

大气波动的波谱和谱函数——垂直切变基流中的波谱分析

张铭¹ 安洁^{1,2}

1 解放军理工大学气象学院大气环流与短期气候预测实验室, 南京 211101

2 空军装备研究院航空气象防化研究所, 北京 100085

摘要 作者研究了具有垂直切变基流时大气波动连续谱的重叠问题和临界层出现的情况。发现随着基流切变的增大和扰动波长的减小, 一支涡旋波和两支重力惯性内波的连续谱区会互相靠拢, 最后发生重叠, 这时已不能区分为快波、慢波, 而能否重叠的关键在于临界波长与扰动波长的相对大小, 基流切变越大, 扰动波长越短, 重叠现象就越严重。这可用作划分运动尺度的客观标准。当运动尺度大于临界波长时, 是大尺度的, 这时三支波动连续谱区互不重叠, 涡旋波是准地转的; 当运动尺度小于临界波长时, 可认为是中尺度的, 此时出现连续谱重叠现象。采用该方法划分的尺度标准与通常的标准在量级上则相一致。

关键词 大气波动 基流 连续谱 临界层

文章编号 1006-9895(2007)05-0919-07

中图分类号 P433

文献标识码 A

Spectrum and Spectral Function of Wave in Atmosphere——Wave Spectrum Analysis with Vertical Shear of Basic Flow

ZHANG Ming¹ and AN Jie^{1,2}

1 *Laboratory of Atmospheric Circulation and Short-Range Climate Forecast, Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101*

2 *Institute of Aeronautical Meteorology, Air Force Academy of Equipment, Beijing 100085*

Abstract As one of basic researches in the mesoscale system, it is necessary to make clear the waves and their characteristics in the mesoscale system. But, what are characteristics of the vortex wave and the inertia-gravitational wave? Do they have separability? All these are the new problems which need to be solved urgently. So in this paper the authors try to answer the questions. The spectrum and spectral function of the mesoscale wave are studied by using non-geostatic quasi-two-dimensional Boussinesq equations. It is supposed that basic flow is only the function of z . The equations are linearized under definite conditions, and then initial-boundary value problem is changed into eigenvalue problem of generalized matrix after assuming normal mode solution. The characteristics of spectrum and spectral function can be realized. In this paper, the problem on overlapping of the continuous wave spectrums and the instance on appearance of the critical layer are studied in atmosphere with the shear of basic flow. The results can be concluded as follows. There are three waves in the equations: a couple of internal inertial-gravitational wave and a vortex wave. These three waves all have continuous spectrum and critical layers. When the shear increases and the wavelength decreases, it is found that the continuous spectrum region of a branch of vortex wave is close to the region of a couple of internal inertial-gravitational wave, they shall overlap each other finally. Here fast wave

cannot be distinguished from slow wave. The overlapping condition is determined by the scales of critical wavelength and perturbation wavelength. When the disturbance wavelength is less than the critical wavelength and greater than half of that, there exists the overlapping section of an internal inertial-gravitational wave and a vortex wave. And when the disturbance wavelength is less than the half of critical wavelength, there exists the overlapping section of three waves. Here, there is not pure continuous spectrum section of the vortex wave. The critical wavelength can be considered as the criterion of dividing scale of atmosphere motion. When the scale of motion is greater than the critical wavelength, it is large scale. Here the continuous spectrum regions of the vortex wave and the internal inertial-gravitational wave do not overlap, and the vortex wave is quasi-geostrophic. When the scale of motion is less than the critical wavelength, it is mesoscale. Here the overlapping of the continuous spectrum regions occurs. The standard is identical with accustomed standard in magnitude.

Key words wave in atmosphere, basic flow, continuous spectrum, critical layer

1 引言

文献[1]中已给出了研究大气波动波谱和谱函数的 Boussinesq 方程组及相应的边界条件。对方程组线性化并取标准模后,可将其初边值问题转化为一个常微分方程组的特征值问题,该问题离散化后则可转化为矩阵的广义特征值问题,从而能进行数值求解。在那里讨论了无基流且取地转参数、层结参数为常数时大气波动的情况,此时可求得其波谱和谱函数的解析解。在此情况下,该模式中仅包含有一对重力惯性内波,且各模态均是简谐波;模态越高,垂直波数越大则波动传播得越慢,所有的特征波动均为离散谱,并有聚点存在。

