王瑞春, 龚建东, 张林, 等. 2015. 热带风压场平衡特征及其对 GRAPES 系统中同化预报的影响研究 II: 动力与统计混合平衡约束方案的应用 [J]. 大 气科学, 39 (6): 1225–1236. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin, et al. 2015. Tropical balance characteristics between mass and wind fields and their impact on analyses and forecasts in GRAPES system. Part II: Application of linear balance equation-regression hybrid constraint scheme [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 39 (6): 1225–1236, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1412.14234.

热带风压场平衡特征及其对 GRAPES 系统中同化预报 的影响研究 II:动力与统计混合平衡约束方案的应用

王瑞春^{1,2} 龚建东² 张林² 陆慧娟²

1 南京信息工程大学大气科学学院,南京 210044 2 中国气象局数值预报中心,北京 100081

摘 要 研究 I 的结果表明:线性平衡方程(LBE)在热带地区不适用,而进一步改进方向是削弱 LBE 在该区域的约束程度。本文以此为基础,在 GRAPES(global/regional assimilation and prediction system)全球变分同化系统中引入动力与统计混合平衡约束方案。新方案在逐层求解 LBE 的基础上增加垂直方向的线性回归,回归系数随 纬度和高度变化。针对背景误差协方差的分析表明,新方案可以更好的保证独立分析变量间预报误差不相关的基本要求,并大幅度减小热带地区平衡气压预报误差方差的量值和占总方差的比例。单点试验结果表明,与 LBE 方案相比,新方案对中、高纬影响很小,但在热带地区成功实现了风、压场分析的解耦,两者分析更为独立。并 且,虽未考虑具体波动模态,但新方案给出的风、压场协相关结构与研究 I 的理论分析结果相近。一个月的同化 循环与预报结果表明,引入新方案后,赤道外地区的同化预报效果为中性偏正,而热带地区风场的同化预报效果 显著提高,LBE 方案中平流层低层的风场同化预报异常被基本消除。

关键词 变分资料同化 平衡约束 线性平衡方程 线性回归 GRAPES (global/regional assimilation and prediction system)

文章编号 1006-9895(2015)06-1225-12 doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1412.14234 中图分类号 P456

文献标识码 A

Tropical Balance Characteristics between Mass and Wind Fields and Their Impact on Analyses and Forecasts in GRAPES System. Part II: Application of Linear Balance Equation–Regression Hybrid Constraint Scheme

WANG Ruichun^{1, 2}, GONG Jiandong², ZHANG Lin², and LU Huijuan²

School of Atmospheric Science, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044
 Numerical Weather Prediction Center of China Meteorological Administration, Beijing 100081

Abstract The results of Part I of this study show that the imposition of the Linear Balance Equation (LBE) in the tropics is not correct and additional steps should be taken to decouple the analysis of mass and wind fields. Based on the results in Part I, this paper developed a LBE-regression hybrid balance constraint in GRAPES (global/regional assimilation and prediction system) global variational data assimilation system. In the new scheme, after the calculation

作者简介 王瑞春,男,1987年出生,博士研究生,主要从事大气资料同化研究。E-mail: wrenusit@126.com

通讯作者 龚建东, E-mail: gongjd@cma.gov.cn

收稿日期 2014-07-29; 网络预出版日期 2014-12-31

资助项目 公益性行业科研专项 GYHY201106008,中国气象局数值预报(GRAPES)发展专项,江苏省普通高校研究生科研创新计划项目 CXZZ13_0497

of LBE on each level, a vertical regression whose coefficients could vary at different latitudes and model levels was introduced. By analyzing and comparing the implied background error covariance of different schemes, the authors found that the new scheme could efficiently reduce the unreasonable correlations of control variables. Additionally, the forecast error variance of the balanced pressure and its ratio to the whole pressure were also both dramatically reduced in the tropics. Results of the single-observation experiments indicated that, the new scheme had little impacts on the mid- and high-latitude compared to the LBE scheme, but it did successfully decouple the mass/wind analyses in the tropics. Although equatorial wave modes were not explicitly considered in the new scheme, the structure of covariance was consist with the theory analysis results based on those modes in Part I. The results of cycle analysis and forecast experiments in one month showed that, the new scheme could bring slightly positive results in the extratropics and significantly improve the wind analysis and forecast accuracy in the tropics, the abnormally large tropical wind errors in the LBE scheme were dramatically suppressed.

Keywords Variational data assimilation, Balance constraint, Linear balance equation, Linear regression, GRAPES

1 引言

研究 I 的结果表明, GRAPES (global/regional assimilation and prediction system)全球变分资料 同化系统(以下简称 GRAPES-VAR)采用的风、压 场平衡约束——线性平衡方程(Linear Balance Equation,以下简称 LBE)在热带地区并不适用, 会造成虚假平衡(王瑞春等, 2015)。LBE 主要表达 了罗斯贝波模态下的风、压场配置,但该模态在热带区域的短期预报误差中并不占主导,补充考虑其他赤道波动的影响就需要削弱 LBE 对热带风、压场的约束程度,使得两者的分析变得更加独立。作为研究的第 II 部分,本文致力于在 GRAPES-VAR 中引入更加合理的平衡约束方案,对热带虚假平衡问题做针对性修正,以提高该区域的风场分析效果。

热带地区缺少类似中、高纬准地转这样的主导 机制(Holton, 1992),基于自身动力学特征构造平 衡约束的研究进展十分缓慢。目前,这方面研究的 一个主要思路是采用相互正交的赤道波动作为特 征分量构造预报(背景)误差协方差矩阵(**B**矩阵)

(Daley, 1993; Žagar et al., 2004; Körnich and Källén, 2008),也即与研究 I 中构造风、压场协相关的方案 类似。然而,由于在波动权重的确定、误差垂直结 构的设定以及如何与中、高纬衔接等问题上仍不十 分清晰,这些研究仅局限于在正压浅水模型中做一 些理想试验,距离业务应用有很大距离。另一个努 力方向是采用比 LBE 更加复杂的平衡方程,例如非 线性平衡方程。由于考虑了流场曲率的作用,非线 性平衡方程在处理强旋转系统(例如台风)时要更 加精确(Fisher, 2003; 庄照荣等, 2006; 万齐林和薜 纪善, 2007),但由于其仍是基于中、高纬大气运动 的尺度特征简化得到,因而在热带也是不适用的 (Daley, 1991; Barker et al., 2004).

