

周珺, 雷恒池, 陈洪滨, 等. 2010. 层析法微波辐射计遥感反演云液水含量的二维垂直分布 [J]. 大气科学, 34 (5): 1011–1025. Zhou Jun, Lei Hengchi, Chen Hongbin, et al. 2010. Retrieval of cloud liquid water content distribution at vertical section for microwave radiometer using 2D tomography [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 34 (5): 1011–1025.

# 层析法微波辐射计遥感反演云液水含量的 二维垂直分布

周珺<sup>1, 2</sup> 雷恒池<sup>1</sup> 陈洪滨<sup>1</sup> 王彦飞<sup>3</sup> 嵇磊<sup>4</sup>

1 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

2 中国科学院研究生院, 北京 100049

3 中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029

4 北京市人工影响天气办公室, 北京 100089

**摘 要** 通过机载双天线微波辐射计的观测数据层析反演出云液水的空间分布是一个有限角度的图像重建问题。为提高这一反问题的适定性, 本文对已有的正则化方法进行了改进: 根据云液水的分布特征选择  $W^{1, 2}$  空间范数的离散形式作为正则项; 通过数值模拟试验确定双天线仰角的最优设置方案为  $(30^\circ, 90^\circ)$  等。为避免已有方法中对目标函数进行线性化处理而产生的模型误差, 采用 L-BFGS-B 算法对非线性目标函数直接求解。按照侧边界内云液水分布是否已知将反演模型分为已界模型和未界模型。已界模型的反演结果表明, 反演误差在  $8.6\% \sim 12.3\%$  之间, 反演图像可以反映出不同云型的结构特征。敏感性试验表明, 影响反演精度的主要因素为投影数据的角度分辨率、辐射计观测噪声以及侧边界云液水分布的不确定性; 受云液水含量、正则算子特性及边界因素的综合影响, 不同云型的反演精度存在差异。为使微波辐射计探测云液水分布能够独立于其它探测手段, 本文针对未界模型提出嵌套反演方法。数值模拟试验表明, 嵌套反演方法可以为目标区域的反演提供足够的侧边界信息。

**关键词** 层析 侧边界 机载双天线微波辐射计 云液水空间分布 反演方法

**文章编号** 1006-9895 (2010) 05-1011-15

**中图分类号** P407

**文献标识码** A

## Retrieval of Cloud Liquid Water Content Distribution at Vertical Section for Microwave Radiometer Using 2D Tomography

ZHOU Jun<sup>1, 2</sup>, LEI Hengchi<sup>1</sup>, CHEN Hongbin<sup>1</sup>, WANG Yanfei<sup>3</sup>, and JI Lei<sup>4</sup>

1 *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

2 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*

3 *Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

4 *Beijing Weather Modification Office, Beijing 100089*

**Abstract** Retrieving spatial distributions of cloud liquid water content (LWC) from the airborne double-antenna microwave radiometer data by tomography method is a limited-angle image reconstruction. In order to enhance the well-posedness of this inverse problem, this paper improves the current regularization methods through using the discrete form of the norm in  $W^{1, 2}$  space as the regular term according to the characteristic of LWC distribution and choosing  $(30^\circ, 90^\circ)$  as the best combination of the double antenna elevation angles according to the results of numer-

ical simulations. The L-BFGS-B algorithm is used to solve the nonlinear optimization problem to avoid the model error caused by the linearization. The retrieval model falls into two types according as the LWC distribution in the lateral boundary is known or unknown and they are called Yijie model and Weijie model for short. The retrieval results of the Yijie model show that the relative error is 8.6%–12.3% and the structure of different cloud types can be showed in the retrieval images. Sensitivity studies indicate that the number of scanning angles, the radiometer noise level, and the uncertainty of LWC in the lateral boundary affect the retrieval accuracy most. Besides, the retrieval accuracy also varies in different cloud types because of the magnitude of the LWC, the characteristic of the regular operator, and the lateral boundary factor. In order to make the remote sensing of LWC distributions independent of other instruments, the nesting retrieval method is developed to retrieve the Weijie model. The numerical simulation shows that the nesting method can offer enough information of the lateral boundary for retrieving the LWC distribution in the target area.

**Key words** tomography, lateral boundary, airborne double-antenna microwave radiometer, distribution of liquid water content, retrieval method

## 1 引言

云中液态水含量(简称 LWC)的空间分布是一个极为重要的物理量。然而,目前探测手段不多,且已有的手段存在一定的局限性。通过层析技术反演出大气温度或水汽含量的二维或三维分布的可行性已被证实(Fleming, 1982; Hoffman et al., 1989; Flores et al., 2000),但是,云液水的时空分布并不连续而又变化迅速,并且难以获得精确度较高的先验值,因此,云的层析探测要比大气温度或水汽的层析探测更加困难。

1980 年代,美国开始了将层析技术用于反演云液水分布的研究。Warner and Drake (1985) 在 1985 年提出两台地基微波辐射计同面扫角探测方式,以吸收系数为未知数建立非线性方程组,并采用线性迭代法求解。1988 年,Drake and Warner (1988) 将层析技术推广到机载辐射计上,通过机载对空双向(天线)单频微波辐射计进行交替探测,完成对目标云系的扫描,求解方法是将方程组在无约束解附近展成泰勒级数,近似为线性方程组求解。

苏联的研究主要集中在机载微波辐射计反演 LWC 方面。Koldaev et al. (1990, 1992)、Bobylev (1997) 在积分云液水含量(简称 TLWC)已由观测亮温求得的基础上建立线性方程组,采用代数重建法(简称 ART)求得离散网格中的 LWC。需要指出的是,使用 ART 解线性方程组的前提是必须保证方程组是相容的,若不相容,则矛盾方程组应通过最优化方法求解(陈立成, 1994)。此外,这种

反演方法在求 TLWC 时已引入反演误差,因此限制了层析反演的精度。

2008 年, Huang et al. (2008a, 2008b) 重新对地基平台的微波层析法进行研究,并通过截断奇异值或平滑约束等方法改善方程组的病态性。Huang et al. (2008a, 2008b) 采用二维一阶导数算子作为正则项对水平和垂直两个方向的云液水分布进行约束。一方面,在层状云中 LWC 的水平分布较为连续而垂直分布不连续,因此对垂直方向 LWC 进行约束并不符合实际;另一方面,即便是水平方向的云液水,起伏变化也是较大的,采用一阶导数算子进行约束可能造成过度平滑。此外, Huang et al. (2008a, 2008b) 在算法上仍然使用线性化迭代求解(Warner and Drake, 1985),同时指出该方法的收敛速度取决于方程组的线性程度,并认为对于非降水云,云液水含量较小,透过率对吸收系数的依赖性很弱,线性化可以成立。但是,以往对我国北方非降水性层状云的探测表明,云厚可能超过 6 km,仅过冷水的垂直积分含量就可达到 1500~2000 g/m<sup>2</sup>(金德镇等, 2004),这种线性化处理会导致收敛速度减慢甚至可能不收敛。这就限制了方法的应用。

由于受观测平台的限制,层析法反演云液水分布存在侧边界问题。当侧边界云液水分布未知时,目标区域的部分网格可能没有交叉的扫描射线通过,因此造成反问题的不适定性。机载平台由于投影角度的限制,受侧边界问题的影响更大。一种处理侧边界的方法是假设目标区域足够大,可以将目标云包含在内(Huang et al., 2008b)或假设目标

云离周围其它云足够远，其它云的辐射对观测亮温没有影响( Drake and Warner, 1988)。然而，我国北方层状云的水平尺度可以达到几百公里，目标区域无法完全将其包括在内，以上假设无法成立。另一种处理方法是通过对其它独立于微波辐射计的手段(如雷达、云模式等)获得侧边界云液水的分布(Boylev, 1997)。这种方法使微波辐射计探测云液水分布依赖于其它探测手段，限制了层析法的应用。以上两种处理方法均无法得到精确的侧边界云液水分布。辐射计采用的微波波段(31.65 GHz)对云液水非常敏感，因此侧边界云液水分布的不确定性可能带来很大的反演误差。但是，前人的工作中并没有就侧边界的不确定性对反演精度的影响进行定量的评估或提出解决的方法。

2002 年，中国科学院大气物理研究所研制成 9.5 mm 波长机载对空单天线微波辐射计，已用于云液水和过冷水垂直积分总量的探测(江芳等, 2003)。目前，正在进一步研制机载双天线微波辐射计，拟通过层析技术反演垂直剖面内云液水的二维分布。机载平台主要面临的问题是投影角度不足，上述关于机载的引文中并没有就这一问题进行分析。本文将通过数值模拟试验探讨如何在有限角度投影下保证方程组的适定性。为避免前述各引文中对非线性目标函数进行线性化处理而导致的模型误差，本文采用非线性优化算法对目标函数直接迭代求解，因此反演方法的应用不会受限于云液水范围。此外，本文将通过敏感性试验讨论侧边界的不确定性对反演精度的影响，并探讨在侧边界 LWC 分布未知的情况下通过微波辐射计遥感独立反演出目标区域内云液水含量的二维分布。总之，本文试图通过数值模拟试验发展一套适合于机载平台并且针对我国北方地区云系的反演方法，并对正在进行的仪器的研制起到理论指导的作用。

本文分为以下几个部分：第 2 节确定反演方

法；第 3 节针对侧边界已知和未知的反演模型进行数值模拟试验；第 4 节进行总结和讨论。在本文中，投影角度、天线仰角角度、扫描角度或观测角度均指天线中心轴与飞机水平飞行方向的夹角。

