

大气涡旋的螺旋结构

刘式达 刘式适 梁福明 付遵涛

北京大学物理学院大气科学系, 北京 100871

摘要 利用速度场的分解, 说明大气中常见的斑图。速度场可分为变形场和旋转场。若大气动力学方程中只有气压梯度力和科里奥利力平衡, 此时速度场只有旋转场, 地面天气图上气旋反气旋斑图是闭合的。若再加上摩擦力, 则斑图为实际的气旋反气旋螺旋。对三维有水平辐散辐合的涡旋, 其斑图为三维螺旋型式, 常见是漏斗状。台风小口朝上, 龙卷风大口朝上。

关键词 大气涡旋 螺旋结构 速度场分解

文章编号 1006-9895(2006)05-0849-05

中图分类号 P425

文献标识码 A

The Spiral Structure for Atmospheric Vortex

LIU Shi-Da, LIU Shi-Kuo, LIANG Fu-Ming, and FU Zun-Tao

School of Physics, Peking University, Beijing 100871

Abstract The 3-D velocity fields of atmosphere can be decomposed into the deformation and rotation fields. The deformation field consists of the velocity divergence, it is symmetry matrix. The rotation field consists of the vorticity, it is anti-symmetry matrix. The structure of atmosphere vortex can be determined by the Jacobian matrix of the velocity field, the Jacobian matrix is the sum of the above symmetry matrix and anti-symmetry matrix. The singular point of the velocity field denotes the wind-free place. The characteristic values of the Jacobian matrix at the singular point determine the property of vortex. When the pressure gradient force is balanced with the Coriolis force in atmospheric dynamical equations, the 2-D velocity field is only the rotation field, the characteristic value is pure imaginary. The cyclone and anticyclone vortex patterns are a closed form in the surface synoptic map. When the friction is added in the above balance, the 2-D velocity fields have also the deformation field except for the rotation field, the characteristic value is a complex number. The cyclone and anticyclone vortex patterns become spiral form. The 3-D atmospheric vortex pattern is usually the spiral conic form with the deformation and rotation fields. The three characteristic values are one real and two complex. They are a funnel structure. The smaller funnel hole is up for typhoon, the larger funnel hole is up with long and thin for tornado.

Key words atmospheric vortex, spiral structure, decomposition of velocity field

1 引言

天气图上有许多涡旋, 如气旋、反气旋。它们是二维涡旋。在三维空间 (x, y, z) 中, 大气也常见台风、龙卷风等涡旋。这些涡旋的斑图

(pattern)是什么型式? 它们是如何形成的? 如何判断这些涡旋的特征? 本文将速度场分解为变形场的对称矩阵和旋转场的反对称矩阵。因此, 从矩阵的形式及它的特征值很易识别大气涡旋的斑图。

2 速度场的分布

大气速度场 $\mathbf{v}(u, v, w)$ ，一般可以写成微分方程形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = u = u(x, y, z), \\ \dot{y} = v = v(x, y, z), \\ \dot{z} = w = w(x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

通常， u, v, w 是 x, y, z 的非线性函数。符号“ $\cdot$ ”表示对时间 t 的微商。

但是，在大气涡旋中总存在无风的点 (x_0, y_0, z_0) ，如台风中心、气旋反气旋的中心等。令方程 (1) 式右端为零，

$$\begin{cases} u(x, y, z) = 0, \\ v(x, y, z) = 0, \\ w(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

便得到涡旋的速度场为零的点，称为奇点（无风的点）。由于 (1) 式右端是非线性的，因此一般奇点有多个。我们不妨设奇点的位置为 $(0, 0, 0)$ ，则 (1) 式右端可以在奇点 $(0, 0, 0)$ 作台劳展开到一阶项，得到线性常微分方程^[1]，

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_{(0,0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

矩阵 $\mathbf{J}$ 称为雅可比矩阵，它可以写成

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_3 & \frac{1}{2}\omega_2 \\ \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega_1 \\ -\frac{1}{2}\omega_2 & \frac{1}{2}\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \quad (4)$$