在业务同化系统中,为减小热带风、压场的平衡约束,一个可行方法是采用统计方案。该方案采用线性回归直接统计不同变量间气候态的平衡约束,其引入的最初目标是解决 Lorenz 垂直离散方案下求解温度的欠定问题(Parrish et al., 1997)。Derber and Bouttier (1999)将该方法应用于欧洲中期数值预报中心(ECMWF)变分同化系统时发现,风、压场分析在中、高纬与 LBE 相近,而热带地区两者分析接近独立。由于构造和计算简单,统计方案在业务和研究中得以广泛应用(Berre, 2000; Wu et al., 2002; Huang et al., 2009; Kleist et al., 2009a)。王瑞春等(2012, 2014)在将该方案应用于 GRAPES-VAR的研究中也发现,统计得到的平衡约束在热带地区要远小于 LBE,可以帮助减小虚假平衡问题。

然而, Kleist et al. (2009b)基于 NCEP(National Centers for Environmental Prediction) 变分同化系统 的研究指出,统计得到的平衡约束在中、高纬并不 如 LBE 稳健。此外,统计方案只能考虑线性约束, 无法进一步向非线性扩展。因此,英国气象局和 ECMWF 在其变分同化系统中将平衡方程和统计方 案结合到一起,构造了动力与统计混合平衡约束方 案(以下简称"混合方案")(Lorenc et al., 2000; Fisher, 2003)。混合方案先逐层求解线性或非线性 平衡方程,并在此基础上引入垂直方向的回归统 计。平衡方程的使用保证了约束在中、高纬的稳健 性,并且还可以向非线性平衡方程扩展;而统计模 块的引入可以减小平衡方程不适用地区的虚假平 衡(Barker et al., 2004)。鉴于混合方案具有取长补 短的优势,并有进一步升级的潜力,本文针对 GRAPES-VAR 的改进也选用该方案。

虽然统计方案与混合方案已有不少业务应用

先例,但之前研究主要集中于方案的具体构造以及 业务性能评估上,而对方案减小热带虚假平衡问题 的内在机制缺乏详细讨论。变分同化中,平衡约束 主要是在针对 B 矩阵的物理变换,即独立分析变量 的构造中引入的(Bannister, 2008)。LBE应用于热 带时,其虚假平衡问题对独立分析变量以及 B 矩阵 的构造究竟会产生什么样的不利影响,引入统计模 块后能否避免,目前国内外研究中鲜有这方面的详 细分析。此外,虽然统计方案与混合方案得到的热 带风、压场约束远小于 LBE 给定的值, 但统计过程 中并未细化考虑不同赤道波动的影响,那么其结果 能否与基于赤道波动模态的理论分析相符,也值得 详细对比与分析。针对该问题,Žagar et al. (2004) 做过单个个例的对比,其结果表明 ECMWF 变分系 统的混合方案在对流层高层与波动理论分析结果 较为一致。为科学认识引入统计模块对构造热带平 衡约束的帮助,本文在引入混合方案后,将基于 GRAPES-VAR 对上述两个问题做进一步详细分析。

本文第2节给出混合方案的基本框架以及统计 模块实施的主要技术细节;第3节基于 GRAPES 短 期预报误差样本,分析了混合方案对独立分析变量 以及 *B*矩阵构造的影响;第4节则利用单点理想观 测试验考察了混合方案给定的热带风、压场平衡特 征,并与研究I的理论分析结果作对比;第5节通 过接近业务实际的同化循环与预报试验评估了混 合方案对 GRAPES 同化预报性能的影响;最后第6 节给出结论和讨论。

2 混合方案的引入

2.1 方案设计

GRAPES-VAR 采用增量形式的目标函数,变量 间的平衡约束在物理变换部分引入(庄世宇等, 2005; 薛纪善等,2008)。物理变换是针对 *B*矩阵 的预条件变换之一,通过抽取分析变量间的预报误 差协相关获取一组误差不相关的独立分析变量 (Bannister,2008)。

目前, GRAPES-VAR 的分析变量包括水平风场 (*u*, *v*), 质量场*π*(Exner 函数,也称无量纲气压) 以及比湿 *q*。由于纬向风 *u* 与径向风 *v* 的预报误差 存在高度相关,利用赫姆霍兹速度分解定理将它们 转换为旋转风和散度风,分别用流函数 *ψ* 和势函数 *χ* 表示。此外,本文关于平衡约束的讨论不涉及水 汽,为简化叙述将 GRAPES-VAR 的(动力学)分 析变量记为 $x = [\psi, \chi, \pi]^{T}$ 。为构造独立分析变量, GRAPES-VAR 采用旋转风 ψ 的全量表征大气运动 中的平衡部分,将质量场 π 拆分为与 ψ 相平衡的 π_{b} 以及非平衡的 π_{u} ,并暂不考虑散度风和其它变量间 的相关,也即:

$$\begin{cases} \psi = \psi, \\ \chi = \chi, \\ \pi_{u} = \pi - \pi_{b} = \pi - N\psi, \end{cases}$$
(1)

式中,平衡算子 *N* 表达了旋转风与质量场之间的平衡约束,也即抽取了 $\psi = \pi$ 间的预报误差协相关。 新的独立分析变量可以表示为 $x_u = [\psi, \chi, \pi_u]^T$,同 化框架中假设它们之间不再相关。上述物理变换方案与英国气象局变分系统一致(Lorenc et al., 2000),与 ECMWF 变分系统相比则缺少了散度风 与旋转风、质量场之间的约束(Derber and Bouttier, 1999),不过上述两项均是小量,它们与本研究的 关系将在讨论部分给出。

在现有框架中,GRAPES-VAR 采用线性平衡方程 LBE 求解算子 N(下文将该方案称作"LBE 方案")。目前,LBE 方案在模式面(地形高度追随坐标面)上直接求解 LBE,表达式(具体推导参见薛纪善等,2012)为

$$\pi_{\rm bl} = \frac{1}{c_p \overline{\theta}_{\rm B}} \nabla^{-2} \left[\nabla \cdot \left(f \nabla \psi \right) \right] \,, \qquad (2)$$

式中, c_p 是摩尔定压热容, $\bar{\theta}_{B}$ 是整层平均的背景场 位温,f是科氏参数。为下文比较的方便,这里将 LBE 方案计算得到的 π 的平衡部分记为了 π_{bl} ,相 应的非平衡部分记为 π_{nl} 。