## 2 反演方法

### 2.1 观测方式及辐射计性能指标

飞机在云底以下沿水平方向匀速飞行，飞行速度为 70 m/s。飞机背部安装的双天线在射频开关的控制下交替探测，在一定的采样频率下得到一组亮温观测值。观测方式如图 1 所示。辐射计性能指标如下：工作中心频率为 31.65 GHz，天线波束宽度  $4.2^\circ$ ，积分时间 0.3 s，天线转换时间 0.3 s，数据处理时间 0.1 s，接收机灵敏度为 0.2 K。

### 2.2 反演模型

如图 2 所示，假设云顶、云底高度已通过卫星、探空等资料确定，反演区域将云的上下界包括在内，B 为目标区域，A、C 为侧边界区域，合称为反演区域。按照侧边界内云液水分布是否已知，将反演模型分为侧边界 LWC 分布已知的反演模型(简称已界模型)和侧边界 LWC 分布未知的反演模型(简称未界模型)。已界模型中，A、C 区域的云液水分布可通过雷达、云模式等独立于辐射计的手段获得，因此图 2 中实线和虚线箭头所代表的探测均为有效探测，若采样频率足够高，那么辐射计对目标区域的扫描可以做到无“盲区”；未界模型中

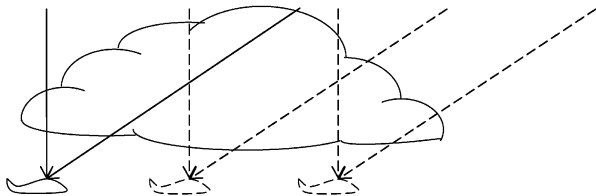


图 1 观测示意图

Fig. 1 The schematic of observation

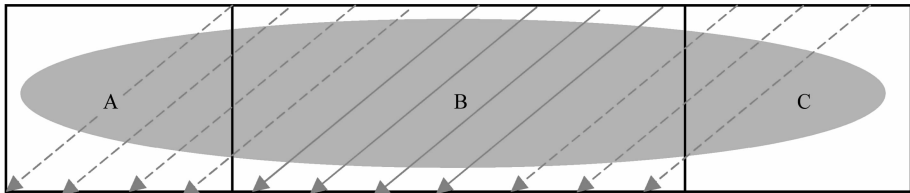


图 2 反演模型。灰色为云体；B 区域为反演目标区域；A、C 区域为侧边界区域；带箭头的虚线和实线表示某个天线的观测方向

Fig. 2 Retrieval model. Gray area is for cloud, area B is the target area, areas A and C are the lateral boundaries; solid or dashed line with arrows is for the direction of reception of a certain antenna

由于 A, C 区域的云液水分布未知, 所以仅实线箭头代表的探测为有效探测, 目标区域左上角和右下角的部分区域成为“盲区”。即使增加一个垂直方向的投影角度, “盲区”内的网格也仅有一个方向的射线通过, 反演的不适宜性仍然很强。

根据系列重建算法, 将目标区域 B 离散为  $r$  行  $c$  列, 共  $n=r \times c$  个网格, 假设 LWC 在网格内均匀分布, 温、压、湿等环境参量水平均匀并通过探空资料插值求得。根据微波波段平面平行大气辐射传输方程及天线方向函数 (Drake and Warner, 1988), 列出一组非线性方程组,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为 LWC 向量,  $\mathbf{x}_{(i-1)c+j}$  为第  $i$  行第  $j$  列网格内的 LWC ( $i=1, \dots, r; j=1, \dots, c$ );  $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  是观测值向量,  $m$  为观测次数。

### 2.3 目标函数的建立和求解

本问题是一个有限角度图像重建问题。为保证解的适定性, 通常将方程组 (1) 的求解转化为一个最小二乘问题并根据先验信息附加约束求解。考虑到非降水云中液态水含量分布的水平连续性并且最大云液水含量通常在  $1.0 \text{ g/m}^3$  以内, 采用 Tikhonov 正则化方法以及双边约束保证方程组的适定性。建立目标函数如下:

$$\min \{ \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_{l_2}^2 + \alpha \cdot \Omega(\mathbf{x}) \}, \quad 0.0 \leq \mathbf{x} \leq 1.0, \quad (2)$$

其中,  $\Omega(\mathbf{x})$  为正则项 (或称稳定泛函), 对  $\mathbf{x}$  起到平滑约束作用并且改善方程组的不适宜性;  $\alpha$  为正则参数, 它的大小决定了正则化的强度 (黄光远和刘小军, 1993)。

正则项的选择非常重要, 若正则约束与未知量的真实分布相矛盾, 就会导致解扭曲或振荡 (Twomey, 1977)。Wang et al. (2006, 2008) 在反演气溶胶粒子谱分布以及地表参数时采用  $W^{1,2}$  空间范数的离散形式 (简称 S 算子) 作为正则项, 取得较好的反演效果。考虑到层状云中 LWC 水平分布较为连续, 本文选用 S 算子对已界模型中的 LWC 进行水平约束。至于不适宜性较强的未界模型, 本文将在 3.2.1 节通过数值模拟试验确定适合的正则算子。

正则参数的选择有先验和后验两种策略。当观测误差已知或可近似估计时, 采用先验策略中

Morozov 的偏差原理确定最优正则参数 (王彦飞, 2007)。当无法对误差水平作出先验估计时, 通常采用后验策略 L 曲线法 (徐张明等, 2002)。数值模拟试验表明, Morozov 的偏差原理确定最优正则参数要比 L 曲线法更为准确。

为避免对非线性目标函数进行线性化处理而产生模型误差, 本文通过优化算法对目标函数直接迭代求解。本问题是一个高维、高度非线性、具有简单双边界约束并且 Jacobi 矩阵可求的优化问题, 适合采用 L-BFGS-B 算法求解 (Zhu et al, 1997)。我们采用初值扰动法进行测试, 结果表明对于本问题算法的优化结果不依赖于初值, 算法可以收敛到全局最优解。

当投影角度非常有限、方程组严重不适宜时, 即使通过对方程组附加约束以及稳定泛函, 求得的解仍然可能含有较大噪声。为改善图像质量, 我们采用均值滤波器对反演图像进行处理。

### 2.4 反演结果的评价指标

对反演结果的评价指标有两个, 一是反演相对误差, 采用与 Drake and Warner (1988) 相同的表示方法, 即均方根误差与模拟真值中的最大云液水含量的比值; 二是反演图像的失真程度, 包括云液水中心的位置、是否会出现虚假中心以及云液水分布的形变程度。

## 3 数值模拟试验

以下数值模拟试验均以 2001 年 7 月 8 日 08 时 (北京时) 长春站的探空廓线为背景, 参考美国能源部与中国科学院大气物理研究所中层大气与全球环境探测实验室合作的 AMF (ARM Mobile Facility) 12 波段地基微波辐射计 2008 年 5~12 月在安徽寿县的外场试验观测结果, 构造了单中心、多中心、积层混合云型, 另构造云液水水平分布均匀和完全均匀的云型。前四种云型如图 3 所示, 矩形以内区域为目标区域, 矩形以外的区域为侧边界区域。完全均匀的云型 LWC 为  $0.1 \text{ g/m}^3$ 。云厚 4 km, 反演目标区域的范围为  $4 \text{ km} \times 20 \text{ km}$ , 离散为  $10 \times 20$  个网格。根据第 2.1 节所述辐射计实际性能指标设置参数。数值试验表明, 辐射计工作频率下亮温对环境温度和水汽含量的变化并不敏感, 因此以下数值模拟试验不考虑温湿环境场的误差, 关于温湿环境场的不确定性对反演精度的影响我们

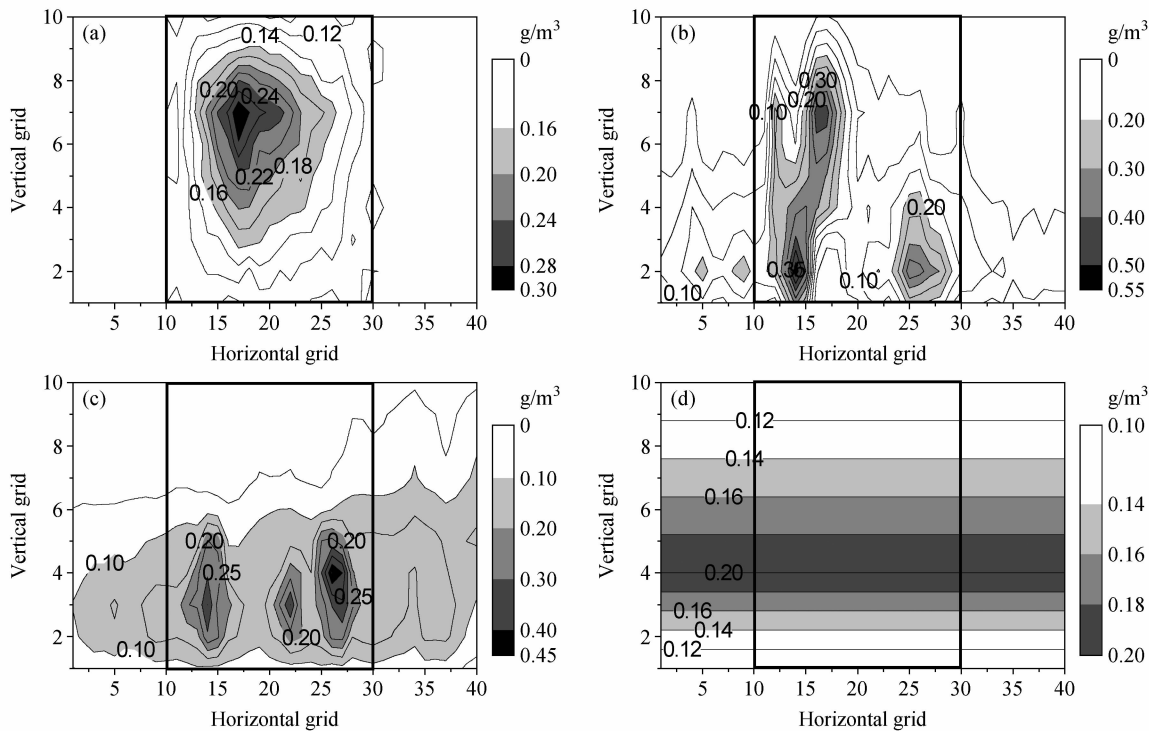


图 3 典型云型 LWC 的模拟真值：(a) 单中心云；(b) 多中心云；(c) 积层混合云；(d) 水平均匀云

Fig. 3 Simulated 'true values' of liquid water content (LWC) of typical cloud types: (a) Weak onion cloud; (b) broken cumulus cloud; (c) stratocumulus cloud; (d) horizontally homogeneous cloud