其中，

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

是涡度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ 的三个分量，矩阵 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{\Omega}$ 分别是对称矩阵和反对称矩阵。由 (4) 式看出，三维速度场可以分为两部分，变形部分 $\mathbf{D}$ 和旋转部分 $\mathbf{\Omega}$ ^[2]。变形部分是由速度剪切变形，包括水平辐合辐散造成的，而旋转部分是由涡度造成的。应该指出，变形矩阵 $\mathbf{D}$ 由于是对称矩阵，它可以通过相似变换为对角矩阵，其对角线矩阵之和仍与 $\mathbf{D}$ 相同，故常写成如下形式：

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \\ & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

对于不可压缩流体，矩阵 $\mathbf{D}$ 的对角线之和为零。

3 气旋、反气旋的结构

在大气运动方程中，若气压梯度力和科里奥利力平衡^[3]，

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中， f 是 Coriolis 参数。由 (6) 式可以求出二维速度场，

$$\begin{cases} u = \dot{x} = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \dot{y} = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (7)$$

其中， $\psi = p/f\rho$ 是流函数。

对于一个孤立的气旋和反气旋，垂直涡度

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi, \quad (8)$$

可以看成是常数 ζ_g ，则二维 Poisson 方程 (8) 的解为

$$\psi = \frac{\zeta_g}{4} (x^2 + y^2) = \frac{p}{f\rho}. \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (7) 式，得到

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_g \\ \zeta_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

将 (10) 式与 (3)、(4) 式对照，可以看出此时速度场的雅可比矩阵只有旋转的反对称矩阵，而没

有变形的辐合辐散部分, 令 (10) 式右端为 0, 解得速度场的奇点,

$$(x, y) = (0, 0). \quad (11)$$

方程 (10) 右端雅可比矩阵的特征值满足

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -\frac{1}{2}\zeta_g \\ \frac{1}{2}\zeta_g & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

其中,

$$\lambda = \left(\pm \frac{1}{2}\zeta_g\right)i.$$

由于 λ 是纯虚数, 因而奇点是中心点, 围绕中心点的轨道是闭合轨道。事实上, 由 (10) 式, 得

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \quad (13)$$

$$x^2 + y^2 = c. \quad (14)$$

所以无摩擦力时, 气旋、反气旋的斑图是一个圆 (见图 1)。

将方程 (10) 化成极坐标形式,

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{\zeta_g}{2}. \quad (15)$$

由于气旋

$$\zeta_g = \frac{1}{f\rho} \nabla_h p > 0,$$

因而中心低气压, $\dot{\theta} > 0$ 表示逆时针旋转; 反气旋

$$\zeta_g = \frac{1}{f\rho} \nabla_h p < 0,$$

因而中心高气压, $\dot{\theta} < 0$ 表示顺时针旋转。

实际上, 反气旋的斑图并不是圆形, 地面天气图上绘出的气旋图形是等压线, 它并不是按风的切线方向绘的。由于受摩擦力的影响, 在高压内的风向外吹, 在低压外的风向内吹。因此考虑到摩擦力后, 气压梯度力、科里奥利力和摩擦力三力平衡得到:

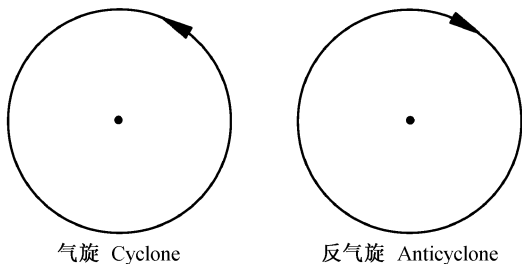


图 1 无摩擦力时的气旋、反气旋结构

Fig. 1 The structures of cyclone and anti-cyclone without friction force

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - ku + fv = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - kv - fu = 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中第二项是摩擦力, 它与速度的方向相反, k 为摩擦系数。或另述成

$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{k}{f}u + v = 0, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{k}{f}v - u = 0. \end{cases} \quad (17)$$

用

$$\psi = \frac{\zeta_g}{4}(x^2 + y^2)$$

代入 (17) 式, 并解出 u 、 v , 得到:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\frac{\zeta_g}{2} \frac{k}{f}}{1 + \left(\frac{k}{f}\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{\zeta_g}{2} \frac{k}{f}}{1 + \left(\frac{k}{f}\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\zeta_g}{1 + \left(\frac{k}{f}\right)^2} \\ \frac{\zeta_g}{1 + \left(\frac{k}{f}\right)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (18)$$