研究 I 的理论分析表明,式(2) 在热带地区并 不适用,与实际情形相比其约束过强,因而会造成 虚假平衡。为克服该问题,并保留 LBE 在中、高纬 稳健的优点,本文引入动力与统计混合平衡约束方 案。混合方案将 N 算子的求解分为两步实施:第一 步是在模式面上利用原有的动力学推导得到的平 衡方程,目前就是式(2) 给出的 LBE,逐层计算 一个初步的平衡气压 π_{b1} ;第二步是利用线性回归统 计得到的系数 R (统计方法在下文给出)对 π_{b1} 的垂 直廓线作加权求和处理,得到最终的平衡气压 π_{b2} , 其在第 p 层上的值为

$$\pi_{b2}(p) = \sum_{k=1}^{K} R(k, p) \pi_{b1}(k), \qquad (3)$$

式中, *K*为总的模式层数。从式(3)的表达可以看出, 混合方案计算每一层上 *π*_{b2}时用到了所有层次

上 π_{bl} 的信息,但权重较大的主要为相邻层次上的 信息(见下文)。混合方案引入后, π 的非平衡部 分也会发生相应改变,被记为 π_{u2} 。

式(3)与式(2)相结合,就构成了变分框架 中混合方案的主要计算公式,其结构十分简明。不 过,混合方案顺利实施的关键在于统计得到一个实 用、稳健的系数*R*。

2.2 系数 R 的统计

统计 *R* 的值需要获取一组短期预报误差样本,与研究 I 一样仍采用 NMC 方法,也即采用模式预报到同一时刻,不同预报时效(48h和24h)的预报场的差值作为短期预报误差的替代样本

(Parrish and Derber, 1992)。样本获取的具体设置 与研究 I 相同,模式水平分辨率为 1°×1°,垂直层 次为 36 层。不过与研究 I 的理论分析工作不同,这 里的系数 R 会在业务系统中被反复调用,需尽可能 减小统计噪音的影响。为此,本文选取一年的 NMC 样本,具体时间段为 2009 年 12 月至 2010 年 11 月。

NMC 方法首先获取的是模式预报变量 u,v,π 的短期预报误差样本,之后将 u,v转换为 ψ ,并进而采用式(2)计算得到 π_{bl} 的误差样本。在剔除 $\pi \pi \pi_{bl}$ 样本中的时间平均后,逐层、逐纬圈建立如下的多元线性回归模型:

$$\pi(p) = \sum_{k=1}^{n} R(k, p) \pi_{b1}(k) + \pi_{u2}(p).$$
(4)

逐层统计是考虑了大气垂直分层对平衡特征的影响,例如研究 I 中不同层次上赤道波动模态的比例 有很大差异;逐纬圈统计是考虑科氏参数随纬度变 化对平衡约束的影响,这对于区分中、高纬和热带 不同的大气运动特征十分关键。

注意到,式(4)的多元回归模型中,预报因 子是K个层次上的 $\pi_{b1}(k)$ 。由于大气具有三维连续 性,临近层次上 π_{b1} 的值一般均比较接近,也即相 邻预报因子的相关系数很大。此时,统计求解会面 临所谓的多重共线性问题,统计结果严重依赖具体 样本,稳健性差(Wilks,2006)。为改善统计结果, 这里与王瑞春等(2014)关于纯粹统计方案的研究 一样,采用 Lorenc et al. (2000)使用的岭回归方法

(Ridge Regression method) 替代经典的多元线性回 归求解式(4)。关于该方法的详细的讨论可参考上 述两者的工作,这里不再展开。下面我们主要分析 统计得到的系数 *R* 的基本特征。

图 1a 给出了在第 13 层上(约为 532 hPa)统

计得到的回归系数随纬度变化的情况。从图中可以 看出,回归系数在南北半球具有较好的对称性。以 北半球为例分析,系数R的一个主要特征是大值区 主要集中在与 13 层相毗邻的几个层次上,也即混 合方案计算得到的 π_{b2} 主要由相邻层次上的 π_{b1} 加 权求和得到,其他层次统计得到的情形与之类似。 另一个主要特征是,从中、高纬向热带地区推进时, R的值逐步减小。中、高纬地区R的数值较大,特 别是在 40°N 北的地区;而从 40°N 逐渐向热带靠近 的过程中,R的数值不断减小,在赤道上已几乎完 全等于零。在该情形下,根据式(3),混合方案在 热带计算得到的 π_{b2} 将远小于 LBE 方案中的 π_{b1} 。

对流层大部分区域的统计结果均与图 1a 相近, 但到平流层低层之后,热带地区的 *R* 值出现较大变 化。图 1b 给出了第 28 层(约为 71 hPa)的统计结 果,其与图 1a 的主要差异是赤道附近的 *R* 出现明 显的负值。根据研究 I,热带地区 70 hPa 上,赤道 罗斯贝波比例最小,Kelvin 波比例大大增加,风、 压场平衡特征由 Kelvin 波主导。LBE 主要表达赤 道罗斯贝模态下的风、压场配置,与Kelvin 波主导 的情形相反,因而统计中系数 *R* 出现明显负值。这 种情形在平流层低层的其他层次上也有所表现,与 研究 I 图 3b 中赤道罗斯贝波比例大幅减小的层次相 对应。

另外,对比图 1 两幅图可以发现,在中、高 纬区域,28 层统计得到 *R* 值要小于 13 层的相应 值,北半球表现得更为明显。说明即使在中、高纬 区域,平流层 LBE 的适用性也要小于对流层中层。 这一现象在多个业务中心关于 *B* 矩阵的统计分析中 均有表现(Ingleby, 2001; Polavarapu et al., 2005), 其具体原因仍有待进一步研究。

至此,我们已经给出了混合方案的基本公式和 系数 R 的离线统计方案。根据 R 随纬度变化的特征 来看,热带地区 LBE 方案求得的 π_{b1}经式(3)之 后会被大幅减小。那么这对独立变量以及 B 矩阵的 构造会产生什么样的影响,下一节将具体分析。

3 混合方案对 B 矩阵构造的影响

本文 2.1 节中已经指出,风、压场的平衡约束 是通过物理变换引入的,该变换将分析变量间的协 相关关系(或称平衡约束)以平衡算子的形式抽取 出来,将它们转换为独立分析变量。理想的独立分 析变量的预报误差间完全独立,不存在交叉协相