当存在垂直切变基流后,就存在环境涡度场的变化,这样即使地转参数为常数,该方程组中也包含有涡旋波,此时该方程组中存在三支波动:一对重力惯性内波和一支涡旋波。在大尺度,在正压大气中,重力惯性波的频率(指绝对值,下同)明显大于涡旋波,故前者称之为快波,而后者则称之为慢波,两者按频率就能明显区分^[2]。在斜压大气中,两者的频率虽较接近,但前者的频率仍大于后者的频率;在考虑到前者是非地转、后者是准地转的特点后,两者仍易被区分。而在中尺度系统中,当基流存在垂直切变时,这两类波动的频率范围可发生重叠^[3]。沈新勇等^[4, 5]使用纬向基流下横波型扰动的 Boussinesq 近似方程组,分析了沿着基本气流方向传播的中尺度扰动不稳定的情况,认为只有当基本流场的风速存在二次切变时,横波型不稳定才可能是混合的涡旋 Rossby 重力波的不稳定,而在基本流场的风速仅仅存在线性切变时,横波型扰动的不稳定则是重力惯性波的不稳定。但他的前提

假设是风切变为小量。在实际大气中,特别是飑线、暴雨等中尺度天气系统,风切变通常并不为小量,那么此时波动的性质又将如何?涡旋波和重力惯性波是否具有可分性?

曾庆存和任舒展^[6]、任舒展和曾庆存^[7]以及 Zhang 和 Zeng^[8]从数学上严格地指出了支配方程中存在连续谱和离散谱两类不同性质的解,并讨论了连续谱在大气环流中的作用。由文献[1]可知,基流的垂直切变会导致该方程组出现奇性,此时有广义解存在,并有连续谱出现。基流的垂直切变还会使扰动发生不稳定,而不稳定谱点则是离散谱。本文作为文献[1]的继续,我们将对垂直切变基流中大气波动的波谱作研究,主要是对方程的奇异性进行分析^[9],并给出了更详尽深入的讨论。

2 波谱分析

由文献[1]可知,在微扰情形下,若大气内部的波动沿 x 方向传播而基流与该方向有一常值夹角 δ ,且扰动在 y 方向是均匀的,则可有以下关于流函数 Ψ 的二阶常微分方程^[1]:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{u}k - \sigma)[(\bar{u}k - \sigma)^2 - f^2] \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + 2kf \cdot \\
 & [f\bar{u}_z + i(\bar{u}k - \sigma)\bar{v}_z] \frac{d\Psi}{dz} - k\{(\bar{u}k - \sigma) \cdot \\
 & [(\bar{u}k - \sigma)^2 k + (\bar{u}k - \sigma)\bar{u}_{zz} - kN_0^2] + \\
 & if[2k\bar{u}_z\bar{v}_z - (\bar{u}k - \sigma)\bar{v}_{zz}]\} \Psi - \\
 & k(\bar{u}k - \sigma)\eta N_0^2 G(z)\Psi(z_0) = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

这里, σ 是扰动频率; \bar{u} 、 \bar{v} 是基流在 x 、 y 方向的分量,设其为连续、可微函数, \bar{u}_z 、 \bar{v}_z 、 \bar{u}_{zz} 、 \bar{v}_{zz} 则分别是其对 z 的一阶和二阶微商; f 为地转参数,设为常数; N_0^2 为层结参数,设其仅为 z 的函数; z_0 则为

边界层顶高度。该方程边界条件为

$$\Psi|_{z=0} = \Psi|_{y=H} = 0, \quad (2)$$

这里设 $z=0$ 处为地面, $z=H$ 处为对流层顶。方程 (1) 和边界条件 (2) 构成了二阶复常微分方程的非经典特征值问题, 之所以称为非经典, 一是因在该方程中特征值 σ 呈非线性出现 (按经典说法, 离散谱点才可称为特征值, 这里为方便, 与文献[10]相同, 将连续谱也包括进去), 二是非绝热项的出现使得特征值 σ 还与 $\Psi(z_0)$ 项有关。

方程 (1) 的奇性与其最高微商项的系数有关, 下面对该系数进行分析^[9]。设 \bar{u} 在区间 $[0, H]$ 上不为常数, 其最大值为 \bar{u}_{\max} 、最小值为 \bar{u}_{\min} , 因 \bar{u}_{\min} 、 \bar{u}_{\max} 、 k 和 f 均为实数, 若波谱 (特征值) 的集合 σ 满足下列不等式之一:

$$\bar{u}_{\min}k < \sigma < \bar{u}_{\max}k, \quad (3)$$

$$\bar{u}_{\min}k - f < \sigma < \bar{u}_{\max}k - f, \quad (4)$$

$$\bar{u}_{\min}k + f < \sigma < \bar{u}_{\max}k + f, \quad (5)$$

则对该 σ 的三个子集, 依其所满足的不等式 (3)~(5) 可分别命名为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , 其必然满足以下等式:

$$\sigma_1 = \bar{u}(z_1)k, \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \bar{u}(z_2)k - f, \quad (7)$$