由 (18) 式看出, 有了摩擦力后, 此时速度场中除了有旋转部分 (反对称矩阵) $\mathbf{\Omega}$ 外, 还增加了变形部分 (对称矩阵) $\mathbf{D}$ 。这是由于摩擦使风向穿过等压线而形成的辐散辐合。由于地面有水平辐合辐散, 必然引起上升或下沉运动, 所以摩擦力是产生上升、下沉运动的必不可少的条件。

由 (18) 式求出水平散度,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\frac{k}{f}\zeta_g}{1 + \left(\frac{k}{f}\right)^2}. \quad (19)$$

由 (19) 式看出对气旋 $\zeta_g > 0$, $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y < 0$, 水平辐合; 对反气旋 $\zeta_g < 0$, $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y > 0$, 水平辐散。这与实际的气旋、反气旋的情况是一致的。气旋中心低压, 风朝向内吹辐合, 反气旋中心高压, 风朝向外吹^[4, 5]。

若摩擦系数 $k=0$, 则 (18) 式就化为 (10) 式。(18) 式右端为 0 得到奇点, 仍是 $(0, 0)$, 不过有了

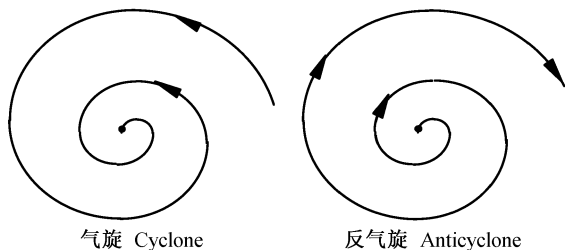


图 2 有摩擦力时气旋、反气旋结构

Fig. 2 The structures of cyclone and anti-cyclone with friction force

摩擦力以后,雅可比矩阵的特征值却由纯虚部变成了有实部和虚部的复数,

$$\lambda = -\frac{k \zeta_g}{2 \left(1 + \frac{k^2}{f^2}\right)} \pm \frac{|\zeta_g|}{2 \left(1 + \frac{k^2}{f^2}\right)} i. \quad (20)$$

对气旋 $\zeta_g > 0$, 因而 λ 的实部为负, 奇点 $(0, 0)$ 是稳定焦点。对反气旋 $\zeta_g < 0$, λ 的实部为正, 奇点 $(0, 0)$ 是不稳定焦点^[6]。围绕焦点的轨道都是螺旋(见图 2)。

4 三维的台风、龙卷风

为了讨论三维涡旋斑图, 一般可以认为风场主要在水平方向旋转, 即只有垂直方向涡度 $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 \neq 0$, 那么三维速度场的分解式(3)、(4)就成为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial u}{\partial y} & \\ & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_3 & 0 \\ \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (21)$$

(21) 式说明, 三维速度场既有旋转部分, 又有变形部分。若三维不可压

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

只要水平辐合辐散

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0,$$

那么就会有上升、下沉运动, 并且伴随着旋转。

大气中常见的台风就是地面水平辐合上升, 而雷雨云底的龙卷风就是云底辐合下沉。

我们不妨设

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2a < 0 \quad (a > 0), \quad (22)$$

因此, 为了满足三维不可压缩方程, 则必须有

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2a. \quad (23)$$

因此, (21) 式变成

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & & \\ & -a & \\ & & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_3 & 0 \\ \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (24)$$

(24) 式也可表示成

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -\frac{1}{2}\omega_3 & 0 \\ \frac{1}{2}\omega_3 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (25)$$

令 (25) 式右端为零, 得到奇点是

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), \quad (26)$$

且雅可比矩阵的特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2a > 0, \\ \lambda_{2,3} = -a \pm \frac{\omega_3}{2} i. \end{cases} \quad (27)$$

由 (27) 式看出, $\lambda_{2,3}$ 是共轭复根, 实部为负, 说明是辐合。而 $\lambda_1 > 0$ 表示辐合进来以后上升(台风)或由雷暴云底下沉(龙卷风)。

