

JFNK 方法概述及其在大气全隐式非静力模式中的应用方案

陈嘉滨¹ 纪立人¹ 陈长胜^{2, 3} 薛纪善⁴

1 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

2 南京信息工程大学大气科学系, 南京 210044

3 吉林省气象台, 长春 130062

4 中国气象科学研究院, 北京 100081

摘要 首先介绍了近年来新发展的非线性方程全隐式数值求解的 JFNK 方法, 及其在地球流体力学方面应用计算实例。可看到, 无论在计算精度还是计算效率方面, 全隐式数值求解远远超过常规的半隐式计算格式。其次, 还讨论了 JFNK 方法在气象非静力模式中应用方案, 并提出了用静力假定和半隐式差分格式来构造预条件处理器, 变三维求解为二维求解, 简化了方程组求解难度。该方案不仅可用于差分模式, 也为用谱方法求解非静力模式提供可能。

关键词 JFNK 方法 非线性方程 预条件处理器 全隐式 非静力模式

文章编号 1006-9895 (2006) 05-0821-13

中图分类号 P435

文献标识码 A

A Review of JFNK Methods and Its Applications in Atmospheric Non-Hydrostatical Model

CHEN Jia-Bin¹, JI Li-Ren¹, CHEN Chang-Sheng^{2, 3}, and XUE Ji-Shan⁴

1 *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

2 *Department of Atmospheric Science, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044*

3 *Meteorological Observatory of Jilin, Changchun 130062*

4 *Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081*

Abstract Over the last 10 years there have been major advances in supercomputing, which have triggered adoption of higher and higher resolution in atmospheric numerical models for various scales. And this in turn provides possibility and necessity to use implicit scheme and seek for its efficient algorithms. JFNK (Jacobian-Free Newton-Krylov) method, a highly efficient method for solving the implicit nonlinear equation, has been successfully used in a number of fields of computational physics

In this paper, the JFNK method and its application in geophysical flows are introduced. The JFNK method has been shown to be more efficient and accurate than the semi-implicit method for a given level of accuracy and a given CPU time. Preliminary results with the advection equation also show that even in the case of strong basic flow, the integration with the implicit scheme keeps well the features of the analytical solution, while apparent distortion occurs with the explicit or semi-implicit schemes.

This paper also discusses the applications of the JFNK method in the atmospheric non-hydrostatic model. In a

height-based terrain-following coordinate a set of implicit equations for the non-hydrostatic model is derived and the construction of preconditioner using hydrostatic relation and the semi-implicit method is proposed. And the problem solving the 3-D Helmholtz equation, which is commonly involved in non-hydrostatic model, can be reduced to a set of 2-D problems, thus releasing the difficulty of computation. The formulation can not only be used for the finite-difference models but also provide the possibility to use the spectral method in the non-hydrostatic models.

Key words JFNK method, nonlinear equations, implicit method, preconditioner, semi-implicit method, nonhydrostatic model

1 引言

灾害性天气预报一直是气象科学的一个大课题。国际上正着手开展的“THORPEX (The Observing system Research and Predictability Experiment)”计划,其目的就在于改进对有重大影响(high-impact)天气事件的预报。作为主要预报手段,发展完善数值预报模式就成为当务之急。它涉及多方面的问题,其中提高模式的水平和垂直分辨率是基本的,也是有效的手段,这一点已为近二三十年来数值预报实践所肯定。近年来,计算机和计算技术迅猛发展,充分利用计算机资源,极大地提高模式分辨率,发展高精度新一代数值模式,已成为各国数值预报研究的共同努力方向,不仅是针对中小尺度系统区域模式,对于中期预报和短期气候预报模式也是如此。例如,欧洲中期天气预报中心的计划,拟在2008年全球模式达到15 km分辨率,而实际进展,很可能提前实现。

然而提高分辨率,不是简单地缩小网格就可达到预期目的。研究表明,在目前模式水平上继续提高分辨率是否有明显收益,采用全隐式方案是保证之一。因此,发展全隐式模式,研究它的高效算法,成为模式发展的一个前沿课题。

多年来,各国的模式广泛采用半隐式差分格式^[1, 2],对不同时间尺度的大气运动采取不同的时间差分格式。从计算稳定性看,半隐式格式容许人们取时间步长远比显式格式的长。然而,这种在方程组中对产生快波和慢波项分别采用显式和隐式差分做法,造成不协调形成新的误差源^[3]。例如,对 σ 坐标及本文使用的高度地形追随坐标 $\hat{z}$ 中气压梯度项的差分,其第一项是线性项直接做隐式差分;而第二项是非线性项,先线性化得出一项线性项和一项为偏差变量的非线性项,前者使用隐式差分,后者使用显式差分。如此在气压梯度项这三部

分中,使用两种不同差分格式,无疑将产生不协调,引起计算误差。另外,很难做到差分格式保持原方程组的时空守恒性。很多采用半隐式格式的天气预报和气候模式中,所使用的总能量守恒计算格式,仅是在显式格式条件下才成立。例如欧洲中期天气预报中心(ECMWF)原欧拉格式的模式就是如此。只有向全隐式格式发展,才有助于解决上述问题。

在这组非线性方程中取全隐式格式,即不管是在线性项还是非线性项中的变量均取下一时刻(一阶精度)或取下一和当前时刻的平均(二阶精度),就能克服上面的问题。用迭代求解,在给定的时间步长内多次迭代直至非线性误差很小,就称之为非线性协调求解方法。在这种全隐式非线性协调求解方法中就不会出现像半隐式格式那样产生不协调引起的误差及对计算格式守恒性影响(如果此格式是守恒的)。我国学者早已认识采用全隐式格式的必要性,并沿此方向长期不懈努力,例如,有名的全隐式能量守恒格式^[4],在离散化的差分方程组中应用此格式可使整个系统在时间和空间上保持总能量守恒,和防止能量向短波单向传递的“尺度守恒性”,保证计算绝对稳定。这比世界上常用的瞬时空间守恒格式进了一大步。然而,这种全隐式格式尚未解决迭代收敛问题,致使在实际应用时,不管收敛与否只要达到事先设定迭代次数,就停止迭代。这会带来不小的误差,并且总能量难于保持原设计的时空守恒,因而需要探索更好的求解方法。

此外,大气谱模式,是对产生重力波的项进行线性化,然后作隐式处理,其他项如平流项作显式处理,最后消元形成对一个变量的线性 Helmholtz 或 Poisson 方程。全隐式格式应用于大气非线性方程组时,就难于形成一个线性的 Helmholtz 方程。另外,对于非静力的半隐式半拉格朗日预报模式,最后要求解一个三维 Helmholtz 方程。这个方程是变系数,且带交叉微商项,很难用谱方法处理。至