$$\sigma_3 = \bar{u}(z_3)k + f. \quad (8)$$

这是因基流分量 $\bar{u}(z)$ 是 z 的连续可微函数的缘故。在 z_1 、 z_2 、 z_3 为三个相应于 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的集合, 若其要有物理意义, 则须满足 $z_1, z_2, z_3 \in [0, H]$ 。以下为方便, 本文对集合和集合元素不加区别。若方程 (1) 的最高阶微商项的系数为 0, 则其可出现奇性且谱函数可出现间断 (广义解), 出现奇性时集合 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 为连续谱, 而相应谱函数的间断处则为临界层, 集合 z_1 、 z_2 、 z_3 即为相应临界层的位置^[11~13]。若波谱 σ 为实数且其同时不满足不等式 (3)~(5) 时, 则方程 (1) 最高阶微商项的系数不为 0, 其为离散谱; 若波谱 σ 为复数, 则显然方程 (1) 最高阶微商项的系数也不为 0, 为离散谱^[13]。在以上特征值问题中, 连续谱和离散谱都有可能存在。以下分三种情况对连续谱区的分布进行讨论。

(1) 三支波动连续谱区完全不相重叠的情况。取 $f > 0$, 因恒有 $\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} > 0$, 故必存在临界波数 $k_0 = f/(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})$, 而当扰动波数 $k < k_0$ 时, 则有以下不等式成立

$$\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} < f/k. \quad (9)$$

由此, 有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \bar{u}_{\max}k - f < \bar{u}_{\min}k < \bar{u}_{\max}k < \\ \bar{u}_{\min}k + f < \bar{u}_{\max}k + f. \end{aligned} \quad (10)$$

注意到集合 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 满足不等式 (3)~(5), 这样当 $k < k_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \sigma_2 < \bar{u}_{\max}k - f < \bar{u}_{\min}k < \sigma_1 < \\ \bar{u}_{\max}k < \bar{u}_{\min}k + f < \sigma_3 < \bar{u}_{\max}k + f. \end{aligned} \quad (11)$$

由上式可见, 当 $k < k_0$ 时, 不等式 (11) 成立, 三支波动的连续谱区相互不重叠, 即恒有

$$\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3. \quad (12)$$

以下对这三支连续谱的波动性质进行讨论。为此先考察基流 \bar{u} 为常数, $\bar{v}=0$ 的情况, 此时易求得三支波动的解析解^[1]。

$$\sigma_1 = \bar{u}k, \quad (13)$$

$$\sigma_{2,3} = \bar{u}k \mp \sqrt{\frac{f^2 \left(\frac{\pi m}{H}\right)^2 + k^2 N^2}{\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2 + k^2}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

这里, $k=2\pi/L$ 为水平波数, L 为波长, m 为垂直波数, H 为逆温层高度 (或对流层厚度)。从该频散关系可见, 此时该方程包含有两支重力惯性内波, 它们分别相对基流作逆向和顺向传播, 圆频率分别为 σ_2 和 σ_3 且均为离散谱点; 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 则有极限 $\sigma_{\mp\infty} = \bar{u}k \mp f$, 这表明它们的离散谱点有聚点 $\bar{u}k \mp f$; 此外还有一个相对于基流静止的地转平衡基本态, 其圆频率为 σ_1 。

当基流存在切变时, 我们注意到, 若令 $\bar{u}_{\min} \rightarrow \bar{u}_{\max} \rightarrow \bar{u} = \text{const}$, 同时 $m \rightarrow \infty$, 则由 (13)、(14) 式可知, 此时有 $\sigma_1 \rightarrow \bar{u}k$ 、 $\sigma_{2,3} \rightarrow \bar{u}k \mp f$, 也即该极限情形为 (6)~(8) 式。由此可知, 相应于集合 $\sigma_{2,3}$ 的分别是逆、顺基流传播的重力惯性内波的连续谱; 而这时因基流存在切变, 则原有的地转平衡基本态现已转变成涡旋波, 故相应于集合 σ_1 的是涡旋波的连续谱^[7]。

因连续谱谱函数上有间断, 故有物理意义的是连续谱谱函数对 σ 的积分, 此即为波包。这里相应于连续谱 σ_1 的谱函数积分是涡旋波波包, 而相应于 σ_2 、 σ_3 的则分别是逆、顺传的重力惯性内波波包。此时, 涡旋波包和逆、顺传重力惯性内波的波包因其相应的 σ 满足 (12) 式, 故它们在传播频率上是明显可区分的, 即有 $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ 和 $|\sigma_1| < |\sigma_3|$, 这样涡旋波可称之为慢波, 重力惯性内波则可称之为快波^[7]。

(2) 两支波动连续谱区重叠的情况。若扰动波长的尺度继续减小 (k 增大), 致使 $k > k_0$, 则不等式 $\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} > f/k$ 成立, 此时有

$$\bar{u}_{\min}k < \bar{u}_{\max}k - f. \quad (15)$$

若这时还有 $k < 2k_0$, 则对于这样的 k 有

$$\bar{u}_{\max}k - f < \bar{u}_{\min}k + f. \quad (16)$$

这样, 当 $k_0 < k < 2k_0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \bar{u}_{\min}k < \bar{u}_{\max}k - f < \bar{u}_{\min}k + f < \\ \bar{u}_{\max}k < \bar{u}_{\max}k + f. \end{aligned} \quad (17)$$