将在 3.1.3 节中进行讨论。上述参数为以下数值模拟试验的默认参数。数值模拟试验流程如下：首先根据辐射传输方程求出辐射计接收到的亮温值，附加噪声后作为模拟观测值，再通过第 2 节的反演方法进行反演。

### 3.1 已界模型

#### 3.1.1 双天线仰角角度的最优设置方案

已有的机载双天线微波辐射计试验中所采用的双天线仰角角度都是默认的——苏联 (30°, 90°) (Koldaev et al., 1990)、美国 (45°, 135°) (Drake and Warner, 1988)。本节通过数值模拟试验确定双天线的最优角度组合。

设双天线 (天线 1 和天线 2) 的角度为 (30°, 120°)、(45°, 135°)、(30°, 90°)，对单中心云进行反演。反演误差分别为 11.4%、11.1% 和 10.0%，差异不大。但是反演图像 (图 4a~c) 表明，当双天线中有一个角度为 90° 时，可以明显提高解的稳定性。这是因为垂直入射时，射线经过各网格的截距相等，即各未知量在方程中的重要性相同，因此方程组的稳定性较高；而斜入射时，射线经过各网格

的截距不等，有的网格截距可能非常小，那么观测亮温中含有该未知量的信息就会很少，造成方程组不稳定。因此，我们将天线 2 的角度设置为 90°。此外，实际观测时通过 90° 天线的观测结果可以非常容易地判断出云液水丰富区域的水平范围，依此建立反演目标区域，并且可以保证未界模型中侧边界内的每个网格至少有一个方向的射线通过。

考虑到当投影角度互相垂直时观测数据之间的相关性最小，并且由观测误差引起的反演的不确定性最小 (Twomey, 1977)，因此双天线仰角角度的夹角应尽量接近 90°。但是，考虑到辐射计的有效探测距离、飞行过程中的颠簸以及飞机背部对天线副瓣的影响，不宜采用天线中心轴与水平方向夹角小于 30° 的投影角度。现固定天线 2，将天线 1 分别设置为 45°、60°、75° 进行反演。反演误差在 9.3%~10.3% 之间，差异不大。但是比较图 4c 和图 4d~f 发现，当天线 1 为 30° 时，反演的云液水中心位置最为准确，图像的失真程度最小。因此，我们将天线 1 的角度设置为 30°。

综上所述，我们认为选 (30°, 90°) 一组天线设

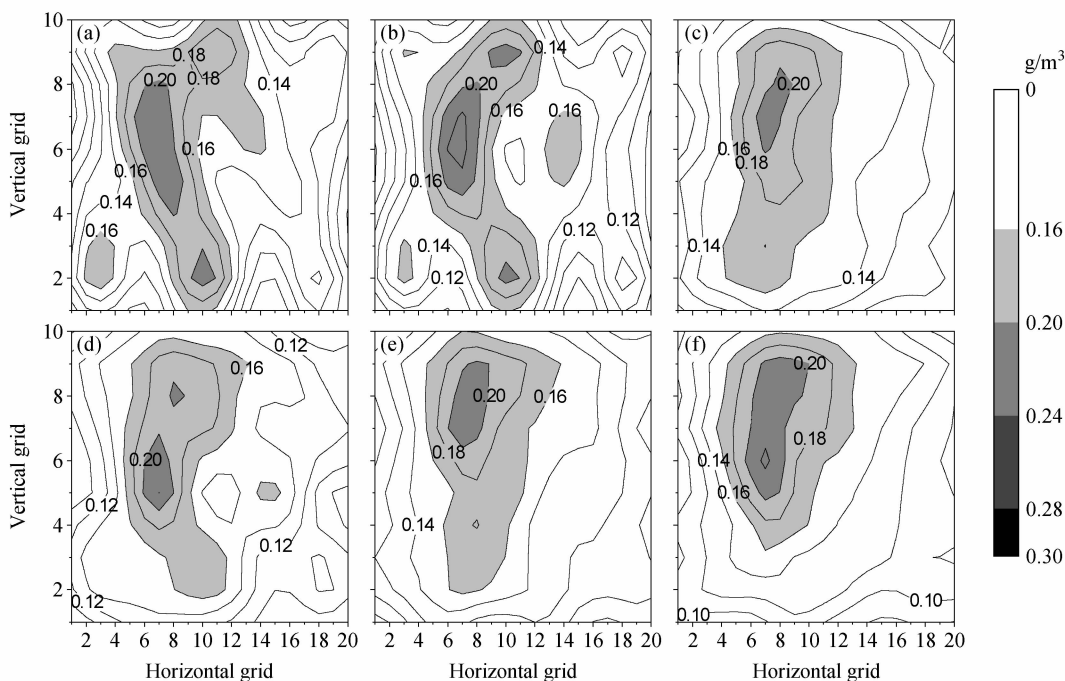


图 4 不同的双天线仰角角度设置方案对单中心云 LWC 的反演图像: (a) ( $30^\circ$ ,  $120^\circ$ ); (b) ( $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ); (c) ( $30^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (d) ( $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (e) ( $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (f) ( $75^\circ$ ,  $90^\circ$ )

Fig. 4 Retrieval image of weak onion cloud LWC using different combinations of double antenna elevation angles: (a) ( $30^\circ$ ,  $120^\circ$ ); (b) ( $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ); (c) ( $30^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (d) ( $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (e) ( $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ); (f) ( $75^\circ$ ,  $90^\circ$ )

置为最佳。

### 3.1.2 五种云型的反演结果

按照 3.1.1 节确定的最优角度设置方案对图 3 所示的典型云型进行反演。反演误差依次为 10.0%、8.6%、10.7%、12.3%、11.0%，单中心云的反演图像见图 3c，其余云型的反演图像见图 5。反演图像表明，对于含有云液水中心的云型，反演方法能够较为准确地反演出云液水中心位置，但是 LWC 的极大值均有不同程度的减小，这是由正则项以及均值滤波的平滑作用造成的，并且云液水分布形状有一定的形变，这是由于投影角度不足造成的，这点将在 3.1.3 节中加以证明。对于云液水极大值位于第 4 行的水平均匀云，反演图像的极大值也在第 4 行，但是呈离散多中心的连续分布，并没有准确地反演出层状结构。对于均匀云，反演的 LWC 在  $0.07 \sim 0.12 \text{ g/m}^3$  之间，与模拟真值较为接近，但是具有虚假中心。

### 3.1.3 影响反演精度的各因素的敏感性试验

上述反演方法的精度受投影数据的角度分辨率、云型结构、侧边界云液水分布的不确定性、温湿环境场的误差、水平距离分辨率、辐射计观测噪

声、波束宽度等因素的影响。限于篇幅，本节仅对前三种因素的敏感性试验进行详细的阐述，其余因素均仅给出简单的结论。在讨论某一因素时，假设其它因素为默认设置。

(1) 投影角度分辨率 层析技术的数学基础是 Randon 变换。Randon 变换要求全方位的投影数据，即在所有角度和距离上的投影（陈立成，1994）。但是实际观测中受辐射计硬件条件、探测方式和飞行速度等因素的限制，我们所获得投影数据在角度和距离上是离散的。尤其对于机载平台，投影角度的分辨率是非常低的，仅有 ( $30^\circ$ ,  $90^\circ$ ) 两个方向，无法提供足够的信息量。目前，我们对云液水分布的先验信息知之甚少，只能通过简单的双边约束和水平平滑约束来弥补投影角度的不足。以下我们将通过敏感性试验讨论在先验信息一定的情况下，角度分辨率对反演精度的影响。本节内的反演结果均未经过均值滤波处理。

考虑到辐射计的有效探测距离以及飞机背部对天线副瓣的影响，不宜采用天线中心轴与水平方向夹角在  $30^\circ$  以下的投影角度。因此角度设置如下：2 个投影方向的角度为  $30^\circ$ 、 $90^\circ$ ；3 个投影方向的角