图 1 模式 (a) 13 层 (约为 532 hPa) 和 (b) 28 层 (约为 71 hPa) 上根据式 (4) 统计得到的系数 *R* 的结构 (等值线间距 0.02) Fig. 1 Structures of *R* in equation (4) at model levels (a) 13 (approx. 532 hPa) and (b) 28 (approx. 71 hPa), contour intervals are 0.02



图 2 模式 13 层的 GRAPES 短期预报误差样本中不同变量间的相关系数(r)(纬向平均值)

Fig. 2 Zonally averaged correlation coefficients (*r*) between different variables of short-range forecast errors in GRAPES system at model level 13. ψ and π represent original stream function and Exner pressure, respectively; π_{b1} and π_{u1} represent balanced and unbalanced Exner pressure in LBE (linear balance equation) scheme, respectively; π_{b2} and π_{u2} represent balanced and unbalanced Exner pressure in hybrid scheme, respectively

关,但这难以实现。在业务系统中,物理变换的目标是寻找一组预报误差协相关尽可能小的分析变量,并忽略该组变量间剩余的相关,也即假设它们之间相互独立(下文称为"独立性假设")(Parrish and Derber, 1992; Derber and Bouttier, 1999; 朱宗申和胡铭, 2002)。这样的假设显然会带来误差,而如果物理变换抽取的平衡约束关系越合理、全面,其设计的独立分析变量间的误差协相关越小,那么假设带来的误差也就越小。

基于独立性假设, GRAPES-VAR 中分析变量 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\pi}]^{\mathrm{T}}$ 对应的 **B** 矩阵可以用独立分析变量 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}} = [\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{u}}]^{\mathrm{T}}$ 以及平衡算子 N 来表示:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\psi}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\psi})N^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\chi}) & \boldsymbol{0} \\ N\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\psi}) & \boldsymbol{0} & N\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\psi})N^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\pi}_{u}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中, $C(\cdot)$ 表示各独立分析变量的自协方差矩阵, $NC(\psi)$ 和 $C(\psi)N^{T}$ 表示旋转风和质量场间的交叉 协方差矩阵, 而 $NC(\psi)N^{T}$ 表示由旋转风和给定平 衡约束导出的 π_{b} 的自协方差矩阵(记为 $C(\pi_{b})$), 其与 $C(\pi_{u})$ 累加后构成分析变量 π 的自协方差矩阵 (记为 $C(\pi)$)。而根据统计学知识,如果任意拆分 π 为 π_{b} 与 π_{u} 两部分,那么 $C(\pi)$ 应该由三部分组 成: $C(\pi_{b})$ 、 $C(\pi_{u})$ 以及 π_{b} 与 π_{u} 的交叉协方差 $C(\pi_{b},\pi_{u})$ (黄嘉佑,2010)。之所以略去 $C(\pi_{b},\pi_{u})$, 其依据就是独立性假设忽略了 ψ 与 π_{u} 间的相关, 那么由 ψ 线性导出的 π_{b} 与 π_{u} 间也就相互独立, $C(\pi_{b},\pi_{u})$ 自然为零。通过这里的分析可以看出独 立性假设对 B矩阵构造十分重要,因而可以通过比 较该假设成立的好坏分析不同方案的性能。

我们以对流层中层为例,图2给出了短期预报 误差样本中不同变量在北半球13层上的相关系数,

1229

均为纬圈平均值。其中, $r(\psi,\pi)$ 给出的是分析变 $\equiv \psi \, \pi \pi$ 间的相关系数,可以看到其数值很大,需 要采用物理变换将它们转换为独立分析变量。LBE 方案获得的 $r(\psi, \pi_{ul})$ 与 $r(\psi, \pi)$ 相比,中、高纬地 区的相关被成功压制,除极地以外的大部分地区已 接近于零。这说明基于 LBE 的物理变换在中、高纬 是成功的,独立性假设能较好成立。然而,随着纬 度的减小, $r(\psi, \pi_{ul})$ 的绝对值逐渐增大, 在热带地 区已超过 $r(\psi,\pi)$ 相应值,也即获取的独立分析变 量间的相关反而超过了分析变量间的相关。注意 到, $r(\psi, \pi_{ul})$ 的值在赤道上再次接近零值,这并非 说明 LBE 方案在赤道附近变好,而是由于 $r(\psi,\pi)$ 的值在南北半球符号相反,赤道附近的值本身为 零。为进一步说明问题,图 2b 给出了 $r(\pi_{h_1},\pi_{h_1})$ 的 值,它在热带地区一直保持较大的负相关,赤道附 近也是如此。上述情形说明, LBE 方案中独立性假 设在热带地区不成立。

进一步的,考察混合方案中 $r(\psi,\pi_{u2})$ 与 $r(\pi_{b2},\pi_{u2})$ 值。在中、高纬地区,上述值与LBE方 案表现相当(北极附近的绝对值有所减小);而在 热带地区以及副热带地区,它们的绝对值与LBE 方案相比大幅减小,更加接近于零。其原因在于, 在式(4)的多元回归模型中,最小二乘理论要求 预报变量 π 的方差要等于回归估计值 π_{b2} 的方差与 残差 π_{u2} 的方差之和,这也意味着 π_{b2} 与 π_{u2} 间的交 叉协方差必须为零(黄嘉佑,2010)。注意到,图 2b 中 $r(\pi_{b2},\pi_{u2})$ 的值并不完全等于零,这是由于本 文计算中采用岭回归替代了经典回归,方差最小原则有所放松。但总体而言,混合方案的确能更好地 保证独立性假设的成立,热带地区尤为如此。其他 层次的情形与上述分析类似。

那么独立性假设成立好坏对**B**矩阵量值的影响 如何,我们通过对比两个方案统计得到的预报误差 方差予以说明。由于两个方案在中、高纬差异较小, 这里主要关注热带地区。首先对比两个方案统计得 到的 π 平衡部分的预报误差方差(图 3a),它们是 根据同样的₩样本经不同的平衡约束获取。如图, 混合方案 $\pi_{\rm h2}$ 的方差要明显小于LBE方案 $\pi_{\rm h1}$ 的值, 这可与图1中系数R的值在热带地区接近零的情形 相互印证。注意到, $\pi_{\rm bl}$ 的方差在许多层次上已超 过了π样本本身的方差值(黑色空心圈),而如果 将 $\pi_{\rm bl}$ 与 $\pi_{\rm ul}$ 的方差的方差相加,得到 LBE 方案系 统中实际使用的π的误差方差(见式(5)),其值 更要远远大于 NMC 样本值。这种不合理情形出现 的原因在于, $\pi_{\rm hl}$ 和 $\pi_{\rm nl}$ 在热带具有过高的负相关 (见图 2b),两者的交叉协方差(负值)已大到不 可忽略。而混合方案由于引入统计模块, $\pi_{\rm h2}$ 和 $\pi_{\rm n2}$ 几乎不相关,因而两者方差的和恰好等于 NMC 样 本中 π 的方差。进一步的,图 3b 给出了 π 平衡部 分方差占同化系统中实际使用的 π 总方差的比例, 混合方案也要明显小于 LBE 方案。