注意到此时波谱 σ 仍满足不等式 (3)~(5), 故有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \sigma_2 \setminus \sigma_1 < \bar{u}_{\min}k < \sigma_1 \cap \sigma_2 < \bar{u}_{\max} \cdot \\ k - f < \sigma_1 \setminus \sigma_2 \setminus \sigma_3 < \bar{u}_{\min}k + f < \sigma_1 \cap \\ \sigma_3 < \bar{u}_{\max}k < \sigma_3 \setminus \sigma_1 < \bar{u}_{\max}k + f, \end{aligned} \quad (18)$$

这里, $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ 是指 σ_2 和 σ_1 的差集, $\sigma_3 \setminus \sigma_1$ 是指 σ_3 和 σ_1 的差集, $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \setminus \sigma_3$ 是指 σ_1 和 σ_2, σ_3 的差集 (对于差集的数学定义为: 若 A 和 B 都是集, 那么所有属于 A 但不属于 B 的元素的全体是一个集, 称为 A 和 B 的差集, 记为 $A \setminus B$)。 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \notin \emptyset$, $\sigma_1 \cap \sigma_3 \notin \emptyset$ 。由 (11) 式可知, 此时扰动波谱已不能再分为不相重叠的 3 段, 而要分成以下的 5 段: ① 纯逆传重力惯性内波的连续谱区; ② 逆传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱的重叠区; ③ 纯涡旋波的连续谱区; ④ 顺传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱的重叠区; ⑤ 纯顺传重力惯性内波的连续谱区。相应于以上 5 段, 其波谱集合则分别为 $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ 、 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 、 $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \setminus \sigma_3$ 、 $\sigma_1 \cap \sigma_3$ 和 $\sigma_3 \setminus \sigma_1$ 。由此可见, 这时仍存在单纯的涡旋波和重力惯性内波的连续谱区。

(3) 三支波动连续谱区重叠的情况。当水平尺度进一步减小, 以致有 $k > 2k_0$, 则此时有

$$\bar{u}_{\max}k - f > \bar{u}_{\min}k + f, \quad (19)$$

故存在

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \bar{u}_{\min}k < \bar{u}_{\min}k + f < \bar{u}_{\max}k - f < \\ \bar{u}_{\max}k < \bar{u}_{\max}k + f. \end{aligned} \quad (20)$$

同理, 可知有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k - f < \sigma_2 \setminus \sigma_1 < \bar{u}_{\min}k < \sigma_1 \setminus \sigma_3 < \bar{u}_{\min}k + f < \\ \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 < \bar{u}_{\max}k - f < \sigma_1 \setminus \sigma_2 < \\ \bar{u}_{\max}k < \sigma_3 \setminus \sigma_1 < \bar{u}_{\max}k + f, \end{aligned} \quad (21)$$

这里有 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 \notin \emptyset$, 且 $\sigma_1 \setminus \sigma_3 \subseteq \sigma_2$, $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \subseteq \sigma_3$ 。由 (21) 式知, 此时扰动波谱可分为以下 5 段: ① 纯逆传重力惯性内波的连续谱区; ② 逆传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱的重叠区; ③ 逆传重力惯性内波连续谱、涡旋波连续谱和顺传重力惯

性内波连续谱的三波重叠区; ④ 顺传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱的重叠区; ⑤ 纯顺传重力惯性内波的连续谱区。相应于以上 5 段, 其波谱集合则分别为 $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ 、 $\sigma_1 \setminus \sigma_3 \subseteq \sigma_2$ 、 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$ 、 $\sigma_1 \setminus \sigma_2 \subseteq \sigma_3$ 和 $\sigma_3 \setminus \sigma_1$ 。(21) 式表明此时不但涡旋波的连续谱区与重力惯性内波的连续谱区发生了重叠, 而且二支重力惯性内波的连续谱区也发生了重叠, 出现了三支波动连续谱区发生重叠的情况, 在该情况下不存在单纯涡旋波的连续谱区。

总之, 当基流有垂直切变时, 随着切变的增大和扰动波长的减小, 三支波动的连续谱区互相靠拢, 最后发生重叠。这时仅从波谱上三支波动已不能区分, 且不能用其相速度来区分为快波、慢波。连续谱区能否重叠的关键在于临界波数 k_0 与扰动波数 k 的相对大小, 其决定于地转参数、基流的垂