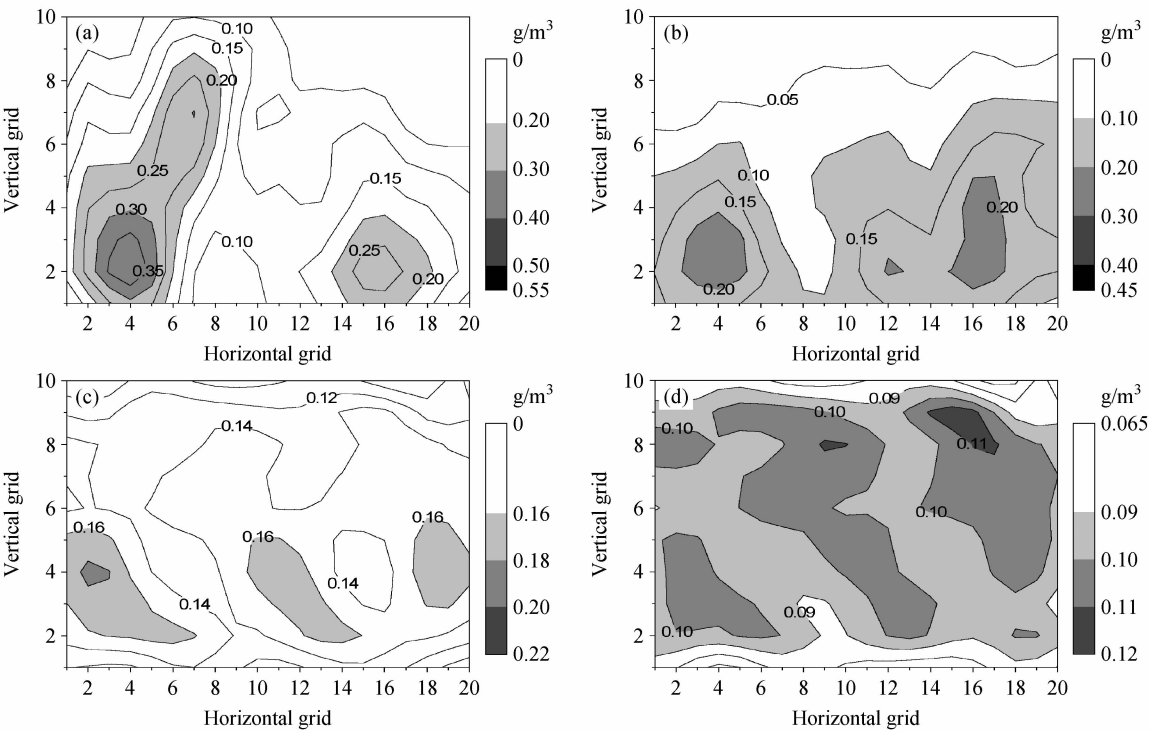


图 5 最优方案的 LWC 反演图像：(a) 多中心云；(b) 积层混合云；(c) 水平均匀云；(d) 均匀云

Fig. 5 Retrieval images of LWC using the best project: (a) Broken cumulus cloud; (b) stratocumulus cloud; (c) horizontally homogeneous cloud; (d) homogeneous cloud

度为 45°、90°、135°；5、7、9、11、13、25 个投影方向的角度范围在 30°~150°之间，分别以 30°、20°、15°、12°、10°、5°为间隔。

如图 6 所示，当投影角度的个数从 2 个增加到 7 个，反演误差明显下降，继续增加投影角度个数后，反演误差下降趋于平缓甚至有微弱增加。这是由于在一定的采样频率下，随着探测角度的增多，每一个角度的射线的探测次数将减少，从而引起反演误差增加。以 25 个投影角度为例，当积分时间和天线转换时间都从 0.3 s 减小到 0.1 s，即采样频率从 1.7 Hz 增加为 4.9 Hz 时，五种典型云型的反演误差分别降低为 4.4%、3.6%、5.9%、8.5%、5.8%。可见，随着投影角度个数的增加，对采样频率的要求也越来越高。

如图 7 第 1 列和第 2 列反演图像所示，随投影角度个数的增加，反演图像的虚假中心逐渐减少，云液水中心的形变程度逐渐减小，水平均匀云的层状结构也逐渐明显，当投影角度增加到 7 个时，已经可以比较准确地反演出云液水分布。如图 7 第 3 列和第 4 列反演图像所示，当投影角度增加到 25 个，反演图像又出现振荡，此时若提高采样频率，

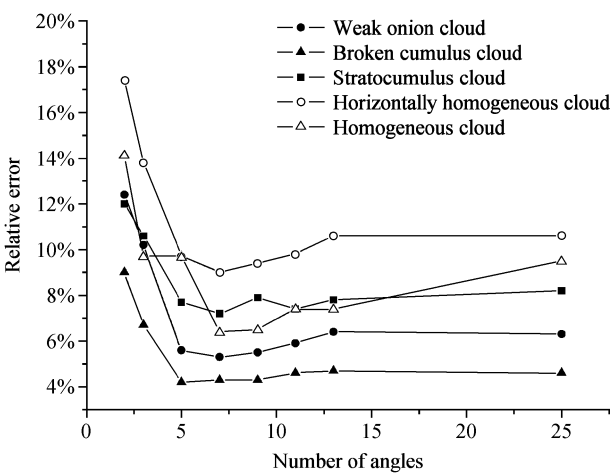


图 6 LWC 反演误差随角度分辨率的变化

Fig. 6 Relative error of LWC as a function of the angle resolution

反演图像又恢复稳定。可见，在默认的采样频率下，选择 7 个投影角度是较为合适的。

目前，辐射计所采用的 2 个投影角度可以比较准确地确定云液水中心位置，但是会出现虚假中心以及形变。通过均值滤波虽然可以消除大部分虚假中心，但是不能消除形变，并且可能会进一步造成 LWC 中心的反演值偏低以及中心位置偏移。

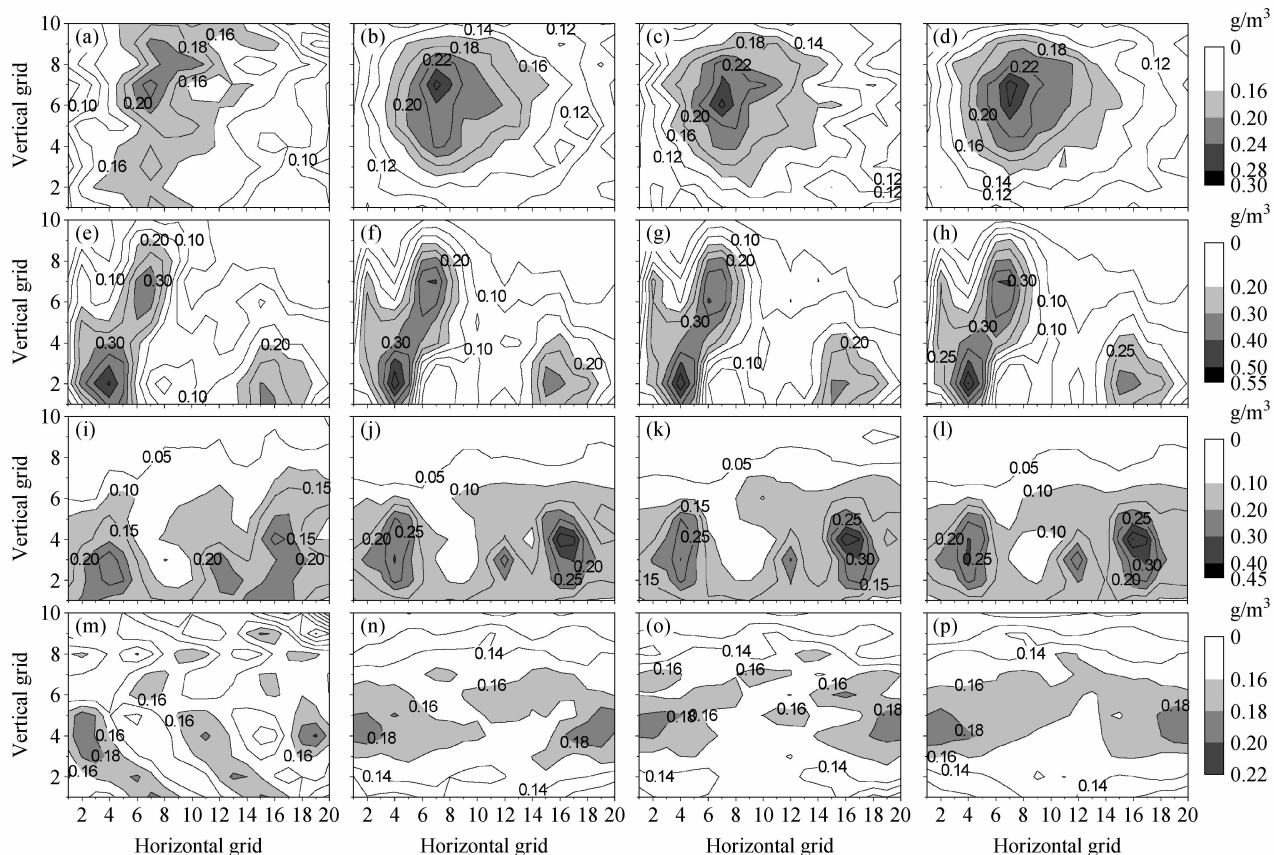


图 7 (a-d) 单中心云、(e-h) 多中心云、(i-l) 积层混合云和 (m-p) 水平均匀云在不同角度分辨率下的反演图像: (a, e, i, m) 2 个投影角度 (采样频率 1.7Hz); (b, f, j, n) 7 个投影角度 (采样频率 1.7Hz); (c, g, k, o) 25 个投影角度 (采样频率 1.7Hz); (d, h, l, p) 25 个投影角度 (采样频率 4.9Hz)

Fig. 7 Retrieval images of LWC of (a-d) weak onion cloud, (e-h) broken cumulus cloud, (i-l) stratocumulus cloud, and (m-p) horizontally homogeneous cloud with different angle resolutions: (a, e, i, m) Two projecting angles (sampling frequency is 1.7Hz); (b, f, j, n) seven projecting angles (sampling frequency is 1.7Hz); (c, g, k, o) 25 projecting angles (sampling frequency is 1.7Hz); (d, h, l, p) 25 projecting angles (sampling frequency is 4.9Hz)