今还没有看到用全隐式格式求解谱模式的报导, 这可能是一个原因。

近年来, 在计算数学领域内发展出一种专门针对非线性方程隐式求解方法, 称为 JFNK (Jacobian-free Newton-Krylov) 方法^[3, 5, 6]。Newton 方法提供非线性协调性, 而 Krylov 方法是用解大型矩阵。JFNK 方法一个突出特点是, 它不要求形成和存贮 Jacobian 矩阵, 只是将 Jacobian 矩阵的作用通过一种差分来近似求得。其次, 在 JFNK 方法中用 Krylov 子空间方法求解矩阵时往往使用广义的最小余差法 (GMRES)^[7], 它是求解大型非对称矩阵的有效方法。十分关键的是, JFNK 引入预条件处理器 (preconditioner), 或称“预条件子”, 使求解的矩阵尽量对角化, 迭代求解十分有效。预条件处理器的有效构造, 十分依赖于所研究的物理问题, 因而具有充分的研究发展空间, 需要我们气象工作者去研究, 而这也是主要的难点所在。根据物理问题形成的预条件处理器^[3]是十分好用的, 它在给定的时间步长内对给定的问题给出一个光滑且合理的近似解。目前在国外, JFNK 方法已成功地应用到计算物理的多个领域^[6], 如流体动力学、空气动力学、等离子物理、电抗性流和相变流、辐射扩散和辐射流体力学以及地球物理流体等领域中。在国内, 大气科学领域尚未见其应用的报导。

本文第一部分 (包括下面的第 2 和第 6 节), 将概述非线性方程全隐式数值求解的 JFNK 方法及应用于气象等一些计算结果, 其中包括本文作者最近的部分计算结果。第二部分 (包括第 3、4、5 节), 提出应用 JFNK 方法, 研究数值天气预报和气候模拟中完全非线性动力学方程组的全隐式计算问题, 给出了大气非静力模式中应用方案, 以期提高计算精度及改进非静力模式天气预报和气候模拟的效果。最后第 7 节是本文一个总结。

2 JFNK 方法

JFNK 方法最先是在文献^[5, 8]中提出, 这里简介如下。以 Newton 方法求解如下非线性方程组,

$$F(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

$\mathbf{x}$ 是离散变量的向量。对 (1) 式用 Taylor 展开, 略去高次项,

$$F(\mathbf{x}^{k+1}) = F(\mathbf{x}^k) + F'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k).$$

令上式右端为零就得到严格的 Newton 法, 其迭代

形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}^k) \delta \mathbf{x}^k &= -F(\mathbf{x}^k), \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \delta \mathbf{x}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

给定初值 $\mathbf{x}^0$ 。这里 $F(\mathbf{x}^k)$ 是非线性余差向量值 (它将在第 4 节中详细给出), $\mathbf{J} = F'$ 是相关的 Jacobian 矩阵, k 是非线性迭代指数。迭代依赖于非线性余差的范数, 直到

$$\frac{\|F(\mathbf{x}^k)\|}{\|F(\mathbf{x}^0)\|} \leq l_{\text{res}} (= 1.0 \times 10^{-7}),$$

迭代停止。这里 l_{res} 是非线性收敛判据。

在多数情况下, 公式 (2) 中的 Jacobian 矩阵 $\mathbf{J}$ 是巨大的, 有时写不出具体形式, 且求解十分耗时。往往采用 Krylov 迭代的解法 GMRES 近似求解, 第 m 次 Krylov 迭代是如下形式:

$$\delta \mathbf{x}_m^k = a_0 \mathbf{r}_0 + a_1 \mathbf{J} \mathbf{r}_0 + a_2 \mathbf{J}^2 \mathbf{r}_0 + \dots + a_m \mathbf{J}^m \mathbf{r}_0, \quad (3)$$

这里,

$$\mathbf{r}_0 = -\mathbf{J} \delta \mathbf{x}_0^k - F(\mathbf{x}^k),$$

$\delta \mathbf{x}_0^k$ 是初始估值。而 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ 是由 Krylov 方法构成的系数 (即 GMRES 算法来计算)。Krylov 迭代直到

$$\frac{\|\mathbf{J} \delta \mathbf{x}_m^k - F(\mathbf{x}^k)\|}{\|\mathbf{J} \delta \mathbf{x}_0^k - F(\mathbf{x}^k)\|} \leq \epsilon_l,$$

这里,

$$\epsilon_l = \gamma \|F(\mathbf{x}^k)\|,$$

γ 是常数, 取为 1.0×1.0^{-3} 。

Newton-Krylov 方法需要形成和贮存 Jacobian 矩阵, 对于一些复杂的非线性系统, 这是十分艰巨的工作。但观察 (3) 式, 可发现仅要求 Jacobian 矩阵的作用 (即矩阵与变量相乘), 而不要求矩阵本身。Jacobian 矩阵的作用可近似表示^[5, 8]为

$$\mathbf{J} \mathbf{v} \cong \frac{F(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{\epsilon}, \quad (4)$$

这里,

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^N a x_i}{N \|\mathbf{v}\|_2}, \quad a = 1.0 \times 10^{-8},$$

这里 N 是格点数。(4) 式近似表示 Jacobian 矩阵的作用, 不需要形成和贮存矩阵。然而却要求贮存每一个 Krylov 向量 ($a_0 \mathbf{r}_0, a_1 \mathbf{J} \mathbf{r}_0, a_2 \mathbf{J}^2 \mathbf{r}_0, \dots, a_m \mathbf{J}^m \mathbf{r}_0$)。因此, 假若 Krylov 迭代数是巨大的, 则贮存量就不可承受。这里保持迭代数充分小的关键, 是对这个线性系统进行预条件处理。方程 (2)

式的预条件处理方案为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad (5)$$

这里 $\mathbf{P}$ 是预条件处理矩阵, 它应具有使矩阵 $(\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1})$ 尽量对角化的性质。定义新矩阵为

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}^{-1}. \quad (6)$$

而新解为

$$\delta \mathbf{x}' = \mathbf{P} \delta \mathbf{x}^k, \quad (7)$$

即

$$\mathbf{J}' \delta \mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

或把(8)式重写为

$$\mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \delta \mathbf{x}' = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k). \quad (9)$$

解上面方程, 我们需要计算矩阵 $\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ ($=\mathbf{J}'$) 对 Krylov 向量 $\mathbf{v}$ 的作用,

$$\mathbf{w} = \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{v}. \quad (10)$$

计算上分为两步进行:

(1) 对 $\mathbf{q}$ 求解 $\mathbf{P}\mathbf{q}=\mathbf{v}$, 相当于对后面第 5 节半隐式方程 (52) ~ (56) 或 (57) 求解;

(2) 用 Jacobian-free 近似计算,

$$\mathbf{J}\mathbf{q} \approx \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\epsilon}, \quad (11)$$

该过程每次需要 Jacobian 矩阵的作用时都要进行。当 Krylov 方法对解 $\delta \mathbf{x}'$ 收敛后, 最后一步是对 $\delta \mathbf{x}$ 求解,

$$\mathbf{P} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}', \quad (12)$$

完成一次 Newton 迭代。

3 大气非静力模式基本方程组

3.1 在高度 z 坐标中的基本方程

运动方程

$$\frac{du}{dt} = -\frac{c_p \theta}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + f v + F_u + \frac{uv \tan \varphi}{r}, \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_p \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - f u + F_v - \frac{u^2 \tan \varphi}{r}, \quad (14)$$

$$\frac{dw}{dt} = -c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial r} - g + F_w. \quad (15)$$

在静力情况下直接令 dw/dt 为零。

连续方程

$$(\gamma - 1) \frac{d\Pi}{dt} = -\Pi D_3 + \frac{F_\theta^*}{\theta}. \quad (16)$$

热力学方程

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{F_\theta^*}{\Pi}, \quad (17)$$