综上,在热带地区,LBE 方案由于存在虚假平 衡问题,独立性假设不成立;混合方案通过引入统 计模块保证了该假设的成立,系统中实际使用的*π*



图 3 GRAPES 热带预报误差样本中(a) π (空心圈) 和 π 平衡部分(黑色线)的预报误差方差(单位: 10⁻⁷),以及 π 平衡和非平衡部分的方差 和(灰色线)(单位: 10⁻⁷), (b) π 平衡部分方差占同化系统中 π 总方差的比例。上述结果均为热带地区(20°S~20°N)的平均值,其中实线是 LBE 方案的结果,虚线是混合方案的结果

Fig. 3 (a) Averaged forecast error variances of different variables in GRAPES system in the tropics (20°S–20°N) (units: 10^{-7}) and (b) ratio of variances (variance of balanced π / variance of total π used in the assimilation system)

的总方差更真实反映了 NMC 样本应有值, π 平衡部 分方差及其占总方差的比例均明显减小。那么这些变 化对同化系统中的信息传递会产生什么样的影响,下 一节将通过单点理想观测试验做进一步考察。

4 单点理想观测试验

单点理想观测试验是资料同化框架设计中考

察、评估 B 矩阵结构的简单、有效方案。热带地区 观测以质量场观测为主,风场直接观测很少,这里 主要考察给定理想气压观测(均低于背景场1hPa), LBE 方案和混合方案强迫出的 u 风分析增量(分析 场减去背景场)的差异,并将这里的结果与研究 I 的理论分析作对比。

图 4 中理想观测均位于模式 13 层的 180°(经



图 4 理想气压观测(低于背景场1hPa)位于模式13层的180°(经度)时强迫出的同一层上的*u*风分析增量(单位: m s⁻¹): (a)、(c)、(e) LBE 方案; (b)、(d)、(f) 混合方案。纬度: (a、b) 45.5°N; (c、d) 20.5°N; (e、f) 0.5°N

Fig. 4 Analysis increments (units: $m s^{-1}$) of zonal wind at model level 13 generated by a simulated pressure observation that is 1 hPa lower than the background at the same level at 180°, and at (a, b) 45.5°N, (c, d) 20.5°N, (e, f) 0.5°N. (a), (c), (e) The results of the LBE scheme; (b), (d), (f) the results of the hybrid scheme

度),而纬度分别设定为45.5°N、20.5°N和0.5°N。 可以看到,在中、高纬45.5°N处,由于LBE本身 适用性很好,混合方案加入统计模块后对原有的平 衡约束影响很小,两个方案强迫出的 u 风几乎完全 一致。而到了20.5°N,由于LBE适用性己不如中、 高纬,混合方案对原有LBE做了一定程度削弱,强 迫出的 u 风比LBE 方案已有一定程度的减小。再进 一步到赤道上,混合方案强迫出的 u 风已远远小于 LBE 方案,该区域上的风、压场分析接近独立。这 样的结果与第2.2节和第3节对混合方案性能的分 析是相对应的,热带地区原有LBE给定的虚假平衡 约束被大幅削弱。两个方案中,由气压增量导出的 v 风间的差异与 u 风情形相一致。

图 4 中不同纬度上 *u* 风分析增量的差异与 Daley (1996) 采用奇异向量方案削弱 LBE 虚假平 衡的理论研究结果相一致 (见其文中 Fig. 7)。进一 步的,图 4 中单点位于赤道的情形与研究 I 在该区 域的理论分析结果也具有较好的对应关系。LBE 方 案图 4e 的结果与单纯考虑赤道罗斯贝波情景下风、 压场协相关特征 (研究 I 的图 4a)相近,气压 (或 位势高度 *h*)与 *u* 风间存在显著负相关,且纬圈方 向的相关尺度很大。而混合方案图 4f 的结果虽未如 研究 I 考虑所有赤道波动模态后的情形那样,*h*与 *u* 风的相关转为很弱的正值 (研究 I 图的 5b),但协 相关相对于单纯罗斯贝波情形大幅减小至接近于 零的特征是相符的。

与图 4e、4f 一样,图 5 中单点观测也位于 0.5°N, 但其垂直层次移到了第 28 层上,也即由对流层中 层移至了平流层低层。在图 5 中,混合方案强迫出 的 *u* 风也是远小于 LBE 方案。然而,与图 4f 不同的是,图 5b 中强迫出了负的 *u* 风增量。上述情形说明,在赤道平流层低层,混合方案中气压与 *u* 风的协相关为正。这与图 1b 中该区域负的 *R* 值相对应,也与研究 I 中 70 hPa 上 *h* 与 *u* 正的协相关特征相一致(见研究 I 的图 6)。不过,与研究 I 的结果相比,这里给出的正相关偏小,结合图 4f 未能表现弱的正相关,说明不区分具体波动的混合方案可能只部分反映了短期预报误差样本中 Kelvin 波的特征。

综上, 混合方案与 LBE 方案相比, 质量观测信 息向风场传递的基本特征在中、高纬变化很小, 但 热带地区的传递范围和量值均大幅度减小, 风、压 场分析接近独立。上述情形与研究 I 的理论分析结 果具有较好的对应关系, 其对 GRAPES 的同化预报 的影响将在下一节中给出。

5 同化循环与预报试验

5.1 同化结果检验

为综合考察混合方案性能,特别是其对热带风场同化预报的影响,本文设计了接近实际业务的同化循环与预报试验。同化循环时段选取在 2013 年 5 月 1 日 06 时至 31 日 18 时,同化分析场经数字滤波后提供给模式作为预报初始场,模式的 6 h 预报场又提供给同化系统作为下一时次分析的背景场,如此往复循环。预报模式以及同化内、外循环分辨率均为 1°×1°,垂直层次为 36 层。同化中使用的观测资料包括了目前 GRAPES-VAR 能业务使用的大部分常规和非常规观测资料,具体情形见表 1。