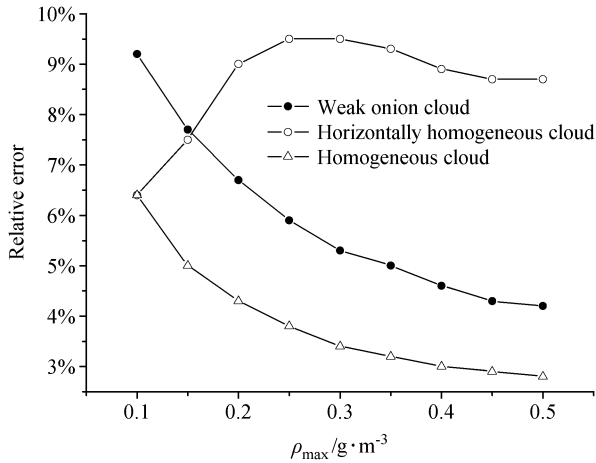
(2) 云型结构 如图 6 所示, 不同云型的反演精度存在差异。为排除角度分辨率与水平距离分辨率不匹配对反演精度造成的影响, 以下只讨论在默认采样频率下 7 个扫描角度的反演结果。图 6 所示反演精度从高到低的五种云型依次是多中心云、单中心云、均匀云、积层混合云、水平均匀云。在解释这一现象之前, 我们首先考虑以下三个影响反演精度的因素。

Drake and Warner (1988) 指出, 目标云的辐射越强则亮温的观测噪声以及温度和湿度的随机扰动对反演精度的影响越小, 因此, 反演精度随云内最大液水含量 ( $\rho_{\max}$ ) 的增大而提高。 $\rho_{\max}$  较大通常意味着云的整体含水量较高, 因此观测值的信噪比较高。我们将这一影响反演精度的因素简称为  $\rho_{\max}$

因素。

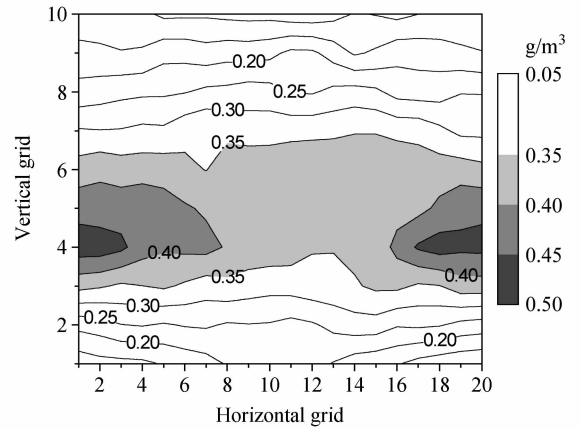
以单中心云、水平均匀云和均匀云为例, 对  $\rho_{\max}$  因素进行敏感性试验。 $\rho_{\max}$  的取值为 0.1~0.5 g/m<sup>3</sup>, 以 0.05 g/m<sup>3</sup> 为间隔。云液水分布的具体设置如下: 将原单中心云的含水量乘以一个系数, 调整该系数使新的云液水含量的最大值满足上述  $\rho_{\max}$  的取值; 将水平均匀云的最大含水量层的值取为上述  $\rho_{\max}$ , 并向上下边界递减至 0.1 g/m<sup>3</sup>, 即云型从均匀云逐渐变为水平均匀云且层状结构越来越明显; 将均匀云的含水量取为上述  $\rho_{\max}$ 。反演误差如图 8 所示。

单中心云和均匀云的反演误差随  $\rho_{\max}$  的增大而减小。当  $\rho_{\max}$  相等时, 均匀云的反演误差低于单中心云。这一方面是因为  $\rho_{\max}$  相等时, 均匀云的整体

图 8 LWC 反演误差随  $\rho_{\max}$  的变化Fig. 8 Relative error of LWC as a function of  $\rho_{\max}$ 

含水量要高于单中心云; 另一方面是由于 S 算子的特性造成的。当正则参数  $\alpha \rightarrow \infty$ , 即目标函数的优化结果完全由平滑约束决定而与观测值无关, 此时  $x \rightarrow 0$ 。可见, S 算子的平滑作用是使云液水含量更均匀且值更小。这种均匀分布的约束恰与均匀云的结构相符合, 因此, 均匀云的反演精度好于单中心云。我们将这一影响反演精度的因素简称为 S 算子因素。

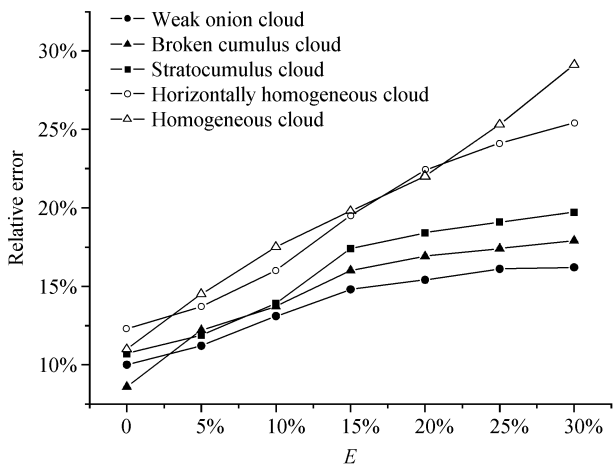
水平均匀云的反演误差首先随  $\rho_{\max}$  的增大而增大, 当  $\rho_{\max}$  为  $0.25 \text{ g/m}^3$  时反演误差达到最大, 之后又随  $\rho_{\max}$  的增大而降低, 但与其它两种云型相比反演误差仍然较高。在解释这一现象之前, 我们需要考虑另一个因素。水平均匀云和均匀云的观测值的时间序列为水平直线 (不考虑辐射计观测噪声), 无法反映出这两种云型的结构特征。但是, 由于边界已知 (包括侧边界和上下边界) (如图 7n 所示), 水平均匀云中靠近边界的部分层状结构反演得较好而离边界较远的中部在 S 算子因素的作用下云液水分布趋于均匀, 与层状结构不符。即使增大  $\rho_{\max}$  至  $0.5 \text{ g/m}^3$  (如图 9 所示), 也只对靠近边界处的层状结构有所改善, 而对中部的改善不明显。我们将这一影响反演精度的因素简称为边界因素。均匀云也受到边界因素的影响, 但是在 S 算子因素的作用下, 这种影响并不明显。回到图 8 水平均匀云的反演结果。当  $\rho_{\max}$  从  $0.1 \text{ g/m}^3$  增至  $0.25 \text{ g/m}^3$ , 反演误差明显增大。这是因为云液水含量较低时探测值的信噪比较低, 因此最优正则参数较大, 此时 S 算子因素起主要作用, 由于云的结构从均匀变为层

图 9  $\rho_{\max} = 0.5 \text{ g/m}^3$  时水平均匀云的 LWC 反演图像Fig. 9 Retrieval image of LWC of horizontally homogeneous cloud when  $\rho_{\max} = 0.5 \text{ g/m}^3$ 

状, 导致反演误差明显增大。当  $\rho_{\max}$  从  $0.25 \text{ g/m}^3$  增至  $0.5 \text{ g/m}^3$ , 反演误差有微弱的下降。这是因为云液水含量较高时探测值的信噪比增大, 因此最优正则参数较小, 此时边界因素取代 S 算子因素成为主要影响因素。由于云液水含量的增大只能改善靠近边界部分的反演精度而对中部的层状结构改善很小, 因此, 反演精度只有微弱的提高。

通过对上述三种影响因素的讨论, 图 6 中 7 个扫描角度时不同云型反演精度的差异就可以得到解释了。精度由高到低的五种云型的  $\rho_{\max}$  分别为  $0.53$ 、 $0.3$ 、 $0.1$ 、 $0.4$ 、 $0.2 \text{ g/m}^3$ 。在  $\rho_{\max}$  因素的作用下, 多中心云的反演精度高于单中心云。水平均匀云和均匀云由于探测值的时间序列无法反映出结构信息, 因此反演精度低于前两种云型。受 S 算子因素和边界因素影响, 均匀云的反演精度要高于水平均匀云。积层混合云由于含有层状结构, 其反演精度介于含有云液水中心的云型和水平均匀云之间。

(3) 侧边界云液水分布的不确定性 以下敏感性试验中, 我们采用与 2.4 节介绍的反演误差相同的形式来表示侧边界 LWC 分布的不确定性, 并用  $E$  表示这种误差。在侧边界 LWC 的精确分布上附加高斯白噪声, 噪声均值为零, 标准差为目标区域内最大云液水含量与  $E$  的乘积。由于此时的观测误差已不仅仅是辐射计的随机误差, 还包括侧边界 LWC 的不确定性  $E$ , 而  $E$  的大小在实际观测时是不可估计的, 因此 Morozov 偏差原理已不可行, 此处改用 L-曲线法确定最优正则参数。如图 10 所示反演精度对  $E$  非常敏感。可见, 较为准确地估算

图 10 LWC 反演误差随  $E$  的变化Fig. 10 Relative error of LWC as a function of  $E$ 

侧边界 LWC 分布是十分必要的。

(4) 其余因素 温湿环境场的误差包括环境场的水平波动引起的误差和探空误差。按 Drake and Warner (1988) 表 1 的标准差模拟大气水平波动。以单中心云为例,在大气水平波动的基础上加入探空误差。考虑到一般情况下环境温度的探空精度在 1.0 K 以内,水汽混合比的探空相对精度在 5.0% 以内 (Huang et al., 2008a)。在此精度下,温度和水汽含量的不确定性对反演精度的影响在 0.8% 以内 (未滤波)。可见环境场的误差对反演精度的影响很小,因此在本文其它部分的数值模拟试验中忽略这一因素的影响。

当水平距离和网格数一定时,超定程度  $D$  (即探测次数与网格数的比值) 代表了投影数据的水平距离分辨率。试验结果表明随着  $D$  的增大,反演误差总体上呈下降趋势。当  $D \geq 2$  时,各云型的反演误差几乎都不再下降,只是在某个值附近震荡。在默认参数下  $D=2.72$ ,因此,若进一步提高超定程度并不能有效改善图像的形变程度。