这里,

$$F_\theta^* = \frac{Q_T + F_T}{c_p},$$

$$\gamma = \frac{c_p}{R},$$

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} + w \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}.$$

F_u, F_v, F_w, F_T 为扩散项, Q_T 为非绝热加热项。三维散度 D_3 、位温 θ 和气压中间变量 Π 分别定义为

$$D_3 = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} = \frac{T}{\Pi},$$

$$\Pi = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

其他符号与常用气象符号相同。

3.2 高度地形追随坐标 $\hat{z}$ 中的基本方程

高度坐标是描述非静力平衡动力过程的理想垂直坐标, 但是起伏不平的地表面给下边界条件的给定增加了困难。考虑到这一点, 采用既有 σ 坐标地表面是一个坐标面特点, 又有高度坐标性质的“高度地形追随坐标”(height-based terrain-following coordinate) 作为垂直坐标^[9], 定义为

$$\hat{z} = Z_T \frac{z - Z_s(\lambda, \varphi)}{Z_T - Z_s(\lambda, \varphi)}, \quad (18)$$

这里 Z_s 和 Z_T 分别为地形高度和模式层顶高度。在 $z=Z_s$ 处, $\hat{z}=0$; 在 $z=Z_T$ 处, $\hat{z}=Z_T$ 。高度地形追随坐标中的垂直速度 $\hat{w}$ 可表示为

$$\hat{w} = \frac{d\hat{z}}{dt} = \frac{Z_T}{\Delta Z_s} \left[w - \frac{\Delta Z_s}{\Delta Z_s} \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial Z_s}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial Z_s}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (19)$$

其中, w 是 z 坐标中的垂直速度, $\Delta Z_s = Z_T - Z_s(\lambda, \varphi)$ 和 $\Delta Z_z = Z_T - z$ 。上下边界条件为 $\hat{w}_T = \hat{w}_s = 0$, 在 $\hat{z}=0$ 和 $\hat{z}=Z_T$ 处。这种高度地形追随坐标在国内已成功地应用到非静力模式中^①。

在绝热无摩擦假定下, 上面的方程 (13) ~ (17) 在高度地形追随坐标 $\hat{z}$ 中, 可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (f + \zeta) V + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + Z_{sr} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \Pi = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (f + \zeta)U + \hat{w} \frac{\partial V}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left(\frac{1 - \mu^2}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} + Z_{sy} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \Pi = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial w}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{z}} + c_p \theta \frac{Z_T}{\Delta Z_s} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} + g = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Pi D_3 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (24)$$

为了便于谱方法应用, 上面的方程中已将速度 (u , v) 改写为

$$U = u \cos \varphi,$$

$$V = v \cos \varphi.$$

垂直速度、涡度和三维散度定义为

$$\hat{w} = \frac{Z_T}{\Delta Z_s} \left[w - \frac{\Delta Z_s}{\Delta Z_s} \frac{1}{(1 - \mu^2)} (UZ_{sr} + VZ_{sy}) \right],$$

$$\zeta = \left[\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \mu} \right],$$

$$D_3 = (D_3)_{\tilde{z}} - \frac{1}{(1 - \mu^2) \Delta Z_s} (UZ_{sr} + VZ_{sy}).$$

而 $(D_3)_{\tilde{z}}$ 是 $\tilde{z}$ 面上的散度, 定义为

$$(D_3)_{\tilde{z}} = \left[\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right]_{\tilde{z}} + \left(\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{\tilde{z}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tilde{z}}.$$

其他符号定义为

$$\mu = \sin \varphi,$$

$$Z_{sr} = \frac{1}{a} \frac{\partial Z_s}{\partial \lambda},$$

$$Z_{sy} = \frac{(1 - \mu^2)}{a} \frac{\partial Z_s}{\partial \mu},$$

其中, Z_s 是地形高度。(20) ~ (24) 方程就是非静力模式大气控制方程组, 它包含有声波, 用显式格式计算, 时间步长只能取得非常小, 计算效益差。如用半隐式计算需求解三维的 Helmholtz 方程, 迭代难于收敛。下面我们将用第 2 节中介绍的 JFNK 方法求解, 具体分析如下。

4 非线性余差——全隐式差分格式

为便于灵活的空间离散化 (或差分方法或谱方法), 方程组 (20) ~ (24) 仅对时间离散化, 保留空间微分形式, 其非线性余差书写如下:

$$(U^{n+1} - U^n) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[- (f + \zeta) V + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + Z_{sr} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \Pi \right]^{n+1} + \frac{1}{2} [\dots]^n = F_u(U^{n+1}), \quad (25)$$

$$(V^{n+1} - V^n) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left\{ (f + \zeta) U + \hat{w} \frac{\partial V}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left[\frac{(1 - \mu^2)}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Z_{sy} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] \Pi \right\}^{n+1} + \frac{1}{2} [\dots]^n = F_v(V^{n+1}), \quad (26)$$

$$(w^{n+1} - w^n) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial w}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{z}} + c_p \theta \frac{Z_T}{\Delta Z_s} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} + g \right]^{n+1} + \frac{1}{2} [\dots]^n = F_w(w^{n+1}), \quad (27)$$

$$(\Pi^{n+1} - \Pi^n) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Pi D_3 \right]^{n+1} + \frac{1}{2} [\dots]^n = F_\Pi(\Pi^{n+1}), \quad (28)$$

$$(\theta^{n+1} - \theta^n) \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \right]^{n+1} + \frac{1}{2} [\dots]^n = F_\theta(\theta^{n+1}), \quad (29)$$

其中, 方括号中的省略号表示这里的所有项与前一个方括号中的项全完相同。右端项表示方程时空离散后引起的非线性余差, 向量表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{n+1}) = \begin{pmatrix} F_u(u^{n+1}) \\ F_v(v^{n+1}) \\ F_w(w^{n+1}) \\ F_\Pi(\Pi^{n+1}) \\ F_\theta(\theta^{n+1}) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$\mathbf{x}$ 是向量离散变量 (u , v , w , Π , θ)。

5 静力假定下的控制方程组——预条件处理器

这里, 我们是将静力和绝热假定下的方程组作为预条件处理器。理由是, 从物理上讲, 控制方程组的静力假定下的解与非静力的解应比较相近, 后者的解仅是前者的锦上添花。因此, 静力假定下的解形成的预条件处理矩阵, 具有前面公式 (5) 中要求的性质——矩阵 ($\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$) 尽量对角化, 进一步加快

迭代收敛速度。

5.1 控制方程组

在静力和绝热假定下, 方程组(20)~(24)改写为运动方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (f + \zeta)V + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + Z_{sr} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \Pi = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (f + \zeta)U + \hat{w} \frac{\partial V}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p \theta \left(\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Z_{sy} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \Pi = 0. \quad (32)$$

连续方程:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{(\gamma-1)} \Pi D_3 = 0. \quad (33)$$

为计算 $\hat{z}$ 面上的垂直速度, 上方方程又可改写为

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = - \frac{(\gamma-1)}{\Pi} \frac{d\Pi}{dt} - D_2, \quad (33-1)$$

或

$$\int_0^{Z_T} \left(\frac{1}{\Pi} \frac{d\Pi}{dt} \right) d\hat{z} = - \frac{\bar{D}_2}{(\gamma-1)}. \quad (33-2)$$