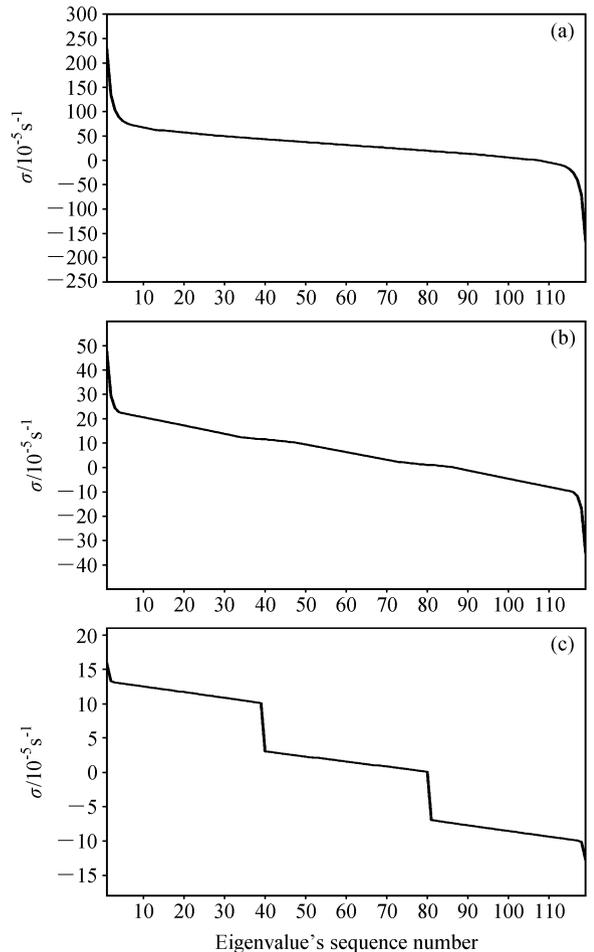


图 1 三种情况的波谱分布图: (a) $L = 100$ km; (b) $L = 500$ km; (c) $L = 2000$ km
Fig. 1 Spectrum distributions for three kinds of wavelength: (a) 100 km; (b) 500 km; (c) 2000 km

直切变和特征波动的水平尺度。切变越大 (\bar{u}_{\max} , \bar{u}_{\min} 相差越大), 扰动波长越短 (波数越大), 则这种混合现象就越严重。图 1 给出了当取线性切变基流时, 采用文献[1]中数值计算方法得出的以上三种情况的波谱分布图, 在此取环境参数为 $H=10000$ m, $f=1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\bar{u}_{\min}=0$, $\bar{u}_{\max}=10$ m/s, 夹角 $\delta=0$ 。图 1a 为三波不可分时的波谱分布图, 此时相应的水平波长 L 为 100 km, 图 1b 为两波不可分时的谱点分布图, 其相应的水平波长 L 为 500 km, 图 1c 为三波可分时的谱点分布图, 其相应的水平波长 L 为 2000 km。

3 临界层的分布

由于该问题的复杂性, 这里只讨论基流呈垂直线性分布的情况, 即以下设 $\bar{u}(z)=\bar{u}_0+\bar{u}_z z$, 这里 \bar{u}_0 、 \bar{u}_z 为常数且设 $\bar{u}_z>0$, 这样有 $\bar{u}_{\min}=\bar{u}_0$, $\bar{u}_{\max}=\bar{u}_0+\bar{u}_z H$ 。当集合 σ_1 , σ_2 , σ_3 给定后, 则可由方程 (6)~(8) 唯一解出集合 z_1 、 z_2 、 z_3 。以下仍分三种情况进行讨论。

(1) 三支波动连续谱区完全不相重叠的情况。此时由 (3)~(8) 式知三支波动均有临界层存在, 且随着频率的增加, 各波动临界层的高度均越来越高, 对每支波动, 仅有一个临界层出现。

(2) 两支波动连续谱区重叠的情况。在这种情况下应分 5 段波谱分别讨论, 注意此时有 $k_0<k<2k_0$ 。①纯逆传重力惯性内波连续谱的临界层: 此时由 (3)~(8) 式和 (18) 式知, 该段谱区仅有一个临界层出现, 其出现在大气下层。②逆传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱重叠区的临界层: 这时有两个临界层出现, 且这两个临界层不相重叠, 出现在大气上层的是重力惯性内波的临界层, 而在大气下层的则是涡旋波的临界层。③纯涡旋波连续谱的临界层: 这时仅有一个涡旋波的临界层出现, 出现在大气中层。④顺传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱的临界层: 这时也有两个临界层出现, 且其不相重叠, 出现在大气上层的是涡旋波的临界层, 而在大气下层的则是重力惯性内波的临界层。⑤纯顺传重力惯性内波连续谱区的临界层: 此时也只有一个临界层出现, 其出现在大气上层。

(3) 三支波动连续谱区重叠的情况。在这种情况下也应分 5 段波谱分别讨论, 注意到此时有 $k>2k_0$ 。①纯逆传重力惯性内波的连续谱区的临界层:

由 (3)~(8) 式和 (21) 式知, 此时仅有一个临界层, 其出现于大气下层。②逆传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱重叠区的临界层: 这时有两个临界层出现, 且这两个临界层不相重叠, 出现于大气中层的是重力惯性内波的临界层, 出现于大气下层的则是涡旋波的临界层。③三波连续谱重叠区的临界层: 这时有三个临界层出现, 两个重力惯性内波的临界层不相重叠, 当 $1/3<k_0/k<1/2$ 时这三个临界层相互不重叠; 出现于大气中层的是涡旋波的临界层, 在大气上层的是逆传重力惯性内波的临界层, 在大气下层的是顺传重力惯性内波的临界层; 但当 k 大到使 $k_0/k<1/3$ 时, 也即扰动波长很短时, 则涡旋波的临界层范围与重力惯性内波的临界层范围会发生重叠, 此时情况很复杂。④顺传重力惯性内波连续谱与涡旋波连续谱重叠区的临界层: 这时也有两个临界层出现, 且其不相重叠, 出现在大气上层的是涡旋波的临界层, 出现在大气中层的则是重力惯性内波的临界层。⑤纯顺传重力惯性内波连续谱区的临界层: 此时也仅有一个临界层, 其出现于大气的上层。

总之, 二、三波重叠时各波动连续谱的临界层也均分别位于区间 $(0, H)$ 中。

4 临界波长与运动尺度判据

4.1 临界波长

以上可见, $k<k_0$ 、 $k_0<k<2k_0$ 、 $k>2k_0$ 是三支波动连续谱互不重叠、存在两支波重叠、三支波重叠的判据, 这里临界波数 $k_0=f/(\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min})$, 若用临界波长 $L_0=2\pi/k_0$ 来表示, 则有: $L>L_0$, 三支波动互不重叠; $L_0>L>L_0/2$, 两支波动重叠; $L<L_0/2$, 三支波动重叠。显然, 波长越短的扰动其发生两支波重叠甚至三支波重叠的可能性就越大。由此还可见, 若 f 越大 (纬度越高), $\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}$ 越小 (风切变越小), 则临界波数 k_0 就越大, 而临界波长 L_0 也越短, 此时只有很短的波动才会发生波谱的重叠; 特别若无风切变时, 则 $k_0=\infty$, 故恒有 $k<k_0$, 此时三支波动互不重叠, 并无连续谱, 离散谱的范围也不重叠。

4.2 运动尺度判据

当三支波动互不重叠时因有判据 $k<k_0$, 不等式 (9) 成立。令 $\tilde{U}=\bar{u}_{\max}-\bar{u}_{\min}$, 并引入扰动水平波长 $L=2\pi/k$ 后可得

$$Ro = \frac{\tilde{U}}{fL} = \frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{f} \frac{k}{2\pi} < \frac{1}{2\pi} = 0.159 \ll 1, \quad (22)$$

这里 Ro 是一个无量纲数, 一般 \tilde{U} 与扰动流场量级相当, 故该无量纲数就是 Rossby 数, 这样以上判据的物理意义就十分清晰。此时, 因有 $Ro \ll 1$, 故涡旋波是准地转的, 其就是 Rossby 波。

下面, 讨论存在两支波动重叠时的情况。由判据 $k_0 < k < 2k_0$, 同理可得

$$0.159 < Ro < 0.318. \quad (23)$$

此时已不能认为有 $Ro \ll 1$ 了, 这种情况下涡旋波的非地转性增大, 准地转假定已不适用, 不过此时仍有 $Ro^2 \ll 1$, 故准平衡或无辐散的假定还是适用的^[10]。

当三支波重叠时, 由其判据 $k > 2k_0$, 可得

$$Ro > 0.318. \quad (24)$$

这时 Ro 与 1 同量级, 此时已无纯粹的涡旋波了, 运动是非地转和非平衡的。

中高纬度的大尺度槽脊就是 Rossby 波的具体体现, 早期的数值天气预报就是采用了滤波模式将 Rossby 波过滤出来单独计算, 取得了巨大的成功; 而滤波之所以可能, 就立足于重力惯性内波和涡旋波的可分性上。从以上结果看, 当满足三支波动连续谱互不重叠的判据时, 其的确可分, 且可按其波谱频率来划分为慢波和快波, 涡旋波 (Rossby 波) 是慢波, 重力惯性内波是快波。这时除按频率可分外, 还可按波动的性质来划分; 因涡旋波是准地转的, 故可利用该特性将其过滤出来。为此, 可将原方程按 Rossby 数 Ro 展开 (此时 $Ro \ll 1$), 并取一级近似, 这样就得到了滤波模式——准地转模式。在该模式中, 仅包含了准地转的涡旋波——Rossby 波, 而重力惯性内波则被滤去了。由于这时三支波动可分, 故滤波后涡旋波 (Rossby 波) 仍保持原有的特性, 其歪曲很小。