反演误差随观测噪声的增大而增大。当观测噪声较小时,反演精度对观测噪声非常敏感;当观测噪声较大时,反演精度对观测噪声的敏感性降低。 $\rho_{\max}$  越小受观测噪声的影响越大。当观测噪声大于等于 0.2 K 时,各云型的反演误差经均值滤波后均有不同程度的降低,并且降低的程度随观测噪声的增大而增大。

为排除扫描角度的微小变化对反演的影响,我们仅在 7 个扫描角度的情况下讨论波束宽度对反演

精度的影响。试验表明,不考虑辐射计噪声时,波束宽度为  $1^\circ$  和  $4.2^\circ$  的观测亮温时间序列的均方差在 0.13~0.26 K 之间,小于或接近辐射计观测噪声。两种波束宽度下反演误差的差异在 0.4% 以内。可见减小目前辐射计的波束宽度,反演精度并不会得到明显改善。

综上所述,在目前仪器的性能指标下,进一步提高探空精度,提高辐射计采样频率或减小波束宽度,并不能明显改善反演精度。但是通过硬件或软件手段 (如均值滤波、小波去噪等) 降低辐射计探测误差将会明显提高反演图像的质量。

### 3.2 未界模型

#### 3.2.1 正则项的选择

S 算子对 LWC 只有水平方向的约束,所以抗差性较弱。以 S 算子为正则项,按未界模型对积层混合云进行反演,反演误差为 17.9%。反演图像 (图 11a) 表明,以 S 算子为正则项完全不能反演出云液水的分布。可见,未界模型的适定性较差,需要抗差性能更强的正则算子来保证解的稳定性。因此,考虑使用 Laplace 算子 (简称 L 算子) (温俊海, 1999) 为正则项,该算子可以对水平和垂直两个方向进行约束,抗差性较强,但是可能会使反演图像产生一定的形变。以 L 算子为正则项对积层混合云进行反演。考虑到 L 算子的平滑作用较强,本文的数值模拟试验中不对以 L 算子为正则项的反演结果进行滤波处理。反演误差为 14.1%。反演图像 (图 11b) 表明,以 L 算子为正则项可大致反演出云液水分布,但是中心位置向中部偏移。我们将这种以 L 算子为正则项按未界模型进行反演的方法称为粗反演方案 (简称粗方案); 将以 S 算子为正则项按已界模型进行反演的方法称为精反演方案 (简称精方案)。

粗方案对其它云型的反演误差分别为 11.3%、9.8%、14.3%、36.7%。反演图像如图 12 所示,对于含有云液水中心的云型, LWC 的中心位置发生偏移;对于水平均匀云和均匀云,呈现虚假层状结构,但是可以大致反演出云液水变化范围:水平均匀云为  $0.06 \sim 0.20 \text{ g/m}^3$ , 均匀云为  $0.04 \sim 0.14 \text{ g/m}^3$ 。这种虚假的层状结构是由于反演区域上下边界以外 LWC 为零的约束以及 L 算子的平滑作用造成的。

比较图 5c、d 和图 12c、d 可知,虽然水平均匀

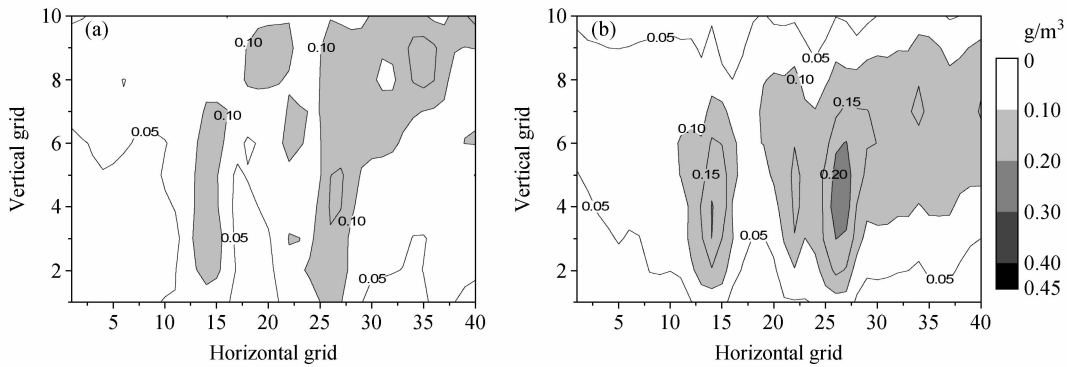


图 11 以 (a) S 算子和 (b) L 算子为正则项对积层混合云的反演图像

Fig. 11 Retrieval images of stratocumulus cloud using operator (a) S and operator (b) L

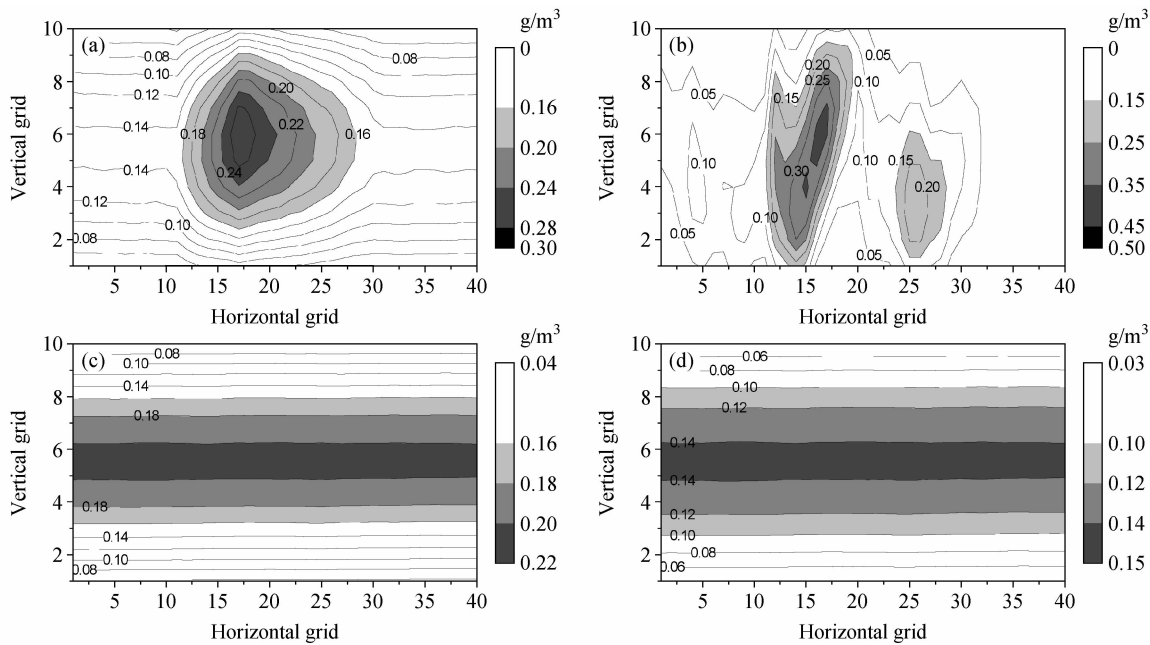


图 12 以 L 算子为正则项的 LWC 反演图像：(a) 单中心云；(b) 多中心云；(c) 水平均匀云；(d) 均匀云

Fig. 12 Retrieval image of LWC using operator L: (a) Weak onion cloud; (b) broken cumulus cloud; (c) horizontally homogeneous cloud; (d) homogeneous cloud

云和均匀云的观测亮温值的时间序列均为水平直线（不计辐射计噪声），但是在已界模型中因受边界因素影响仍可反演出上述两种云型的结构特征，而未界模型中由于侧边界云液水分布未知，因此仅通过水平分布的观测亮温值序列无法确定上述两种云型的结构特征，但是根据亮温值的大小可以大致判断出云液水的变化范围。

以上数值模拟试验结果表明，对于有中心云，粗方案可大致反演出云液水的分布，但是中心位置不准确；对于水平均匀云和均匀云，粗方案可大致反演出云液水的变化范围。

### 3. 2. 2 嵌套反演方法及数值模拟试验

对粗方案的讨论启发我们可以首先通过粗方案获得侧边界 LWC 的大致分布，再用精方案对目标区域进行更加精确的反演，并将精方案中误差水平的估计值取为粗方案中的误差水平，仍然采用 Morozov 偏差原理法确定最优正则参数。我们将上述方法称作嵌套反演方法。以下数值模拟试验将比较 2 个扫描角度和 7 个扫描角度的反演结果，其中 7 个扫描角度的反演结果未经滤波处理。

(1) 以单中心云为目标区域构造不同侧边界云液水分布 考虑到粗方案的反演特点，我们以单中

心云为目标区域,令侧边界云液水分布分别为多中心、水平均匀和均匀分布,如图 13a、d、g 所示,以下简称为云型 A、D、G。

如表 1 所示,在 2 个投影角度的模拟试验中,反演区域与目标区域的反演误差差别不大。但是反演图像(图 13)表明,与反演区域相比目标区域的 LWC 的中心位置有了明显改进,中心位置较为准确。目标区域反演结果与侧边界精确已知时的反演结果(图 4c)较为接近,可见粗方案的反演精度已经可以为目标区域的反演提供足够的侧边界信息。

表 1 LWC 的反演误差  
Table 1 Retrieval error of LWC

| 云型 | 2 个投影角度反演误差 |       | 7 个投影角度反演误差 |      |
|----|-------------|-------|-------------|------|
|    | 反演区域        | 目标区域  | 反演区域        | 目标区域 |
| A  | 12.8%       | 10.8% | 5.0%        | 7.9% |
| D  | 10.6%       | 11.4% | 10.5%       | 6.5% |
| G  | 11.3%       | 11.2% | 11.1%       | 6.3% |

