\ \Delta Z < \frac{H}{4}, \end{array} \right. \quad (25)$$

否则就难以描述该模拟对象及其运动的特征。以中小尺度大气过程为例，其典型值列于表 5。

表 5 中 ΔL_m 和 Δt_m 为模拟要求的空、时步长阈值； U 为大气运动的特征空时尺度比，它们大约在 $1 \sim 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，在欧拉模式中时步阈值一般采用：

$$\Delta t < \frac{\Delta X}{V}, \quad (26)$$

式中， V 为平流速度或波动相速度。在很多静力平衡模式中采用 $V_1 = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，而非静力平衡模式中有的采用 $V_2 = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (如 MM5)。根据式 (26) 得出的相应于 ΔL_m 格距的时步阈值 $\Delta L_m/V$ 也列于表 5。从表 5 可见，从式 (26) 和 V_1 、 V_2 得出的时步阈值远小于从式 (25) 得出的 Δt_m 值，其原因在于大气运动特征空时尺度比远小于一般采用的 V_1 、 V_2 值。所以，在一般大气模式中人们比较注意 ΔX 是否达到 $\Delta X < \Delta L_m$ 的要求，而一般都能达到 $\Delta t < \Delta t_m$ 的要求。

式 (24) 和式 (20) 中引入了中间各点的 $n+1$ 时刻值，将使隐式计算格式更加复杂。为了保证计算精度，采用长时步和精确格式还是采用短时步和简单格式是一个需要选择的问题。

4 模拟对象特征

大气和大气运动中不同模拟对象具有差异极大的生命时间尺度 (T) 和空间大小尺度 (L 、 H)，模式的分辨率应有相应要求。可以认为模式的时步 (Δt)、水平、垂直格距 (ΔX 、 ΔZ) 至少符合下列精度要求：

云物理模式和大气化学模式中云降水和大气成分的变量很多并且都是正定的, 方程中的源汇项很多并且表达式很复杂, 各种源汇项描述的物理化学过程的特征时间相差很大。

在源汇项的计算方面应考虑各生消过程的特征时间,

$$T_0 = A/F. \quad (27)$$

以最简单的线性 0 维模式为例,

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A}{T_0}, \quad (28)$$

精确解为

$$A = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad (29)$$

它是随时间趋于 0 的正值。

如果采用显式格式, 即

$$A^{n+1} = A^n - \frac{A^n}{T_0} \cdot \Delta t, \quad (30)$$

若时步 $\Delta t > T_0$, 则 A 会得出负值。对于正定物理量, 负值是不合理的, 它的出现会导致计算中断, 即不稳定。若 $\Delta t > 2T_0$, 则 A 值会得到正负相间趋于无穷的值, 计算趋于不稳定。

如果采用隐式格式,

$$A^{n+1} = A^n - \frac{A^{n+1}}{T_0} \Delta t, \quad (31)$$

即

$$A^{n+1} = A^n / \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0}\right), \quad (32)$$

则采用任何长的时步, A 值总是正的, 而且不断减小, 不会导致计算不稳定。

如果采用半隐式格式, 如

$$A^{n+1} = A^n - \left(\frac{A^{n+1} + A^n}{2}\right) \frac{\Delta t}{T_0}, \quad (33)$$

即

$$A^{n+1} = A^n \left(1 - \frac{\Delta t}{2T_0}\right) / \left(1 + \frac{\Delta t}{2T_0}\right). \quad (34)$$

若时步 $\Delta t > 2T_0$, A 仍能出现负值, 即对于正定变量仍能出现计算不稳定。

以雨滴的生成过程 C_{cr} 和消耗过程 C_{ri} 为例。云滴被雨滴碰并的过程 C_{cr} 可推导为

$$\frac{\partial Q_c}{\partial t} = - \int_0^\infty N_0 e^{-\lambda D} \frac{\pi}{4} D^2 a D^b \rho E \rho Q_c dD = - \frac{Q_c}{T_{cr}}. \quad (35)$$

采用典型值后, 特征时间为

表 6 不同雨强下 C_{cr} 过程的特征时间

Table 6 Characteristic time of C_{cr} process at different rainfall intensity

$I / \text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$	1	5	25	50
T_{cr} / s	11392	2278	455	228

表 7 不同冰晶数浓度下 C_{ri} 过程的特征时间

Table 7 Characteristic time of C_{ri} process at different number concentration of ice crystals