此时奇点 $(0, 0, 0)$ 是一个鞍——焦点^[7, 8]。围绕奇点的轨道是螺旋锥。

为此, 我们将 (25) 式化为柱坐标 (r, θ, z) 形式,

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = -ar, \\ v_\theta = r\dot{\theta} = r \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} = \left(\frac{1}{2}\omega_3\right)r, \\ w = \dot{z} = 2az. \end{cases} \quad (28)$$

(28) 的第二式说明, 旋转角速度 $\dot{\theta}$ 是垂直涡度 ω_3 的一半。北半球台风或龙卷风 $\omega_3 > 0$ 是逆时针旋转。

若考虑轴对称, 那么柱坐标系得连续方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (29)$$

气旋、反气旋的斑图是螺旋。大气的三维涡旋一定要考虑水平辐合辐散，即存在变形场，若再加上有涡度引起的旋转场，台风和龙卷风形成螺旋锥斑图，它们的外形是漏斗状，台风小口朝上，龙卷风大口朝上。

参考文献 (References)

- [1] Majda A J, Bertozzi A L. *Vorticity and Incompressible Flow*. New York: Cambridge University Press, 2002. 545pp
- [2] Bluestein H B. *Synoptic Dynamic Meteorology in Midlatitudes, Volume I. Principles of Kinematics and Dynamics*. New York: Oxford University Press, 1992. 431pp
- [3] Holten J R. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. San Diego: Academic Press, 1992. 511pp
- [4] Jackson E A. *Perspective of Nonlinear Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 349~633
- [5] Dusan D. *Weather Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1994. 304pp
- [6] Bluestein H B. *Synoptic-Dynamic Meteorology in Midlatitudes. Volume II, Observations and Theory of Weather Systems*. New York: Oxford University Press, 1993. 594pp
- [7] Liu S D, Xin G J, Liu S K, et al. The 3D spiral structure pattern in the atmosphere. *Advances in Atmospheric Sciences*, 2000, **17** (4): 519~524
- [8] Bakker P G. *Bifurcations in Flow Patterns; Some Applications of the Qualitative Theory of Differential Equations in Fluid Dynamics*. Dordrecht /Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991. 209pp
- [9] Lemon L R, Doswell C A III. Severe thunderstorm evolution and mesocyclone structure as related to tornadogenesis. *Mon. Wea. Rev.*, 1979, **107** (9): 1184~1197
- [10] Businger S, Reed R J. Cyclogenesis in cold air masses. *Weather and Forecasting*, 1989, **4**: 133~156

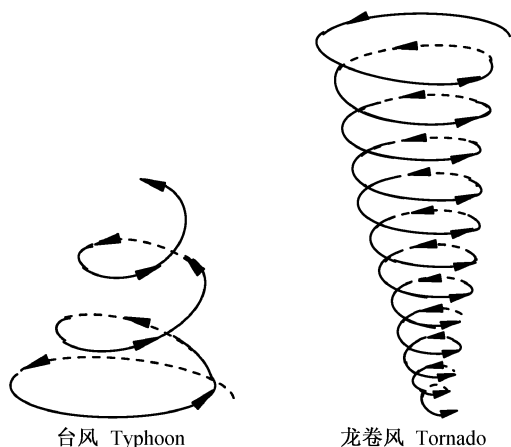


图 3 台风、龙卷风的结构
Fig. 3 The structures of typhoon and tronado

引入流函数 ψ

$$\begin{cases} rv_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ rv_w = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{cases} \quad (30)$$

由 (30) 式解得流函数为

$$\psi = ar^2z, \quad (31)$$

ψ 等值线是一个漏斗状。台风小口朝上，龙卷风大口朝上 (见图 3) [9, 10]。

5 结论

大气涡旋是非常普遍的。将速度场分解为对称的变形部分和反对称的旋转部分，就可以识别大气涡旋的斑图型式。地面天气图上的闭合流场是由无摩擦力的气压梯度力和科里奥利力相平衡的动力学斑图，它仅有旋转场。若加进了地面摩擦力以后，