Fig. 5 As Figs. 4e and 4f, but for the results at model level 28

No. 6 WANG Ruichun et al. Tropical Balance Characteristics between Mass and Wind Fields and Their Impact on ... 1233

表1 同化循环试验中使用的观测资料种类

Table 1Types of observations assimilated in the analysiscvcle experiments

常规资料	云导风	GNSSRO	AMSUA
地面报	FY-2 系列	COSMIC	NOAA-15
船舶报	GOES 系列	METOP-B/GRAS	NOAA-16
探空报	METOP 系列	CNOFS	NOAA-18
飞机报	NOAA 系列等		METOP-A

首先考察本文期望改善的热带地区的风场分析效果。图6给出了试验时段内,热带地区(20°S~20°N) *u* 风分析的均方根误差和偏差的垂直廓线,均相对 FNL(final)再分析资料检验得到。从图中可以看出,LBE 方案的 *u* 风分析在平流层低层(50 hPa~70 hPa)出现了异常大的分析误差和偏差,这与研究 I给出的 GRAPES 短期误差样本中赤道罗斯贝波占比最小的区域刚好保持一致,LBE 在该区域最不适用。而混合方案通过大幅削弱 LBE 在该区域的虚假平衡,显著改进了 *u* 风分析效果。与之对应,

混合方案对该区域 v 风分析也有明显改进。

LBE 方案之所以在热带平流层低层出现异常 大的风场分析误差,一方面当然与其自身在该区域 的虚假平衡有关。但另一个重要原因也必须指出, 也即 GRAPES 系统自身的气压预报在该区域存有 一定的正偏差。图7给出了第28层(约为71hPa) 上经时间和纬圈平均的气压分析增量(Δp)和 u 风 分析增量(Δu)。可以看到,该区域Δp 为一致的负 值,根据图5a给出的LBE 方案的信息传递机制, 会在赤道附近强迫出很强的正的Δu,使得 u 风分析 的正偏差不断增加。而混合方案中Δp 虽然仍为负 值,但根据图5b 显示的信息传递机制,其强迫出 的Δu 要小得多,且方向还发生了改变,变为负的增 量,这有助于控制该区域风场的正偏差。

热带地区平流低层的模式偏差是 GRAPES 发展过程中的现实问题,而同化系统中不合理的平衡 约束 LBE 使得该问题在同化循环中被不断放大。混



图 6 2013 年 5 月,热带地区 (20°S~20°N) *u* 风分析相对于 FNL 再分析资料的 (a) 均方根误差 (RMSE) 与 (b) 偏差 (Bias) Fig. 6 Analysis verification scores of *u* wind in the tropics (20°S–20°N) for the period of May 2013: (a) RMSE; (b) bias. Analysis results for each experiment were verified against FNL (final) data



图 7 2013 年 5 月,模式 28 层上的 (a) 气压分析增量 (Δp) 和 (b) u 风分析增量 (Δu) 的纬向、时间平均值 Fig. 7 Zonal and time averages of (a) pressure and (b) u wind analysis increments at model level 28 for the period of May 2013



图 8 2013 年 5 月,热带地区 (20°S~20°N) 位势高度分析 (a) 和温度分析 (b) 相对于 FNL 再分析资料的均方根误差 (RMSE) Fig. 8 Analysis (a) geopotential height and (b) temperature RMSE in the tropics (20°S–20°N) for the period of May 2013. Analysis results for each experiment were verified against FNL (final) data

合方案通过给定合理的平衡约束减小了模式偏差 的影响,使得整个 GRAPES 同化预报系统变得更为 稳健、可靠。混合方案在显著改善热带地区风场分 析效果的同时,也部分提高了该区域内高度场和温 度场的分析效果,这可以从图 8 中看出。

与 LBE 方案相比, 混合方案对赤道外地区的同 化分析呈中性偏正的效果, 这可从下文针对预报效 果的检验中一并看出。另外, 值得补充说明的是, 混合方案中的系数 R 是事先离线统计好的, 同化系 统直接使用, 增加统计模块对同化分析的耗时影响 很小, 在多核并行条件下几乎可以忽略。

5.1 预报结果检验

利用上述同化循环得到的分析场,在每天 12 时(UTC)做 72小时预报,进一步检验混合方案 对 GRAPES 预报性能的影响。这里预报效果的检验 也是相对于 FNL 再分析资料进行的,具体指标采用 中国气象局数值预报中心的标准化预报检验工具 GETv1.01 计算得到。

首先检验赤道外地区(20°N~90°N, 20°S~ 90°S)的情形,表2给出了两个方案的72h预报场 在对流层中层(500 hPa)和高层(100 hPa)常用 检验指标上的对比。为方便比较,表2给出的是混 合方案的相对提高率,对于距平相关(Anomaly Correlation, AC)而言,计算方法是混合方案的评分 减去LBE方案的评分,结果除以LBE方案的评分; 而对于均方根误差(RMSE)而言,计算方法是LBE 方案的值减去混合方案的值,结果除以LBE方案的 值。根据上述计算方式,表中正值表示引入混合方 案后有正效果,负值表示有负效果。从表 2 中可以 看出,混合方案在赤道外区域与 LBE 方案差异很 小,表现为略微偏正的效果,这与前文讨论的 LBE 本身在中、高纬适用性较好,引入统计模块后对其 修正很小的结论相一致。

表 2 赤道外地区 (20°N~90°N, 20°S~90°S) 72 h 预报场 中, 混合方案与 LBE 方案相比, 距平相关 (AC) 的相对提 高率以及 RMSE 的相对减小率

Table 2 Rate of AC (anomaly correlation) scores increase and RMSE decrease in hybrid scheme compared to LBE scheme for 72-h forecasts in the extratropics (20°N–90°N, 20°S–90°S)

	AC 的相对提高率或 RMSE 的相对减小率	
评分指标	500 hPa	100 hPa
位势高度(h) AC	0.22%	/
位势高度(h) RMSE	1.64%	-1.82%
温度(T)RMSE	0.66%	1.17%
纬向风(u) RMSE	0.58%	1.17%