N_i / m^{-3}	1	10	100	1000	10000
T_{ri} / s	144000	14400	1440	144	14

$$T_{cr} = \frac{3 \cdot 16}{I}, \quad (36)$$

I 为雨强, 以 $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ 为单位。不同雨强下 C_{cr} 过程的特征时间列于表 6。

冰晶碰并雨滴而冻结成霰的过程 C_{ri} 在冰晶较多的区域进行十分迅速, C_{ri} 过程可推导为

$$\frac{\partial Q_r}{\partial t} = - \int_0^\infty \frac{\pi}{4} D^2 a D^b \rho N_i E \frac{\pi}{6} D^3 \rho_w N_0 e^{-\lambda D} 10^{-4} dD = - \frac{Q_r}{T_{ri}}. \quad (37)$$

采用典型值后, C_{ri} 过程特征时间为

$$T_{ri} = \frac{1.44 \times 10^5}{\rho N_i}, \quad (38)$$

其中, N_i 为单位体积的冰晶数浓度, 单位为 m^{-3} 。不同冰晶数浓度下冰晶碰并雨滴的特征时间列于表 7。

这两种过程的特征时间, 都是云物理过程中比较典型的特征时间值。若采用显式格式, 当 $\Delta t < T_0$ 时计算可以正常进行; 而若采用半隐式格式, 当 $\Delta t < 2T_0$ 时计算可以正常进行。由此可见, 在一般情况下雨强不大于 $25 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$, 云滴被雨滴碰并的过程 C_{cr} 的特征时间为 455 s, 这时的时步条件容易满足; 一般云中冰晶数浓度为 $10^3 \sim 10^4$ 个/ m^3 , 冰晶碰并雨滴而冻结成霰的过程 C_{ri} 的特征时间仅为 10~100 s, 这种情况下选择时步就需要慎重。

5 大气波动

波动是大气运动的重要形式, 作为模拟对象应考虑其空时尺度, 即波长(L)和周期(T)。同样, 可以采用式(25)作为模式时空步长的阈值。以一个平流速度为 0 的大气波动为例, 设其波长为 L , 周期

为 T , 相速度 $C_0 = \frac{L}{T}$,

$$A = A_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) = A_0 \sin \frac{2\pi}{L} (x - C_0 t). \quad (39)$$

取 $\Delta X = L/4$, 在 $t = n \cdot \Delta t$ 时刻, 在 $i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_0 + 5$, 各点的值如表 8 所列。 $n=1$ 时是初始的波动, 由于波长 $L = 4\Delta X$, 所以 $A(i+4) = A(i)$ 。从式(39)可得,

$$A(n+1, i) = A \left(n, i - \frac{\Delta t C_0}{\Delta X} \right). \quad (40)$$

令 $t_0 = T/4$, 则 $t_0 = \Delta X / C_0$,

$$A(n+1, i) = A \left(n, i - \frac{\Delta t}{t_0} \right). \quad (41)$$

取不同的时步 Δt 计算时, 得到的结果列于表 8。

从表 8 可见, 采用 $\Delta t \leq t_0$, 即 $\Delta t \leq T/4$ 时计算结果模拟了波动特征。采用 $\Delta t = 2t_0$ 即 $\Delta t = T/2$ 时, $A(n+1, i) = A(n, i-2)$ 。波动被歪曲为驻波, $i = i_0 + 1, i_0 + 3, i_0 + 5$ 都变成了节点, 那里的 A 值始终为 0。采用 $\Delta t = 3t_0$ 即 $\Delta t = 3T/4$ 时, 波动的位相反了。采用 $\Delta t = 4t_0$ 即 $\Delta t = T$ 时, 波动成为定常

波, A 值只随空间变化, 而不随时间变化。

上例也可用式(1)来解, 考虑到平流为 0, 则

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \bar{F} \cdot \Delta t, \quad (42)$$

式中

$$\bar{F} = \frac{\int_n^{n+1} F dt}{\Delta t},$$

其中,

$$F = -\frac{2\pi C_0}{L} A_0 \cos \frac{2\pi}{L} (x - C_0 t).$$

图 1 为空间任一点的波动及其强迫项随时间变化的示意图, 虚线表示强迫项。图 1 中横轴的第 3 点相当于表 8 中 $i = i_0 + 1, n = 1$ 的点, 当 $\Delta t = t_0$ 时, 积分强迫项