其中, $\bar{D}_2$ 是所有各层二维散度 $(D_2)_k$ 的平均, D_2 定义为

$$D_2 = D - \frac{1}{(1-\mu^2)\Delta Z_s} (U Z_{sr} + V Z_{sy}).$$

这里 $\hat{z}$ 面上的散度 D 定义为

$$D = \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right]_{\hat{z}} + \left(\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{\hat{z}},$$

垂直速度 $\hat{w}$ 是积分 (33-1) 式求得为

$$\hat{w} = - \int_0^{\hat{z}} \frac{(\gamma-1)}{\Pi} \frac{d\Pi}{dt} d\hat{z} - \int_0^{\hat{z}} D_2 d\hat{z}. \quad (33-3)$$

热力学方程:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (34)$$

静力方程:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} = - \frac{\Delta Z_s}{Z_T c_p \theta} g. \quad (35)$$

为计算 $\hat{z}$ 面上的垂直速度 $\hat{w}$, 上方方程又可改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} \right) + \frac{1}{\Delta Z_s} (V \nabla Z_s) \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (35-1)$$

D_3 又可改写为

$$D_3 = D_2 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}. \quad (36)$$

方程 (31)~(35) 是在静力和绝热假定下的控制方程。而连续方程 (33-1)、(33-2) 和静力方程 (35-1) 是用来计算诊断变量垂直速度 $\hat{w}$ 的。

5.2 半隐式方程组

为构造半隐式差分格式, 需对产生重力波的项分出线性项来。

运动方程: 用静力关系 (35) 式, 运动方程气压梯度项第二项为

$$c_p \theta Z_{sr} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} = c_p \theta Z_{sr} \left(- \frac{\Delta Z_s}{Z_T} \frac{g}{c_p \theta} \right) = - \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sr},$$

同理有

$$c_p \theta Z_{sy} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{z}} = - \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sy}.$$

因此, 运动方程可化为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - N_u - c_p \theta_0 \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - N_v - c_p \theta_0 \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu}, \quad (38)$$

其中,

$$N_u = - (f + \zeta)V + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{a(1-\mu^2)} \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p (\theta - \theta_0) \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sr},$$

$$N_v = (f + \zeta)U + \hat{w} \frac{\partial V}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) +$$

$$c_p (\theta - \theta_0) \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sy},$$

其中, θ_0 为常数。

连续方程: (33) 式中 ΠD_3 项可分解为

$$\Pi D_3 = \Pi \left\{ \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right]_{\hat{z}} + \left(\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{\hat{z}} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} - \frac{1}{(1-\mu^2)\Delta Z_s} (U Z_{sr} + V Z_{sy}) \right\} =$$

$$\Pi_0 D + (\Pi - \Pi_0) D + \Pi \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1-\mu^2)\Delta Z_s} (U Z_{sr} + V Z_{sy}) \right],$$

因此, 连续方程可化为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = - N_{\Pi} - \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} D, \quad (39)$$

其中,

$$N_{\Pi} = \frac{1}{(\gamma-1)} \left\{ (\Pi - \Pi_0) D + \Pi \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1-\mu^2)\Delta Z_s} (UZ_{sx} + VZ_{sy}) \right] \Bigg\} + \left[\frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} \right].$$

热力学方程: 令 $\theta = \theta' + \theta_0$, 热力学方程为

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -N_\theta, \quad (40)$$

其中,

$$N_\theta = \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \theta'}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \theta'}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \theta'}{\partial \tilde{z}}.$$

热力学方程的半隐式项应从垂直平流的垂直速度 $\hat{w}$ 中分出线性项来, 因 θ_0 取为常数, 则此分出的线性项为零, 这就等于热力学方程是取显式格式。

静力方程:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\Delta Z_s}{Z_T} \frac{g}{c_p \theta}. \quad (41)$$

5.3 半隐式方程组差分形式

方程 (37) ~ (40) 的半隐式差分写为

$$(U^{n+1} - U^n) \frac{1}{\Delta t} + N_u^n + c_p \theta_0 \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial \lambda} = 0, \quad (42)$$

$$(V^{n+1} - V^n) \frac{1}{\Delta t} + N_v^n + c_p \theta_0 \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial \mu} = 0, \quad (43)$$

$$(\Pi^{n+1} - \Pi^n) \frac{1}{\Delta t} + N_\Pi^n + \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} D^{n+1} = 0, \quad (44)$$

$$(\theta^{n+1} - \theta^n) \frac{1}{\Delta t} + N_\theta^n = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\Delta Z_s}{Z_T} \frac{g}{c_p \theta}. \quad (46)$$

其中,

$$N_u = -(f + \zeta)V + \hat{w} \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{a(1-\mu^2)} \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) + c_p (\theta - \theta_0) \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sx},$$

$$N_v = -(f + \zeta)U + \hat{w} \frac{\partial V}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{U^2 + V^2}{2} \right) +$$

$$c_p (\theta - \theta_0) \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \left(\frac{g \Delta Z_s}{Z_T} \right) Z_{sy},$$

$$N_\Pi = \frac{1}{(\gamma-1)} \left\{ (\Pi - \Pi_0) D + \Pi \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \tilde{z}} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1-\mu^2)\Delta Z_s} (UZ_{sx} + VZ_{sy}) \right] \Bigg\} +$$

$$\left[\frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{z}} \right],$$

$$N_\theta = \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + \hat{w} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}}.$$

由 (42)、(43) 式可以看出, 气压梯度力的两项用 n 和 $n+1$ 时刻分别进行计算, 可能引起截断误差的不一致。对比 (25)、(26) 式全隐式格式, 则不存在这个困难。

计算垂直速度: 先利用连续方程 (33-2) 和静力方程 (35-1) 计算出各层的 $d\Pi/dt$, 然后将 $d\Pi/dt$ 代入方程 (33-3) 计算出 $\tilde{z}$ 面上的垂直速度 $\hat{w}$ 。最后按 $\hat{w}$ 和 w 的 (19) 关系式计算出 z 面上的垂直速度 w 。这是在静力假定下计算 (诊断) 出的垂直速度, 它相当于非静力条件下用方程 (19) 计算出的垂直速度。不同在于前者是诊断的, 后者是预报的。

5.4 预条件处理器

这里采用静力和半隐式构造预条件处理器。由前面的公式 (2) 看到, 求解变量是变量的增量, 而不是变量本身。因此, 我们将方程 (42) ~ (45) 的预报变量改写为增量形式 (δ 形式), 以便在后面的 Newton 方法中用作预处理器。令

$$\delta U = U^{n+1} - U^n, \quad (47)$$

$$\delta V = V^{n+1} - V^n, \quad (48)$$

$$\delta w = w^{n+1} - w^n, \quad (49)$$

$$\delta \Pi = \Pi^{n+1} - \Pi^n, \quad (50)$$

$$\delta \theta = \theta^{n+1} - \theta^n. \quad (51)$$

注意, 此处 (49) 式中的 δw 不是一个预报变量, 其中 w^{n+1} 是在其他几个方程预报出后, 再诊断求出, 这里形式上把它写为预报变量。

由 (42) ~ (45) 式,

$$\delta U \frac{1}{\Delta t} + c_p \theta_0 \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta \Pi = -R_x, \quad (52)$$