当两波重叠判据满足时, 则虽有 $Ro < 1$, 但已非 $Ro \ll 1$; 此时, 虽然形式上仍可将原方程按小参数 Ro 展开, 但取一级近似则误差太大; 为此可取二级近似 (此时 $Ro^2 = 0.0253 \sim 0.101 \ll 1$), 这样能得到较好的结果。因此时仍然存在纯涡旋波的连续谱谱区, 故对该区域, 涡旋波这样滤波后其原有的特性仍能得以保持且对其歪曲也不大; 虽然此时涡旋波的地转偏差已较明显, 但其涡旋场和气压场则

仍处于平衡状态之中。这样的滤波模式称之为准平衡模式或无辐散模式, 其比准地转模式的精度要高一级, 但要复杂得多, 目前该模式中仅有涡旋场和气压场的平衡关系即平衡方程还常被用到^[10]。

当三波重叠判据满足时, 则 Ro 相当于 1 的量级, 此时已不能将原方程按 Ro 展开, 事实上, 现已无纯粹的涡旋波连续谱区了, 运动是非地转和非平衡的。

以上可见, 临界波数 k_0 或临界波长 L_0 非常重要, 其大小决定了运动的性质。为此, 我们计算了 k_0 的典型值及与其相应的临界波长 L_0 。取 f 的典型值为 10^{-4} s^{-1} , 取 $\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}$ 的典型值为 10 m/s (与风速的尺度相当), 则 $k_0 = 10^{-5} \text{ m}$, 与其相应的 $L_0 = 2\pi/k_0 = 628 \text{ km}$ 。

由上可知, 在大气中当扰动的水平尺度大于 628 km 时, 即当扰动尺度 $L > L_0$ 时, 则三支波动可分, 涡旋波是准地转的。这样, 临界波长 L_0 在决定运动的性质上具有重要的意义。

与 $2k_0$ 相应的水平波长 $L_1 = \pi/k_0 = 0.5L_0$ 是另一重要的判据; 这里 L_1 的值为 314 km , 当扰动尺度 $L < L_1$ 时, 即小于 314 km 时, 则有三支连续谱区的重叠。

在实际大气中, 流场存在垂直切变是普遍现象, 这样就可用三支波动的连续谱区是否重叠作为划分大气运动尺度的客观标准, 当运动尺度大于 L_0 时, 运动是大尺度的。此时, 三支波动互不重叠, 涡旋波是准地转的, 并可用准地转模式将涡旋波过滤出来。当运动尺度小于 L_0 而大于 L_1 时, 可认为运动是 α 中尺度的。此时发生了二波连续谱区的重叠现象, 然而仍有纯粹的涡旋波和重力惯性内波连续谱区存在。在该情况下, 虽然纯粹的涡旋波其地转偏差较明显, 但仍是准平衡的, 故仍可用准平衡模式 (无辐散模式) 将其过滤出来。当运动尺度小于 L_1 时, 则可认为运动是 β 中尺度的, 此时存在三支连续谱区的重叠, 仅从波动的频谱上已无法区分快波和慢波, 并且无纯粹的涡旋波连续谱区, 这时运动是非平衡的并有明显的辐合辐散。我们将在另文指出在该重叠谱区中, 扰动的性质是重力惯性—涡旋混合波。由此还可知, 研究非平衡的运动不能使用滤波模式。采用以上方法划分的尺度标准具有明显的内在物理意义, 且与通常的尺度划分标准在量级上相一致。

5 结语

本文主要讨论了垂直切变基流中扰动连续谱的重叠问题和临界层出现的情况, 得到以下主要结论:

(1) 在具有垂直切变基流的 Boussinesq 方程组中存在三支波动: 一对重力惯性内波和一支涡旋波, 这三支波动均可有连续谱并存在临界层。

(2) 存在由地转参数和基流的垂直切变决定的临界波长, 当扰动波长小于临界波长但大于其一半时, 存在重力惯性内波和涡旋波连续谱区的两波重叠现象, 当扰动波长小于临界波长的一半时, 则存在重力惯性内波和涡旋波连续谱区的三波重叠现象, 这时已无纯粹的涡旋波连续谱区。

(3) 相应于连续谱区, 则有临界层存在, 在基流垂直切变呈线性的情况下, 一般相应于各支波动连续谱的临界层范围不相重叠, 但当扰动波长小于该临界波长的三分之一时, 则涡旋波的临界层与重力惯性内波的临界层范围可发生重叠。

(4) 临界波长可作为划分运动尺度的标准, 当运动尺度大于临界波长时, 是大尺度的; 当运动尺度小于临界波长时, 可认为是中尺度的; 采用该方法划分的尺度标准与通常的标准在量级上相一致。