同样,在 7 个投影角度的模拟试验中,虽然云型 A 的目标区域的反演误差要高于反演区域,但是反演图像(图 14)表明三种云型的目标区域的云液水中心都比反演区域更加清晰、准确,尤其是 D、G 两种云型。

对比 2 个和 7 个投影角度的反演结果可知,对于侧边界区域,增加投影角度个数可以明显改善多中心分布结构的反演精度,各中心的反演图像的形变程度均明显降低;但是对水平均匀和均匀分布结构的反演精度影响甚微。可见对于水平均匀和均匀分布结构而言,增加投影角度并不能提供更多的结构信息。对于目标区域,增加投影角度个数可以明显改善 A、D、G 三种云型的反演精度以及反演图像的形变程度。可见提高投影数据的角度分辨率可以增大精方案的抗差能力,此处所指误差包括观测噪声和侧边界的不确定性两个方面。

(2) 多中心云和积层混合云 考虑到未界模型无法提供水平均匀云和均匀云的结构特征,因此嵌

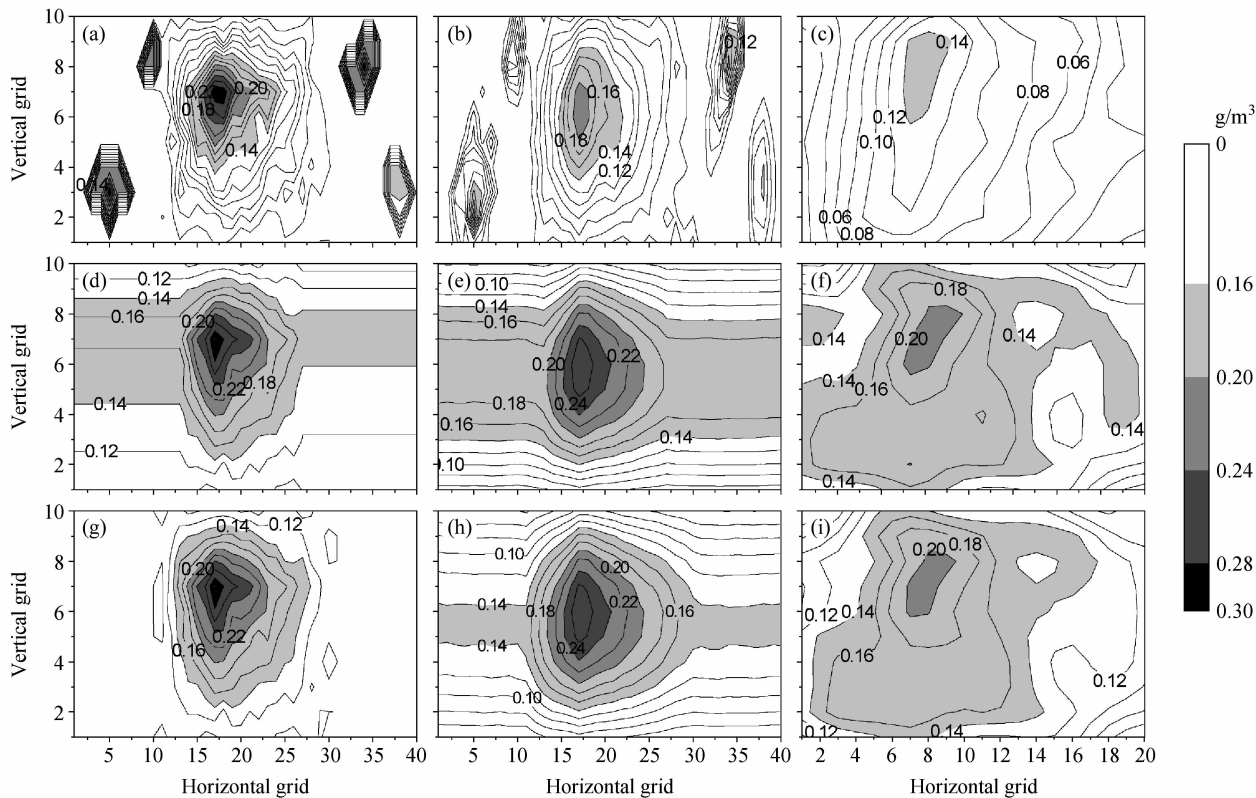


图 13 LWC 的模拟真值(a、d、g)及两个扫描角度时嵌套法反演区域(b、e、h)和目标区域(c、f、i)的反演图像:(a-c)云型 A;(d-f)云型 D;(g-i)云型 G  
Fig. 13 Simulated ‘true values’(a, d, g) and the retrieval images of LWC for their retrieval area (b, e, h) and target area (c, f, i) with two scanning angles using nesting method; (a-c) cloud type A; (d-f) cloud type D; (g-i) cloud type G

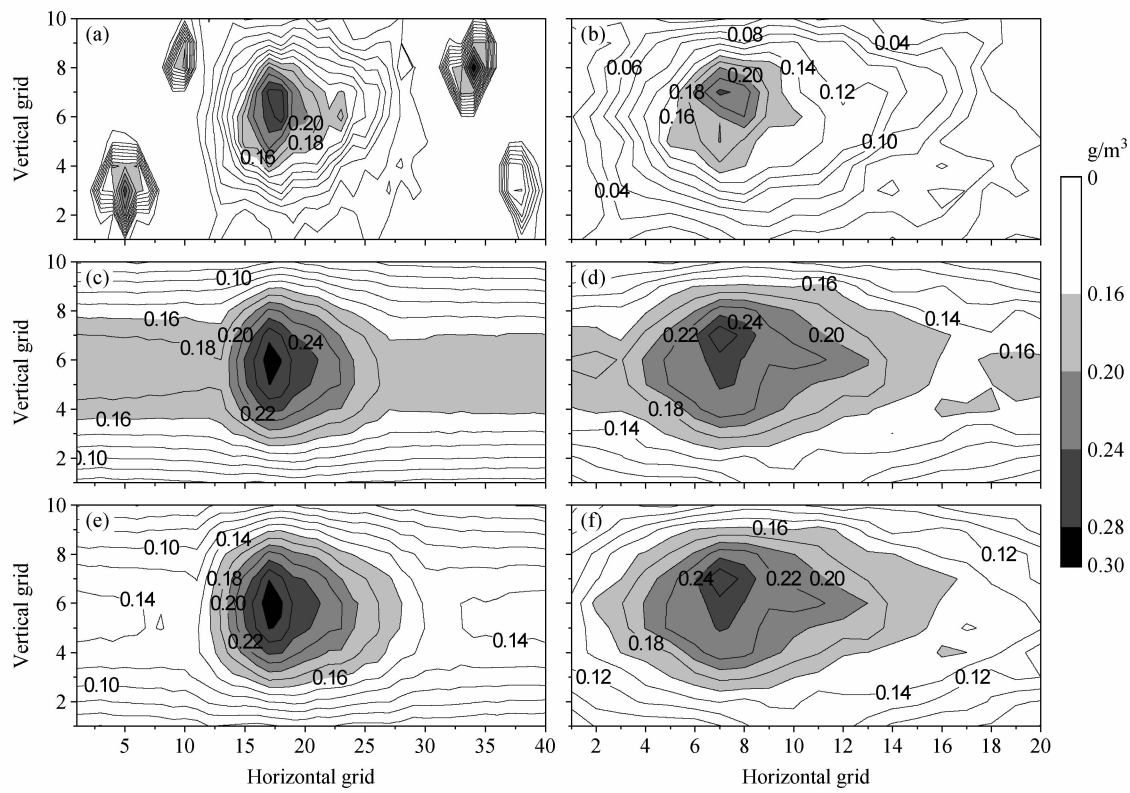


图 14 7 个扫描角度时嵌套法反演区域 (a、c、e) 和目标区域 (b、d、f) 的 LWC 反演图像：(a、b) 云型 A；(c、d) 云型 D；(e、f) 云型 G  
Fig. 14 Retrieval images of LWC for the retrieval area (a, c, e) and the target area (b, d, f) with seven scanning angles using nesting method; (a, b) cloud type A; (c, d) cloud type D; (e, f) cloud type G

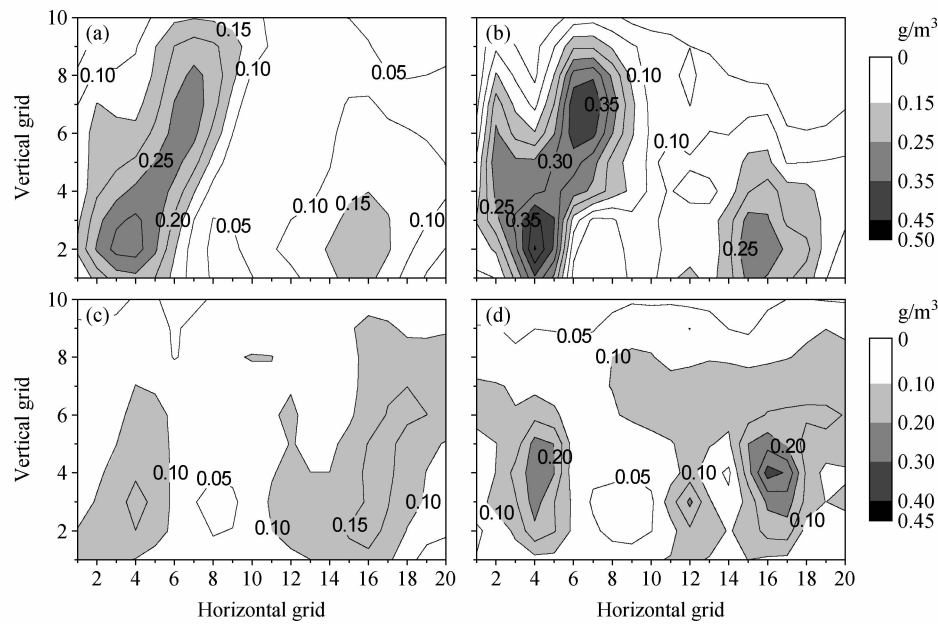


图 15 嵌套法对 (a、b) 多中心云和 (c、d) 积层混合云的 LWC 反演图像：(a、c) 2 个扫描角度；(b、d) 7 个扫描角度  
Fig. 15 Retrieval images of LWC of (a, b) broken cumulus cloud and (c, d) stratocumulus cloud using nesting method; (a, c) Two scanning angles; (b, d) seven scanning angles