$$\delta V \frac{1}{\Delta t} + c_p \theta_0 \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \delta \Pi = -R_y, \quad (53)$$

$$\delta w = -R_w, \quad (54)$$

$$\delta \Pi \frac{1}{\Delta t} + \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} \delta D = -R_\Pi, \quad (55)$$

$$\delta \theta \frac{1}{\Delta t} = -R_\theta, \quad (56)$$

其中,

$$R_x = N_u^n + c_p \theta_0 \frac{1}{a} \frac{\partial \Pi^n}{\partial \lambda},$$

$$R_y = N_v^n + c_p \theta_0 \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \Pi^n}{\partial \mu},$$

$$R_w = -(w^{n+1} - w^n),$$

$$R_\Pi = N_\Pi^n + \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} D^n,$$

$$R_\theta = N_\theta^n$$

或形式上把 (52)~(56) 式写为

$$\mathbf{P}\delta\mathbf{x} = \mathbf{R}_e \quad (57)$$

其中, 向量预报变量 $\delta\mathbf{x}$ 、右端项 $\mathbf{R}_e$ 和矩阵 $\mathbf{P}$ (即前面公式要求的预条件处理矩阵) 为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 & c_p\theta_0 \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 & c_p\theta_0 \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\Pi_0}{(\gamma-1)} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} & 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta V \\ \delta w \\ \delta \Pi \\ \delta \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_w \\ R_\Pi \\ R_\theta \end{bmatrix}.$$

现在来求解方程 (52)~(56)。对 (52)、(53) 和 (54) 联立、消元, 最后求得以组合变量 δD 为变量的 Helmholtz 方程,

$$(1 - C\nabla^2) \delta D = R, \quad (58)$$

其中,

$$D = \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right]_z + \left(\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_z,$$

$$C = \frac{c_p \Delta t^2 \Pi_0 \theta_0}{(\gamma-1)},$$

$$R = -c_p \theta_0 \Delta t^2 \nabla^2 R_\Pi -$$

$$\frac{\Delta t}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} R_x + \frac{\partial}{\partial \mu} (R_y \sqrt{1-\mu^2}) \right],$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{a^2 \partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right].$$

完全预处理过程包括如下几个步骤:

- (1) 先解方程 (58) 得出 δD ;
- (2) 将 δD 代入方程 (55) 求出 $\delta \Pi$;
- (3) 将 $\delta \Pi$ 代入方程 (52) 和 (53) 求出 δU 和 δV ;
- (4) 显式求解 (56) 得出 $\delta \theta$;

(5) 利用上节方法诊断算出 w^{n+1} , 并使用前时刻的 w^n 可得到 δw ;

(6) 从而求出解向量 $\delta\mathbf{x} = (\delta u, \delta v, \delta w, \delta \Pi, \delta \theta)^T$ 。

至此, 给出了以半隐式静力模式为预条件处理器、求解全隐式非静力模式的完整方案。对照第 2 节 JFNK 的求解流程, 不难看出, (25)~(29) 式就是求解 $n+1$ 时刻变量 $\mathbf{x}^{n+1}$ 的非线性方程组 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, 而 (52)~(56) 式, 则给出预处理器 $\mathbf{P}$ 的表达式和求解 (即计算 $\mathbf{P}^{-1}$) 的方案。事实上, $\mathbf{P}$ 的求解过程与半隐式模式 (52)~(56) 式的求解过程是类似的; 应用 JFNK 求解过程, 可以看成是实现不同层次, 即不同简化模式之间的联系和过渡。因此, JFNK (以及预处理器) 既是求解方法, 同时又形成一组基于同一结构 (configuration), 便于相比较的模式系列。

6 计算结果

这里引用国内外用 JFNK 方法全隐式求解非线性方程的一些计算结果, 佐证 JFNK 方法的可行性及效率。

6.1 非线性全隐式和半隐式格式的比较

文献[3]用非线性全隐式和半隐式求解带有科里奥利项的浅水波方程, 并分析了非线性全隐式和半隐式的差别, 发现后者人为引入了误差项。图 1 表示在网格上的等高线, 实线是全隐式方法, 虚线是半隐式方法, 点线是全隐式方法加上半隐式方法引入的误差项。这里可看到非线性全隐式和线性半隐式的显著差别。假若没有空间离散化误差, 则点线

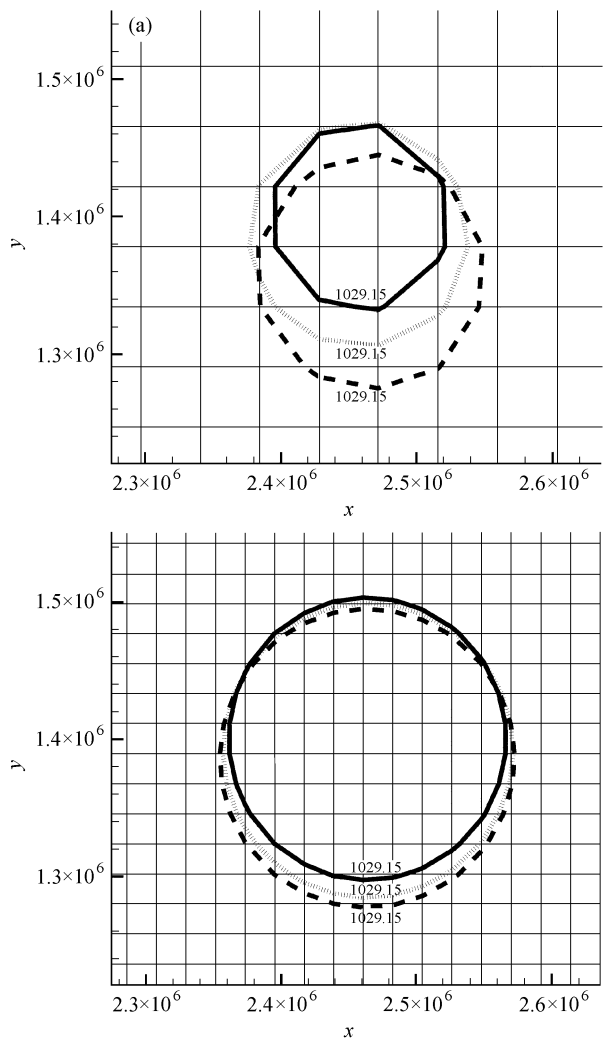


图 1 非线性全隐式和半隐式的差别 (引自文献[3]): (a) 64×64 格点; (b) 128×128 格点

Fig. 1 Difference between the implicit method and the semi-implicit method (from reference [3]): (a) 64×64 grid points; (b) 128×128 grid points

应与虚线重合。如此非线性全隐式和半隐式的差别在于时间离散化引起。因此, 这表明全隐式与半隐式的差别, 随着模式分解的提高将会逐渐由空间差别为主转为时间离散化差别为主, 这就是为什么高分解模式必须考虑使用全隐式时间差分格式的理由。

6.2 非线性全隐式和半隐式精确度的比较

用非线性全隐式和半隐式时间差分格式, 分别对格点为 128×128 的海洋 (图 2a) 和大气 (图 2b) 问题求解带有科里奥利项的浅水波方程, 初值给定一个涡旋由西向东运动, 共积分了约 2222 小时。以显式格式的解为“精确”解, 分别与非线性全隐