参考文献 (References)

- [1] 张铭, 安洁. 中尺度大气波动的波谱和谱函数——数学模型和计算方法. *大气科学*, 2007, **31** (4): 666~674
Zhang Ming, An Jie. Spectrum and spectral function analysis of mesoscale wave — Mathematic model and numerical calculation method. *Chinese J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2007, **31** (4): 666~674
- [2] 刘式适, 刘适达. *大气动力学(上册)*. 北京: 北京大学出版社, 1991, 1~269
Liu Shikuo, Liu Shida. *Atmospheric Dynamics*. Beijing: Beijing University Press, 1991. 1~269
- [3] 曾庆存, 李荣凤, 张铭, 等. 正压大气超高速情形下的谱点和特征函数. *空军气象学院学报*, 1991, **12** (2), 1~7
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming, et al. Spectrum and characteristic function in barotropic atmosphere of ultra high speed. *Journal of the Air Force Institute of Meteorology*, 1991, **12** (2), 1~7
- [4] 沈新勇, 倪允琪, 张铭, 等. β 中尺度暴雨系统发生发展的一种可能物理机制 I. 涡旋 Rossby 波的相速度. *大气科学*, 2005, **29** (5): 727~733
Shen Xinyong, Ni Yunqi, Zhang Ming, et al. A possible mechanism of the genesis and development of meso- β rainstorm system Part I. Phase velocity of vortex Rossby waves. *Chinese J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2005, **29** (5): 727~733
- [5] 沈新勇, 倪允琪, 沈桐立, 等. β 中尺度暴雨系统发生发展的

一种可能物理机制 II. 涡旋 Rossby 波的形成. *大气科学*, 2005, **29** (6): 854~863

Shen Xinyong, Ni Yunqi, Shen Tongli, et al. A possible mechanism of the genesis and development of meso- β rainstorm system Part II. Formation of vortex Rossby waves. *Chinese J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2005, **29** (6): 854~863

- [6] 曾庆存, 任舒展. 斜压大气中连续谱动力学理论及运用 I. 连续谱动力学理论. *中国科学(B)*, 1995, **25** (11): 1210~1218
Zeng Qingcun, Ren Shuzhan. Dynamic theory and application of continuous spectra in baroclinic atmosphere. I. Dynamic theory of continuous spectra. *Science in China (Ser. B)* (in Chinese), 1995, **25** (11): 1210~1218
- [7] 任舒展, 曾庆存. 连续谱动力学的理论及应用 II. 大气环流中的连续谱和离散谱. *中国科学(B)*, 1995, **25** (12): 1229~1338
Ren Shuzhan, Zeng Qingcun. Dynamic theory and application of continuous spectra. II. Discrete and continuous spectra in atmospheric circumfluence. *Science in China (Ser. B)* (in Chinese), 1995, **25** (12): 1229~1338
- [8] Zhang Minghua, Zeng Qingcun. Discrete and continuous spectra of the barotropic quasigeostrophic vorticity model. Part I. *J. Atmos. Sci.*, 1997, **54**: 1910~1922
- [9] 张立凤, 张铭. 斜压切变基流中横波型扰动的特性波动 I: 谱点分析. *气象学报*, 1999, **57** (5): 571~580
Zhang Lifeng, Zhang Ming. Characteristic wave of transversal disturbance at baroclinic shear flow. Part I: Spectrum analysis. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1999, **57** (5): 571~580
- [10] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(第一卷). 北京: 科学出版社, 1979. 98~99, 75~113, 263~264
Zeng Qingcun. *Mathematical and Physical Basis of Numerical Weather Forecasting (Vol. I)*. Beijing: Science Press, 1979. 98~99, 75~113, 263~264
- [11] 曾庆存, 李荣凤, 张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 I: 谱点的分布. *大气科学*, 1990, **14** (2): 129~142
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. The spectra and spectral functions in rotating two-dimensional compressive motion. Part I. Distribution of spectra. *Chinese J. Atmos. Sci. (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1990, **14** (2): 129~142
- [12] 曾庆存, 李荣凤, 张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 II. 谱和谱函数结构的分析. *大气科学*, 1991, **15** (1): 1~5
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. Spectra and spectral functions in rotating two-dimensional compressive motion. Part II. Structure of spectral functions and further discussion on spectra. *Chinese J. Atmos. Sci. (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1991, **15** (1): 1~5
- [13] 张立凤, 王丽琼, 张铭. 垂直切变基流中非地转涡旋波的不稳定. *大气科学*, 2001, **25** (3): 391~400
Zhang Lifeng, Wang Liqiong, Zhang Ming. A study of instability of ageostrophic vortex wave on the condition of vertical shearing basic flow. *Chinese J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2001, **25** (3): 391~400