$$\int_{t_0}^{2t_0} F dt = -A_0,$$

A 值由 0 变化为 $-A_0$, 下一时步

$$\int_{2t_0}^{3t_0} F dt = A_0,$$

A 值又变为 0, 计算下去可得表 8 值。而当 $\Delta t = 2t_0$ 时, 积分强迫项

表 8 不同时步下计算的波动演变过程

Table 8 Evolution process of the wave at different time steps

Δt	n	t_0					$2t_0$					$3t_0$					$4t_0$		
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
格点	$i_0 + 1$	0	$-A_0$	0	A_0	0	0	0	0	0	0	0	A_0	0	$-A_0$	0	0	0	0
Grid	$i_0 + 2$	A_0	0	$-A_0$	0	A_0	A_0	$-A_0$	A_0	$-A_0$	A_0	A_0	0	$-A_0$	0	A_0	A_0	A_0	A_0
	$i_0 + 3$	0	A_0	0	$-A_0$	0	0	0	0	0	0	$-A_0$	0	A_0	0	0	0	0	0
	$i_0 + 4$	$-A_0$	0	A_0	0	$-A_0$	$-A_0$	A_0	$-A_0$	A_0	$-A_0$	$-A_0$	0	A_0	0	$-A_0$	$-A_0$	$-A_0$	$-A_0$
	$i_0 + 5$	0	$-A_0$	0	A_0	0	0	0	0	0	0	A_0	0	$-A_0$	0	0	0	0	0

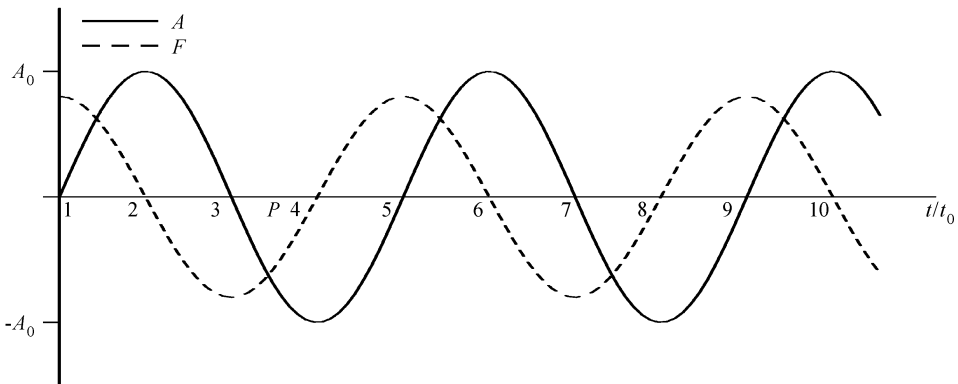


图 1 空间任一点的波动及其强迫项随时间的变化示意图

Fig. 1 Time change of forcing term at one point in a wave

$$\int_{t_0}^{3t_0} F dt = 0,$$

这时该点变化为曲线 A 的下一个 0 点, 这样该点就成为节点, 那里的 A 值始终为 0。而当 $\Delta t = 3t_0$ 时, 强迫项积分

$$\int_{t_0}^{4t_0} F dt = A_0,$$

该点从 0 变为 A_0 , 位相反了。图 1 中第 2 点相当于表 8 中 $i = i_0 + 2, n = 1$ 的点, 用不同时步的 $\bar{F} \cdot \Delta t$ 项同样可得

$$\int_{t_0}^{2t_0} F dt = -A_0, \int_{2t_0}^{3t_0} F dt = -A_0, \int_{3t_0}^{4t_0} F dt = A_0,$$

计算下去可以得出表 8 的结果。当 $\Delta t = 4t_0$ 时, 强迫项积分 $\bar{F} \cdot \Delta t$ 在任一点均为零值, A 值只随空间变化, 而不随时间变化, 波动成为定常波。在图 1 中可以选用任何一点 P 代表初始时刻的 A 值, 在不同时步下可以得出比表 8 更为细致的结果, 但结论是完全一致的。所以, 上述结果并不因 ΔX 的取值更为精细而改变。本例中所用强迫项为精确解, 当 Δt 过大时, 计算结果已经严重歪曲了实际波动。