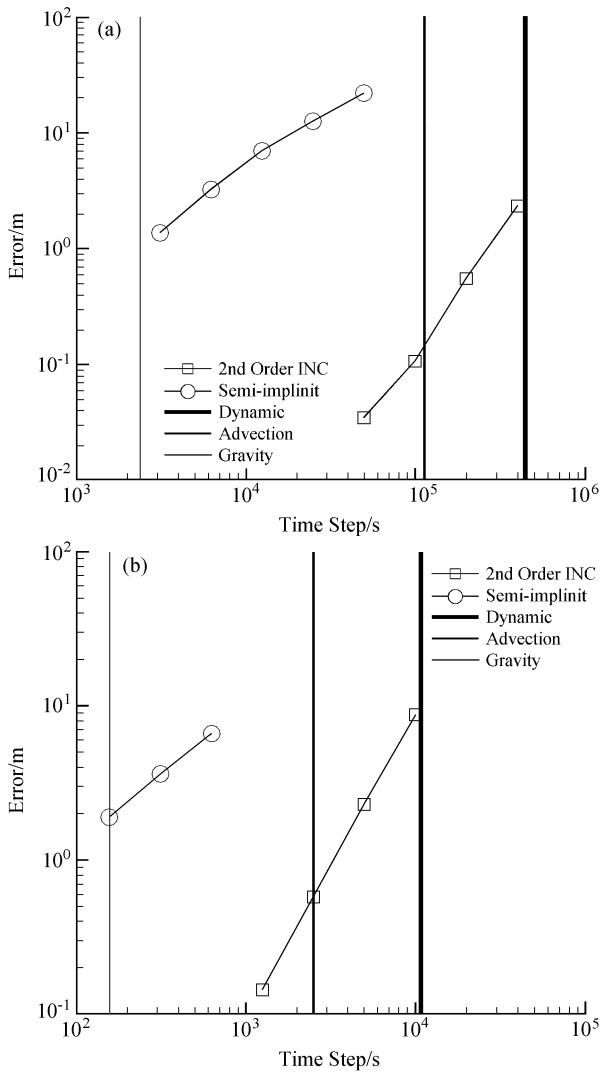


图 2 非线性全隐式和半隐式的精确度的比较 (引自文献[3]): (a) 海洋; (b) 大气。圆圈表示半隐式, 正方形为全隐式

Fig. 2 The accuracy for the implicit method (squares) and the semi-implicit method (circles) (from reference [3]): (a) Oceanic; (b) atmospheric

式和半隐式时间差分解的均方根误差来度量其精确度。图 2 给出了时间步长 (横坐标) 和均方根误差 (纵坐标) 的关系, 由图可看出, 均方根误差为 1.0 情况下全隐式格式的时间步长为半隐式格式的 200 倍 (对海洋, 图 2a); 均方根误差为 2.0 情况下全隐式格式的时间步长为半隐式格式的 30 倍 (对大气, 图 2b)。或者说, 对同一时间步长全隐式格式误差明显要小。

6.3 非线性全隐式和半隐式有效性的比较

图 3 给出了不同的时间步长 (图中数字表示时

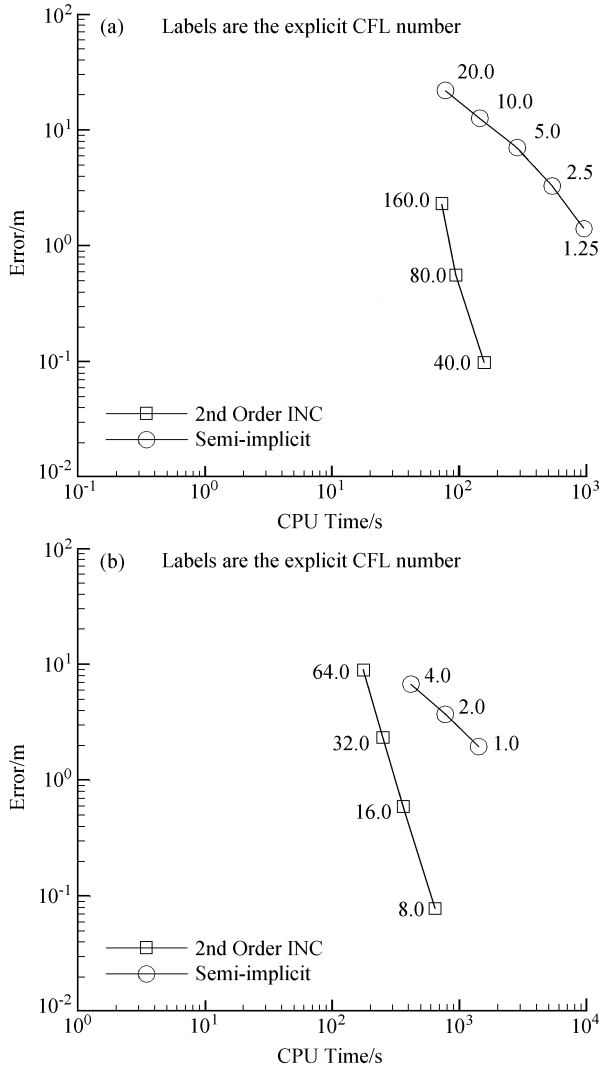


图3 在128×128格点上非线性全隐式和半隐式有效性的比较(引自文献[3]):(a)海洋;(b)大气。圆圈表示半隐式,正方形为全隐式;图中的数字表示时间步长与空间步长之比
Fig. 3 Efficacy study for the implicit method (squares) and the semi-implicit method (circles) on 128×128 grid points (from reference [3]): (a) Oceanic; (b) atmospheric. The numbers in the figures denote the ratios of time step to space step

间步长与空间步长之比)完成2222小时积分后的CPU时间和均方根误差的关系,由图可看到,给定一个均方根误差,非线性全隐式格式所用的CPU时间远小于半隐式的CPU时间;当时间步长增加一倍时所用的CPU时间,非线性全隐式格式的低

于半隐式的CPU时间。

6.4 湿汽泡的模拟

文献[10]模拟了二维沉降湿气泡的上升过程。在2560 m×5120 m范围内取128×256个格点、时间步长为 $\Delta t=0.0125$ s,并采用全隐式格式积分了600 s,最后得到的位温分布场作为基本场。在这个基本场上可发现由于潜热释放形成一个暖区,和由于雨水沉降通过未饱和大气蒸发形成一个冷区。图4分别给出了积分600 s,得到的半隐式计算结果位温场(时间步长 Δt 分别为0.0625 s、0.125 s、0.25 s)和全隐式计算结果位温场(时间步长 Δt 为2.0 s)分别与位温基本场之偏差在暖区部分的分布。由图4可看出半隐式格式计算精度似乎远比全隐式格式低;而全隐式格式的时间步长远比半隐式的长,是声波柯朗条件CFL允许的时间步长的32倍。