对于热带地区风场而言,经 72 h 预报之后,混 合方案较 LBE 方案仍有明显改进,这可以从表 3 看出。与图 6 针对分析结果的检验相一致,混合方 案对高层风场的改进大于低层,平流层低层的改进 尤为明显。在出现分析异常的 50 hPa 上,混合方案 中 *u*风 72 h 预报场的均方根误差要比 LBE 方案小 一半以上,*v*风相应值也大幅减小,LBE 方案中虚 假平衡造成的同化预报异常被基本消除。 表 3 赤道地区(20°S~20°N)72 h 预报场中,与 LBE 方 案相比,混合方案风场 RMSE 的相对减小率

Table 3Rate of RMSE decrease in hybrid schemecompared to LBE scheme for 72-h forecasts in the tropics(20°S-20°N)

评分指标	RMSE 的相对减小率		
	500 hPa	100 hPa	50 hPa
纬向风 (u) RMSE	2.54%	31.89%	54.47%
经向风 (v) RMSE	0.07%	8.38%	21.02%

6 结论与讨论

针对线性平衡方程 LBE 作为风、压场平衡约束 在热带应用时出现的虚假平衡问题,本文在 GRAPES-VAR 中引入了动力与统计混合平衡约束 方案,以改善热带地区风场的分析效果。混合方案 分为两步来实施:第一步利用 LBE 根据流函数 ψ 逐 层计算初步的平衡气压 π_{b1} ;第二步利用逐层、逐纬 圈统计得到的系数 R 对 π_{b1} 的垂直廓线做加权处理, 以得到最终平衡气压 π_{b2} 。统计样本采用 NMC 方法 获得,样本长度达到一年,回归方案采用岭回归技 术。通过样本统计与数值试验,主要得到以下结论:

(1)根据统计得到的系数 *R*,混合方案求得的 *π*_{b2}主要由与其相邻几层的 *π*_{b1}加权求和得到,相距 较远层次上的权重很小。而从 *R*在不同纬度上的变 化来看,热带地区的值与中、高纬相比大幅度减小, 在对流层中层其数值接近于零,而在平流层低层转 为负值。上述情形表明,在热带地区,混合方案第 一步采用 LBE 引入的虚假平衡会在第二步的统计 模块被大大削弱。

(2) 变分同化中 *B* 矩阵构造的一个基本假设是: 独立分析变量间的预报误差不相关。LBE 方案在 中、高纬能较好的保证假设的成立,但其在热带获 得的独立分析变量高度相关,假设完全不成立。混 合方案通过引入统计模块,减小了 LBE 在热带使用 时的虚假平衡,保证了该区域内假设的成立。这样 的差异使得,混合方案在热带地区实际使用的π的 总方差更真实的反映了 NMC 样本应有情形, π平 衡部分方差及其占总方差的比例都要明显减小。

(3)单点理想观测试验的结果表明,与 LBE 方案相比,混合方案对中、高纬风、压场协相关修 正很小,但大幅减小了热带地区风、压场的约束程 度,两者分析接近独立。这一结果与研究 I 中基于 赤道波动模态的理论分析结果相匹配。尤其是在平 流层低层,新方案能部分反映该区域风、压场协相 关由 Kelvin 波主导的特征。

(4) 2013 年 5 月的同化循环与 72 h 预报试验 结果表明,混合方案在赤道外地区呈中性偏正效 果;而在热带地区,混合方案通过减小虚假平衡, 避免了质量观测信息向风场分析的不合理传播,提 高了同化系统的稳健程度,进而显著改善了该区域 内风场的同化预报效果,平流层低层的效果最为显 著,LBE 方案在该区域的同化预报异常被基本消除。

在本文撰写期间, 混合方案由于整体性能较 优,已被 GRAPES 平行试验系统选为平衡约束的首 选方案。不过本文研究主要针对现有 N 算子进行了 优化,未涉及散度风与旋转风以及散度风和质量场 间的平衡约束算子(分别记为 M 和 L)。关于 M 算 子对 GRAPES-VAR 的影响,我们已做初步研究, 它的作用主要集中于中、高纬边界层上,对热带地 区的分析影响很小(王瑞春等,2012)。而对于 L 算子, Derber and Bouttier (1999)研究表明它对热 带地区同化分析具有一定影响,但 Chen et al. (2013) 的工作表明,引入 L 算子对 WRF 在热带地区的预 报效果影响很小。后续工作中将研究和评估 L 算子 对 GRAPES-VAR 同化预报的影响。

最后,从本研究工作中可以看出,热带地区风、 压场间的联系要远小于中、高纬。这也意味着,热带 地区的风场分析难以从大量卫星质量观测中获取有 用信息。为根本改善该区域风场分析就需要进一步挖 掘云导风的潜力,并高度关注有关国际组织的星载多 普勒雷达直接测风计划(Riishojgaard et al., 2012)。

致谢 感谢中国气象局数值预报中心各位专家老师给予本研究的指导和 帮助,感谢两位匿名审稿专家和编辑老师对文章提出的宝贵意见。

参考文献(References)

- Bannister R N. 2008. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. II: Modelling the forecast error covariance statistics [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 134 (637): 1971– 1996.
- Barker D M, Huang W, Guo Y R, et al. 2004. A three-dimensional variational data assimilation system for MM5: Implementation and initial results [J]. Mon. Wea. Rev., 132 (4): 897–914.
- Berre L. 2000. Estimation of synoptic and mesoscale forecast error covariances in a limited-area model [J]. Mon. Wea. Rev., 128 (3): 644–667.
- Chen Y D, Rizvi S R H, Huang X Y, et al. 2013. Balance characteristics of multivariate background error covariances and their impact on analyses and forecasts in tropical and Arctic regions [J]. Meteor. Atmos. Phys., 121 (1–2): 79–98.
- Daley R. 1991. Atmospheric Data Analysis [M]. Cambridge: Cambridge

University Press, 457pp.