一般模式中强迫项取近似值, 如 $\bar{F}^* = (F_i^n + F_{i+1}^n)/2$ 。以图 1 中第 3 点为例, 当 $\Delta t = t_0$ 时,

$$|\bar{F}^*| < \left| \int_n^{n+1} F dt \right| / \Delta t,$$

强迫项减小, 波动将受影响。当 $\Delta t = 2t_0$ 时,

$$|\bar{F}^*| = 0,$$

强迫项为 0, A 值始终不变。如果取任一 P 点, 则在 $\Delta t = 2t_0$ 时,

$$|\bar{F}^*| = 0,$$

即 A 值保持不变。所以采用强迫项的两点平均值后, $\Delta t = 2t_0$ 时波动成为定常波, 波速为 0, 这同精确解的节点有很大不同。当 $\Delta t = 3t_0$ 时,

$$\bar{F}^* = \frac{1}{2}(F_{i_0+1} + 0) < 0,$$

即为图 1 中 3 点与 6 点强迫项的平均值, 曲线 A 由 0 变为负值, 假如不考虑源汇项同曲线 A 的相态关系, 下一时刻, \bar{F}^* 为图中 6 点与 9 点强迫项的平均值, 大于 0, 曲线 A 由负值变为 0, 这时波动已经被严重歪曲, 但位相是正常的, 这同精确解有很大差别。当 $\Delta t = 4t_0$ 时, \bar{F}^* 始终为 0 值, A 值只随空间变化, 而不随时间变化, 波动成为定常波, 这同精确解一致。总之, 当 $\Delta t > T/4$, 强迫项不论是采用精确解还是两点平均的近似解, 数值模式都难以正

确模拟周期为 T 的波动。

从上述分析还可以看出, 当 $\Delta t \leq 2t_0$ 时, 波动过程强迫项的两点平均近似绝对值一般比精确解为小, 计算的波速可能偏小, 时步越长, 偏差越大。当 $\Delta t = 2t_0$ 时成为定常波, 波速为 0。陈嘉滨等^[6]采用半拉格朗日半隐式平方守恒, 强迫项为两点平均的格式计算的重力波, 有很好的守恒性, 但比精确解和时步较短的显式格式有比较明显的位相差, 同上述分析结果是否有关值得进一步探讨。

大气模式能够模拟的最小波长和周期为

$$L_{\min} = 4\Delta X, \quad (43)$$

$$T_{\min} = 4\Delta t. \quad (44)$$

由于

$$T = L/C_0, \quad (45)$$

最佳匹配为

$$T_{\min} = L_{\min}/C_0, \quad (46)$$

即

$$\Delta t = \Delta X/C_0, \quad (47)$$

也就是柯朗数

$$N_C \equiv C_0 \cdot \Delta t / \Delta X = 1. \quad (48)$$

当模式选用的 $\Delta t \gg \Delta X/C_0$ 时, 模式只能正确模拟 $T > 4\Delta t$ 的波, 其相应的波长为 $L > 4\Delta t \cdot C_0$, 而对于 $L < 4\Delta t \cdot C_0$ 的波不能正确模拟。

表 9 列有大气主要波动的特征值^[8]。非静力平衡模式采用未经任何简化的大气动力学方程组, 从理论上讲具有模拟所有大气运动的能力。实际上, 由于模式时空分辨率 ΔX 和 Δt 的限制使它无法模拟 $L < 4\Delta X$ 和 $T < 4\Delta t$ 的大气现象。如表 9 所列, 大气长波具有 10^3 km 和 10^5 s 的尺度, 一般模式的

表 9 各种大气波动的特征值

Table 9 Typical values of different atmospheric waves

类型 Type	L / km	$C / \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	T / s
长波 Long wave	10^3	$u \sim 10^1$	10^5
惯性重力外波 External inertial gravity wave	10^2	$\sqrt{gH + \left(\frac{f}{k}\right)^2} \sim 320$	10^2
惯性重力内波 Internal inertial gravity wave	10^2	$\sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} H^2 + \left(\frac{f}{k}\right)^2} \sim 50$	10^3
重力外波 External gravity wave	10^1	$\sqrt{gH} \sim 300$	10^2
重力内波 Internal gravity wave	10^1	$\sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} H^2} \sim 48$	10^2
声波 Sound wave	$10^{-3} \sim 10^2$	$\sqrt{\gamma R_d T} \sim 330$	$10^{-2} \sim 10^3$

分辨率都能达到其模拟的要求。惯性重力波具有 10^2 km 的波长和 $10^2 \sim 10^3$ s 的周期, 在 β 中尺度模式中取 ΔX 为几十公里, Δt 为几百秒就能模拟。当 GRAPES 模式采用 $\Delta X = 30$ km 时, 空间分辨率已能模拟惯性重力波, 但采用的时步 $\Delta t = 1800$ s, 远大于其 $T/4$ 的阈值, 即不能正确地模拟惯性重力波。在 γ 中尺度模式中采用 ΔX 为几公里, Δt 为几十秒, 才能模拟重力波。