6.5 台风模拟

文献[10]用高度 z 坐标、包括简单物理过程、无地形的三维非静力模式,计算范围为1500 km×1500 km×15 km,且以150×150×50网格剖分,模拟了台风四天发展过程。图5a表示模拟台风的均方根误差与时间步长的关系,可看到全隐式格式使用最大时间步长(60 s)产生的均方根误差远小于半隐式格式用最小时间步长(1 s)产生的误差。图5b表示模拟台风的均方根误差与CPU时间的关系,可看到耗费相同CPU时间情况下,全隐式产生的均方根误差远远小于半隐式的。图6是全隐式和半隐式格式分别取不同时间步长,模拟台风位温的均方根误差随时间发展情况,由图可知,时间步长取最长(60 s)的全隐式格式(图中用三角形表示)在台风3~4天发展过程中,均方根误差远小于半隐式格式的任何一种时间步长(图中:菱形,5.0 s;圆形,2.5 s;方形,1.0 s)产生的均方根误差。

6.6 平流方程

下面是本文作者最近做出的部分计算结果^①。应用JFNK方法求解二阶全隐式差分的平流方程,同时该方程一阶半隐式差分形式作为预条件。将其结果与二阶显式差分、二阶半隐式差分平流方程的模拟结果进行比较分析,发现隐式格式模拟效果最

① 陈长胜,纪立人,陈嘉滨,等. JFNK方法在求解全隐式无粘Burgers方程中的应用(未发表)

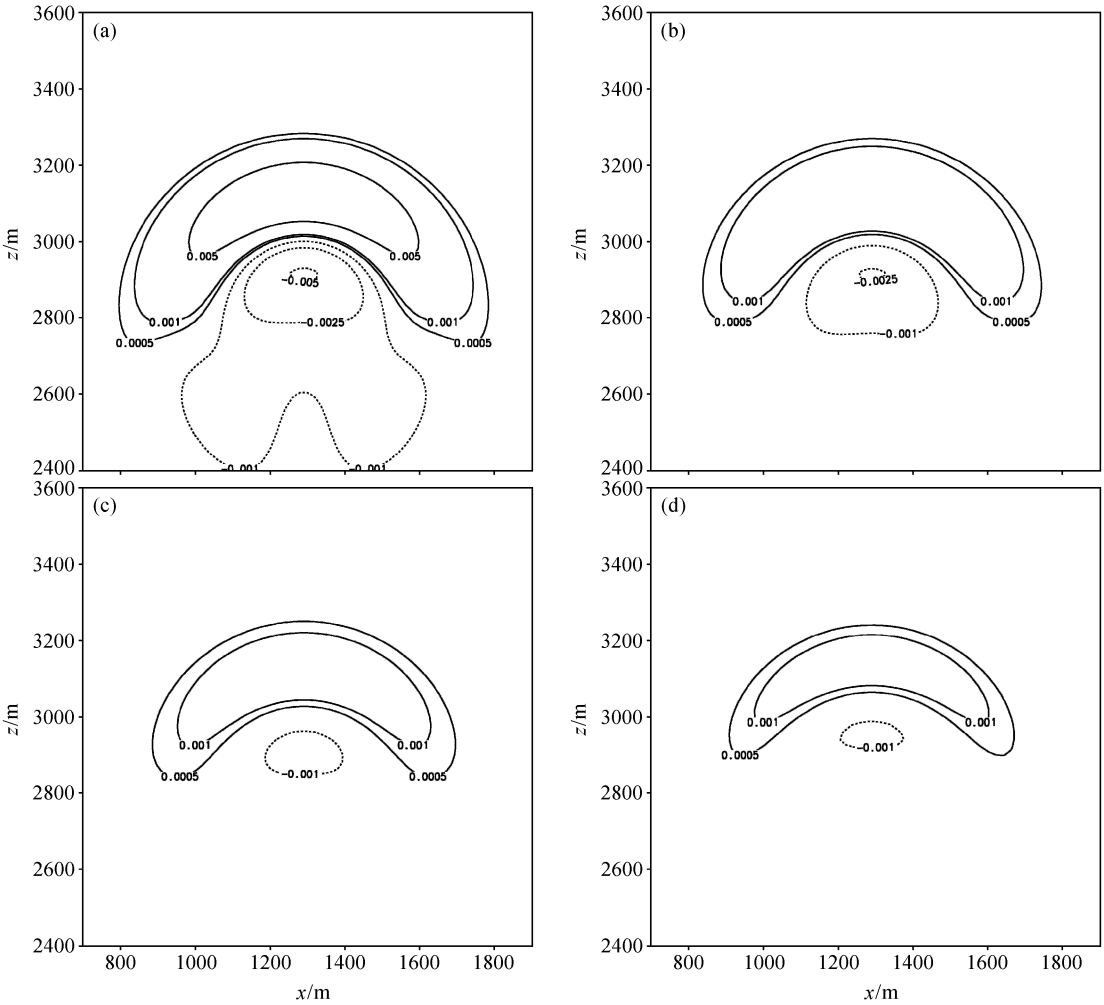


图 4 湿汽泡的模拟位温差值场 (引自文献[10]): (a) 半隐式 $\Delta t=0.25$; (b) 半隐式 $\Delta t=0.125$; (c) 半隐式 $\Delta t=0.625$; (d) 全隐式 $\Delta t=2.0$
Fig. 4 Isosurfaces of potential temperature difference fields (from reference [10]): (a) Semi-implicit method, $\Delta t=0.25$; (b) semi-implicit method, $\Delta t=0.125$; (c) semi-implicit method, $\Delta t=0.625$; (d) implicit method, $\Delta t=2.0$

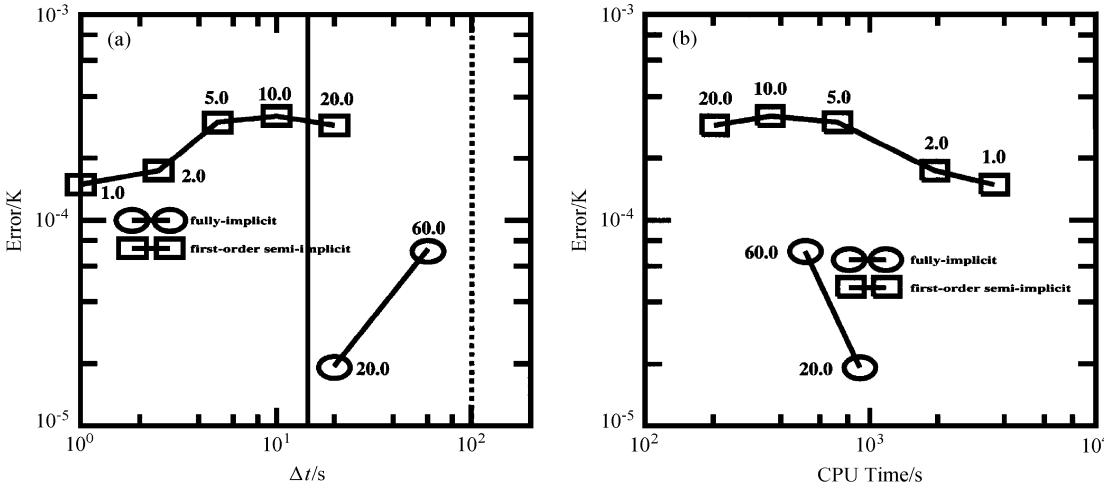


图 5 台风模拟的均方根误差分别与时间步长 (a) 和 CPU 时间 (b) 的关系图 (引自文献[10])。图中数字表示时间步长 (单位: s), 圆圈表示全隐式, 正方形为半隐式
Fig. 5 Graphs of (a) error vs. time step size and (b) error vs. CPU time from the implicit method (circles) and the semi-implicit method (squares) from hurricane simulations (from reference [10]). The numbers in the figures denote time steps