套法对这两种云型并不适用。在实际反演时,可通过垂直天线找出云液水中心的水平范围并据此建立目标区域,以避免将这两种云型作为目标区域。以下分别用 2 个投影角度和 7 个投影角度对图 3 所示多中心云和积层混合云进行嵌套反演,2 个投影角度的反演误差分别为 12.8% 和 16.8% (图 15a、c),反演图像的形变较为严重;7 个投影角度的反演误差分别为 5.7% 和 14.2% (图 15b、d),云液水中心判断准确并且图像的形变程度明显降低。

## 4 总结与讨论

本文通过机载双天线微波辐射计的模拟观测数据层析反演出垂直剖面内云液水含量的二维分布。为提高这一有限角度反问题的适定性,本文对已有的正则化方法进行了改进:根据云液水的分布特征选择  $W^{1,2}$  空间范数的离散形式(S 算子)作为正则项;通过数值模拟试验确定双天线仰角角度的最优设置方案为  $(30^\circ, 90^\circ)$ ;对反演结果进行均值滤波处理等。为避免已有方法中对目标函数进行线性化处理而产生的模型误差,采用 L-BFGS-B 算法对非线性目标函数直接求解。

按照侧边界内云液水分布是否已知将反演模型分为已界模型和未界模型。按照已界模型对五种典型云型进行反演,反演误差在 8.6%~12.3% 之间,反演图像可以反映出不同云型的结构特征,但是由于投影角度不足,云液水分布有一定的变形。敏感性试验表明影响反演精度的主要因素为投影数据的角度分辨率、辐射计观测噪声以及侧边界云液水分布的不确定性。受云液水含量、正则算子特性及边界因素的综合影响,不同云型的反演精度存在差异。

为使微波辐射计探测云液水分布能够独立于其它探测手段,本文针对未界模型提出嵌套反演方法:首先以抗差性能较强的 Laplace 算子(L 算子)为正则项按未界模型进行反演(粗方案),获得侧边界 LWC 的大致分布;再以 S 算子为正则项,按照已界模型对目标区域进行更加精确的反演(精方案)。数值模拟试验表明,嵌套反演方法可以为目标区域的反演提供足够的侧边界信息,使目标区域的云液水中心位置明显改进。当投影角度为两个时,目标区域的反演误差为 10.8%~16.8%;当投影角度增加到 7 个时,目标区域的反演误差降为

5.7%~14.2%,反演图像的形变明显降低。

敏感性试验表明,投影角度不足是影响机载平台反演精度的主要原因。一种解决的方法是改进辐射计的天线部分,使之能够灵活地完成多角度的扫描;另一种方法是增加观测频率以弥补扫描角度的不足(Fleming, 1982)。另外,可以增加对氧气和水汽敏感的波段进行联合反演,获得大气温度和水汽含量的更为准确的分布,使本文的反演方法独立于探空资料。我们将在以后的工作中对上述问题进行深入的研究。

应用微波层析技术反演云液水空间分布存在一定的限制条件。首先,只有当云内粒子尺度远小于辐射计工作波长(9.5 mm)时,本文的正演模型才能成立,因此反演对象仅限于非降水云或降水率小于 1 mm/h 的云(Warner and Drake, 1985),并且不含有融化的冰粒子;其次,在对反演区域的扫描过程中云液水分布不能发生明显变化,因此必须在目标云发展较为稳定的阶段快速完成探测;最后,飞机的飞行路线应尽可能为水平直线,以保证扫描射线在同一平面内。我们将在下一步的外场试验中对上述适用条件进行进一步的考察。

**致谢** 本工作得到中国科学院大气物理研究所魏重研究员、沈志来研究员、段晚锁研究员和孙国栋博士的有益指导。同时,两位匿名审稿专家的宝贵建议对本文的改善十分重要,在此一并表示由衷的感谢。

## 参考文献 (References)

- Bobylev L P. 1997. Retrieval of liquid water distribution in convective clouds using microwave computerized tomography [J]. *Geoscience and Remote Sensing*, 2: 830–832
- 陈立成. 1994. 层析成像的数学方法与应用 [M]. 四川: 西南交通大学出版社, 148pp. Chen Licheng. 1994. The Mathematic Method and Application of Tomography (in Chinese) [M]. Sichuan: Southwest Jiaotong University Press, 148pp.
- Drake J F, Warner J. 1988. A theoretical study of the accuracy of tomographic retrieval of cloud liquid with an airborne radiometer [J]. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 5: 844–857.
- Fleming H E. 1982. Satellite remote sensing by the technique of computed tomography [J]. *Appl. Meteor.*, 21: 1538–1549.
- Flores A, Ruffini G, Rius A. 2000. 4D tropospheric tomography using GPS slant wet delays [J]. *Ann. Geophys.*, 18: 223–234.
- 黄光远, 刘小军. 1993. 数学物理反问题 [M]. 山东: 山东科学技术出版社, 386pp. Huang Guangyuan, Liu Xiaojun. 1993. Inverse Problems in Mathematics and Physics (in Chinese) [M]. Shan-

- dong; Shandong Science and Technology Press, 386pp.
- Hoffman R N, Grassotti C, Isaacs R G, et al. 1989. A simulation study of satellite emission computed tomography [J]. *Appl. Meteor.*, 28: 321–342.
- Huang Dong, Liu Yangang, Wiscombe W. 2008a. Determination of cloud liquid water distribution using 3D cloud tomography [J]. *J. Geophys. Res.*, 113, D13201, doi: 10.1029/2007JD009133.
- Huang Dong, Liu Yangang, Wiscombe W. 2008b. Cloud tomography: Role of constraints and a new algorithm [J]. *J. Geophys. Res.*, 113, D23203, doi: 10.1029/2008JD009952.
- 江芳, 魏重, 雷恒池, 等. 2003. 机载微波辐射计测云中液态水含量 (II): 反演方法 [J]. *高原气象*, 23 (1): 33–39. Jiang Fang, Wei Chong, Lei Hengchi, et al. 2003. Measurement of column cloud liquid water content by airborne upward-looking microwave radiometer (II): Retrieval method [J]. *Plateau Meteorology (in Chinese)*, 23 (1): 33–39.
- 金德镇, 雷恒池, 谷淑芳, 等. 2004. 机载微波辐射计测云中液态水含量 [J]. *气象学报*, 62 (6): 868–874. Jin Dezhen, Lei Hengchi, Gu Shufang, et al. 2004. Measurement of column cloud liquid water content by airborne upward-looking microwave radiometer [J]. *Acta Meteorological Sinica (in Chinese)*, 62 (6): 868–874.
- Koldaev A V, Melnichuk Y V, Mironov A F, et al. 1990. The application of aircraft microwave radiometric tomography in weather modification experiments [C]. 20th European Microwave Conference, Budapest, Hungary. 2: 1402–1407.
- Koldaev A V, Melnichuk Y V, Mironov A F, et al. 1992. Remote sensing investigation of cloud liquid water space distribution [C]. Proceedings of the 11th International Conference on Cloud and Precipitation, Montreal Canada. 1: 573–575.
- Twomey S. 1977. Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements [M]. Amsterdam Oxford New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 98–133.
- 温俊海. 1999. 有限角图像重建方法研究 [D]. 西安交通大学博士学位论文, 103pp. Wen Junhai. 1999. The study of methods about limited angle image reconstruction [D]. Ph. D. dissertation (in Chinese), Xi'an Jiaotong University, 103pp.
- 王彦飞. 2007. 反演问题的计算方法及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 370pp. Wang Yanfei. 2007. Computational Methods for Inverse Problems and Their Applications (in Chinese) [M]. Beijing: Higher Education Press, 370pp.
- Warner J, Drake J F. 1985. Determination of cloud liquid water distribution by inversion of radiometric data [J]. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 2: 293–303.
- Wang Yanfei, Fan Shufang, Feng Xue, et al. 2006. Regularized inversion method for retrieval of aerosol particle size distribution function in  $W^{1,2}$  space [J]. *Appl. Opt.*, 45, 7456–7467.
- Wang Yanfei, Yang Changchun, Li Xiaowen. 2008. Regularizing kernel-based BRDF model inversion method for ill-posed land surface parameter retrieval using smoothness constraint [J]. *Journal of Geophysical Research*, 113, D13101.
- 徐张明, 沈荣瀛, 华宏星. 2002. 奇异值分解 (SVD) 和 Tikhonov 正则化方法在振速重建中的应用 [J]. *上海交通大学学报*, 36 (6): 834–838. Xu Zhangming, Shen Rongying, Hua Hongxing. 2002. Vibrating velocity reconstruction using singular value decomposition and Tikhonov regularization method [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University (in Chinese)*, 36 (6): 834–838.
- Zhu Ciyu, Byrd R H, Lu Peihuang, et al. 1997. L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 23 (4): 550–560.