声波(包括次声波)的波长和周期范围很广, 模式能够模拟的仅是 $L \geq 4\Delta X$ 和 $T \geq 4\Delta t$ 的声波。声波虽然对天气现象和过程没有显著的直接作用, 但正是通过它来达成大气运动场和气压场的弹性适应^[9]。当模式的空间格距 ΔX 确定以后, 在非静力平衡模式中采用显式计算时必须遵守

$$\Delta t \leq \Delta X / C, \quad (49)$$

否则不但会歪曲对声波的正确模拟, 而且会造成计算不稳定。采用隐式格式时可以不遵守式(49)的限制, 因为它不会引起计算不稳定, 而对声波模拟的歪曲在大气模拟中是可以接受的, 它不会对大气过程引起显著的影响。实际上, 当 GRAPES 等隐式非静力平衡模式采用较大时步 $\Delta t > \Delta X / C$ 时, 对声波过程作了很大平滑, 但同时完成了大气运动场和气压场的弹性适应。

惯性重力波和重力波等大气波动对中小尺度天气过程具有重要的作用, 必须对它们进行精确的模拟。这些波动同样具有较宽的波长和周期范围, 模式能够精确模拟的只是其中波长 $L \geq 4\Delta X$ 和周期 $T \geq 4\Delta t$ 的部分。同样, 当模式 ΔX 确定之后, 式(43~45)成立, 如果 $\Delta t > \Delta X / C$, 模式中空间能反映的大气波动有一部分, 即 $4\Delta X < L < 4\Delta t \cdot C$, 在时变计算中将不可避免地受到歪曲。同 ΔX 相匹配的最佳 Δt 的选择仍可参考广义柯朗数 $N_C = C \cdot \Delta t / \Delta X$ 。这个限制反映了大气波动时空分布的内在联系, 同计算方案基本无关。

6 结语

(1) 半拉格朗日半隐式格式采用大时步时, 非线性源汇项的计算应采用精确公式; 首尾两点(加权)平均的计算式只适用于较小时步或近线性源汇场。

(2) 半拉格朗日半隐式计算格式具有较好的稳定性, 对计算时步的限制不大, 但正定变量的计算时步不能超过汇项特征时间的 2 倍。

(3) 为了精确模拟各种大气过程和波动, 应考虑其时空特征尺度, 不论何种计算格式, 广义柯朗数仍为时步选择的重要参考指标。

参考文献 (References)

- [1] Williamson D L, Rasch P. A class of semi-Lagrangian approximations for fluids. *J. Atmos. Sci.*, 1989, **49**: 2082~2096
- [2] Staniforth A, Cote J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—A review. *Mon. Wea. Rev.*, 1991, **119**: 2206~2223
- [3] Ritchie H, Temperton C, Simmons A, et al. Implementation of the semi-Lagrangian method in a high-resolution version of the ECMWF forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, 1995, **123**: 489~514
- [4] Nair R, Machenhauer B. The mass-conservative cell-integrated semi-Lagrangian advection scheme on the sphere. *Mon. Wea. Rev.*, 2002, **120**: 649~667
- [5] 陈嘉滨, 季仲贞. 半拉格朗日平方守恒计算格式的研究. 大气科学, 2001, **25**(6): 837~846
Chen Jiabin, Ji Zhongzhen. A study of energy-conserving semi-Lagrangian scheme. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2001, **25**(6): 837~846
- [6] 陈嘉滨, 季仲贞. 半隐式半拉格朗日平方守恒计算格式的构造. 大气科学, 2004, **28**(4): 527~535
Chen Jiabin, Ji Zhongzhen. A study of complete square-conserving semi-implicit semi-Lagrangian scheme. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2004, **28**(4): 527~535
- [7] 陈德辉, 胡志晋, 徐大海, 等. CAMS 大气数值预报模式系统研究. 北京: 气象出版社, 2004. 13
Chen Dehui, Hu Zhijin, Xu Dahai, et al. *Study on CAMS Atmospheric Numerical Prediction Model System* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 2004. 13
- [8] 刘式适. 大气波动. 中国大百科全书(大气科学卷). 北京: 中国大百科全书出版社, 1987. 68~70
Liu Shikuo. Atmospheric waves. *China Great Encyclopedia, Atmospheric Sciences* (in Chinese). Beijing: China Great Encyclopedia Press, 1987. 68~70
- [9] Hu Zhijin, Zou Guangyuan. Atmospheric non-hydrostatic model and elastic adaption. *Science in China* (Series B), 1992, **35**(4): 463~475