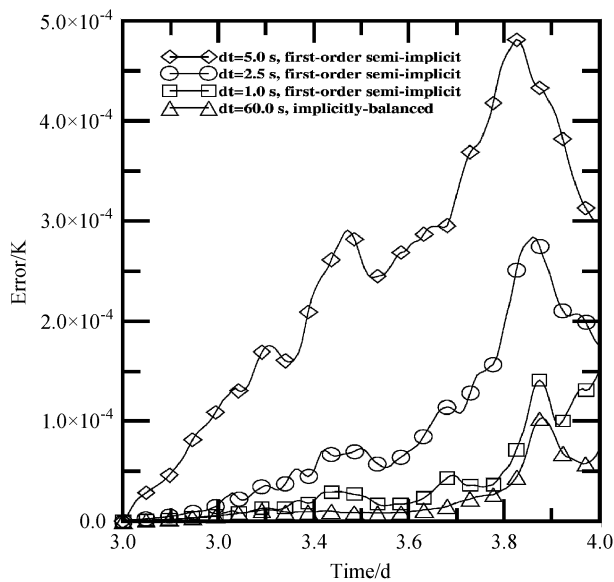


图6 模拟台风位温的均方根误差 (Error) 随时间 (单位: d) 发展情况 (引自文献 [10])

Fig. 6 Graphs of error of potential temperature (K) vs. time (d) from hurricane simulations (from reference [10])

好, 半隐式次之, 显式结果最差。表现在, 隐式格式当时间步长较大时, 仍具有稳定的解; 隐式格式的精度随时间分辨率的提高有明显提高, 而半隐式和显式的精度随时间分辨率的提高无明显变化; 最突出的是, 隐式结果很好地保持了解析解的特征; 而半隐式和显式的计算解中突变点附近出现不同程度的扰动, 并逐渐向上下游频散。图 7 给出了在 $[-1, 1]$ 区间上, 时间步长取 $\Delta t = 2^{-6}$, 基本气流取 $\bar{u} = 2.0$ 时, 在 $t = 1$ 时刻上述三种差分格式的模拟结果, 图中实线为计算解, 虚线为相应的解析解。

7 结语

在这篇文章中, 首先介绍了近年来发展的非线性方程组全隐式数值求解的 JFNK 方法原理, 及其在地球流体力学方面应用计算实例, 展示其应用潜力, 特别是在时空高分辨率计算格式中的应用潜力。我们看到, 无论在计算精度还是计算效率方面, 这种方法都远远超过常规的半隐式计算格式。在如何从问题的物理性质方面构造好预条件处理矩阵 $\mathbf{P}$, 是求解非线性全隐式方程组的核心, 这里有很多工作值得气象工作者深入研究。

据此, 本文提出了应用 JFNK 方法以地形跟随坐标作为垂直坐标的气象非静力模式方案, 并采用

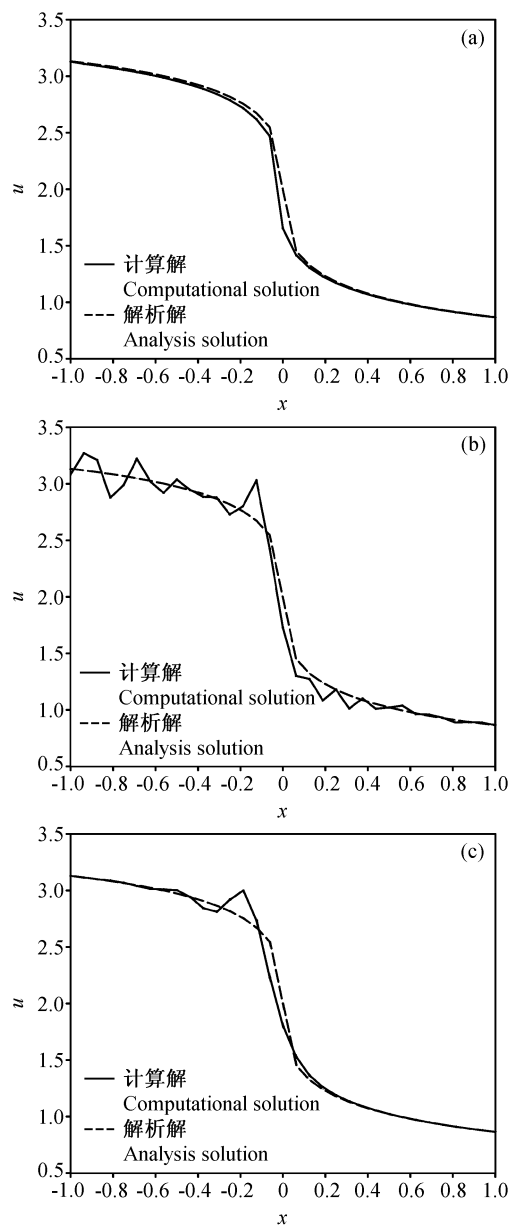


图7 $t = 1$ 时刻三种不同格式差分的模拟结果: (a) 二阶全隐式差分; (b) 二阶显式差分; (c) 二阶半隐式差分

Fig. 7 The simulation for the advection equation from three finite-difference schemes at $t = 1$: (a) Second-order implicit finite-difference scheme; (b) second-order explicit finite-difference scheme; (c) second-order semi-implicit finite-difference scheme

静力假定和半隐式差分格式来构造预条件处理器, 变三维求解为二维求解, 简化了方程组求解难度, 这不仅可用于差分模式, 也为用谱方法求解非静力模式提供可能。

参考文献 (References)

[1] Цзэн Цин-дунь (Zeng Qingcun), Применение полной системы

- уравнений термо-гидродинамики к краткосрочному прогнозу погоды в двухуровневой модели, ДАН СССР, 1961, 137, вып. 1
- [2] Robert A. A semi-lagrangian semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equation. *J. Japan Meteor. Soc.*, 1982, **60**: 319~325
- [3] Mousseau V A, Knoll D A, Reisner J M. An implicit nonlinearly consistent method for the two-dimensional shallow-water equation with Coriolis force. *Mon. Wea. Rev.*, 2002, **130**: 2611~2625
- [4] 曾庆存, 季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题. 计算数学, 1981, **1**: 79~86
Zeng Qingcun, Ji Zhongzhen. On the computational stability of evolution equation. *Chinese Computational Mathematics* (in Chinese), 1981, **1**: 79~86
- [5] Brown P, Saad Y. Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM, Sci. Stat. Comput.*, 1990, **11**: 450~481
- [6] Knoll DA, Keyes D E. Jacobin-free Newton-Krylov methods: A survey of approaches and applications. *J. Comp. Phys.*, 2004, **193**: 357~397
- [7] Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing, 1996. 447 pp
- [8] Chan T F, Jackson K R. Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1984, **5**: 533~542
- [9] Gal-Chen T, Somerville R C J. On the use of a coordinate transform for the solution of the Navier-Stokes equation. *J. Comput. Phys.*, 1975, **17**: 209~228
- [10] Reisner J M, Wyszogrodzki A A, Mousseau V A, et al. An implicitly balanced hurricane model with physics-based preconditioning. *Mon. Wea. Rev.*, 2005, **133**: 1003~1022