- Daley R. 1993. Atmospheric data assimilation on the equatorial beta plane [J]. Atmos.-Ocean, 31 (4): 421–450.
- Daley R. 1996. Generation of global multivariate error covariances by singular-value decomposition of the linear balance equation [J]. Mon. Wea. Rev., 124 (11): 2574–2587.
- Derber J, Bouttier F. 1999. A reformulation of the background error covariance in the ECMWF global data assimilation system [J]. Tellus, 51A (2): 195–221.
- Fisher M. 2003. Background error covariance modeling [C]// ECMWF seminar on recent developments in data assimilation for atmosphere and ocean, 8–12 September 2003, Reading: ECMWF, 45–63.
- Holton J R. 1992. An Introduction to Dynamic Meteorology [M]. 3rd ed. New York: Academic Press, 507pp.
- 黄嘉佑. 2010. 气象统计分析与预报方法 [M]. 第3版. 北京: 气象出版 社, 298pp. Huang Jiayou. 2010. Statistical Analyses and Prediction Methods in Atmospheric Science (in Chinese) [M]. 3rd ed. Beijing: China Meteorological Press, 298pp.
- Huang X, Xiao Q, Barker D M, et al. 2009. Four-dimensional variational data assimilation for WRF: Formulation and preliminary results [J]. Mon. Wea. Rev., 137 (1): 299–314.
- Ingleby N B. 2001. The statistical structure of forecast errors and its representation in the Met. office global 3-D variational data assimilation scheme [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 127 (571): 209–231.
- Kleist D T, Parrish D F, Derber J C, et al. 2009a. Introduction of the GSI into the NCEP global data assimilation system [J]. Wea. Forecasting, 24 (6): 1691–1705.
- Kleist D T, Parrish D F, Derber J C, et al. 2009b. Improving incremental balance in the GSI 3DVAR analysis system [J]. Mon. Wea. Rew., 137 (3): 1046–1060.
- Körnich H, Källén E. 2008. Combining the mid-latitudinal and equatorial mass/wind balance relationships in global data assimilation [J]. Tellus, 60 (2): 261–272.
- Lorenc A C, Ballard S P, Bell R S, et al. 2000. The Met. Office global three-dimensional variational data assimilation scheme [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 126 (570): 2991–3012.
- Parrish D F, Derber J C. 1992. The national meteorological center's spectral statistical interpolation analysis system [J]. Mon. Wea. Rev., 120 (8): 1747–1763.
- Parrish D F, Derber J C, Puser R J, et al. 1997. The NCEP global analysis system: Recent improvements and future plans [J]. J. Meteor. Soc. Japan, 75 (1B): 359–365.
- Polavarapu S, Ren S Z, Rochon Y, et al. 2005. Data assimilation with the Canadian middle atmosphere model [J]. Atmos.-Ocean, 43 (1): 77–100.
- Riishojgaard L P, Ma Z Z, Masutani M, et al. 2012. Observation system simulation experiments for a global wind observing sounder [J]. Geophys. Res. Lett., 39 (17), doi:10.1029/2012GL051814.
- 万齐林, 薛纪善. 2007. 曲率修正线性平衡方程及其在变分同化风压约 束中的应用 [J]. 热带气象学报, 23 (5): 417-423. Wan Qilin, Xue Jishan. 2007. The curvature-modification linear balance equation and its application to the balance between wind and pressure in variational data assimilation [J]. Journal of Tropical Meteorology (in Chinese), 23 (5):

417-423.

- 王瑞春, 龚建东, 张林. 2012. GRAPES变分同化系统中动力平衡约束的 统计求解 [J]. 应用气象学报, 23 (2): 129–138. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin. 2012. Statistical estimation of dynamic balance constraints in GRAPES variational data assimilation system [J]. Journal of Applied Meteorological Science (in Chinese), 23 (2): 129–138.
- 王瑞春, 龚建东, 张林, 等. 2014. 利用整层模式大气统计求解 GRAPES-3DVAR动力平衡约束的数值试验 [J]. 热带气象学报, 30 (4): 633-642. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin, et al. 2014a. Numerical experiments on statistical estimation of dynamic balance constraints in GRAPES-3DVR with whole layers of model atmosphere [J]. Journal of Tropical Meteorology (in Chinese), 30 (4): 633-642.
- 王瑞春, 龚建东, 张林, 等. 2015. 热带风压场平衡特征及其对GRAPES系统中同化预报的影响研究 I:平衡特征分析 [J]. 大气科学, 39 (5): 953–966. Wang Ruichun, Gong Jiandong, Zhang Lin, et al. 2015. Tropical balance characteristics between mass and wind fields and their impact on analyses and forecasts of GRAPES system. Part I: Balance characteristics [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 39 (5): 953–966, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1412.14233.
- Wilks D S. 2006. Statistical Methods in the Atmospheric Sciences [M]. 2nd ed. Burlington: Academic Press, 627pp.
- Wu W, Purser R J, Parrish D F. 2002. Three-dimensional variational analysis with spatially inhomogeneous covariances [J]. Mon. Wea. Rew., 130 (12): 2905–2916.
- 薛纪善, 庄世宇, 朱国富, 等. 2008. GRAPES新一代全球/区域变分同化 系统研究 [J]. 科学通报, 53 (20): 2408–2417. Xue Jishan, Zhuang Shiyu, Zhu Guofu, et al. 2008. A study of GRAPES new generation global/regional variational data assimilation [J]. Chinese Science Bulletin (in Chinese), 53 (20): 2408–2417.
- 薛纪善, 刘艳, 张林, 等. 2012. GRAPES全球三维变分同化系统模式变 量分析版 [R]. 北京: 中国气象局数值预报中心, 105pp. Xue Jishan, Liu Yan, Zhang Lin, et al. 2012. GRAPES-3DVAR Version-GM (in Chinese) [R]. Beijing: Numerical Weather Prediction Center of China Meteorological Administration, 105pp.
- Žagar N, Gustafsson N, Källén E. 2004. Variational data assimilation in the tropics: The impact of a background-error constraint [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 130 (596): 103–125.
- 朱宗申,胡铭. 2002. 一种区域格点三维变分分析方案——基本框架和 初步试验 [J]. 大气科学, 26 (5): 684–694. Zhu Zongshen, Hu Ming.
 2002. A regional grid three-dimensional variational analysis scheme— Basic construction and preliminary tests [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 26 (5): 684–694.
- 庄世宇,薛纪善,朱国富,等. 2005. GRAPES全球三维变分同化系统
 基本设计方案与理想实验 [J]. 大气科学, 29 (6): 872-884.
 Zhuang Shiyu, Xue Jishan, Zhu Guofu, et al. 2005. GRAPES global 3D-Var system—Basic scheme design and single observation test [J].
 Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 29 (6): 872-884.
- 庄照荣, 薛纪善, 朱宗申, 等. 2006. 非线性平衡方案在三维变分同化系 统中的应用 [J]. 气象学报, 64 (2): 137–148. Zhuang Zhaorong, Xue Jishan, Zhu Zongshen, et al. 2006. Application of nonlinear balance scheme in three-dimensional variational data assimilation [J]. Acta Meteorologica Sinica (in Chinese), 62 (2): 137–148.