刘春，李跃凤，宋伟，等. 2019. 北半球西风带准周期性转换的理论分析——初步探讨北极与中纬度及副热带能量相互输送的机制 [J]. 大气科学, 43 (2): 456−466. Liu Chun, Li Yuefeng, Song Wei, et al. 2019. Theoretical analysis of the quasi-periodic conversion of westerlies in the Northern Hemisphere—Preliminary discussion on the mechanism for energy transport between the Arctic and the mid-latitude and the subtropics [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 43 (2): 456−466, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1806.17296.

北半球西风带准周期性转换的理论分析——初步探讨北极与中纬度及副热带能量相互输送的机制

刘春[1, 2, 3] 李跃凤[1] 宋伟[1, 4] 刘自牧[5]

1 中国气象局气象干部培训学院/世界气象组织（WMO）区域培训中心，北京 100081
2 高原与盆地暴雨旱涝灾害四川省重点实验室，成都 610072
3 四川省内江市气象局，四川内江 641000
4 南京信息工程大学，南京 210044
5 四川省气象服务中心，成都 610072

摘 要 本文运用准地转模式，通过等值投影方法，将等值线转换为向量场结构，探讨西风带高低指数周期性转换的机制，结果表明：（1）仅有位能转化所引起的水平涡动输送，可能产生大振幅的行星波，但不会产生西风带的断裂；（2）在波流相互作用下，平均纬向风速与基波波幅满足分岔条件时，会出现西风带断裂现象，即当满足这个分岔条件时，更有利于北极与中纬度及副热带能量的相互输送。如北极冷空气的跨纬度输送会导致东亚极端冷事件的发生；同时，也能维持西风带的高低指数循环。

关键词 Rossby 波 西风带高低指数周期性转换 水平涡动输送 分岔 西风带断裂
文章编号 1006-9895(2019)02-0456-11 **中图分类号** P434 **文献标识码** A
doi:10.3878/j.issn.1006-9895.1806.17296

Theoretical Analysis of the Quasi-periodic Conversion of Westerlies in the Northern Hemisphere—Preliminary Discussion on the Mechanism for Energy Transport between the Arctic and the Mid-latitudes and the Subtropics

LIU Chun[1, 2, 3], LI Yuefeng[1], SONG Wei[1, 4], and LIU Zimu[5]

1 *China Meteorological Administration Training Center*, *World Meteorological Organization* (*WMO*) *Regional Training Center*, *Beijing* 100081
2 *Heavy Rain and Drought–Flood Disasters in Plateau and Basin Key Laboratory of Sichuan Province*, *Chengdu* 610072
3 *Neijiang Meteorological Bureau*, *Neijiang*, *Sichuan Province* 641000
4 *Nanjing University of Information Science & Technology*, *Nanjing* 210044
5 *Sichuan Meteorological Service Center*, *Chengdu* 610072

Abstract In this paper, a quasi-geostrophic model is used to convert contour lines into vector field structure by the

收稿日期 2017-12-06；**网络预出版日期** 2018-07-02
作者简介 刘春，男，1981 年出生，高级工程师，主要从事气候预测和气象服务。E-mail: liuchunfh@126.com
通讯作者 李跃凤，E-mail: liyf@cma.gov.cn
资助项目 国家自然科学资金项目41675095、41730959
Funded by National Natural Science Foundation of China (Grants 41675095, 41730959)

equivalent projection. The results show that: (1) Horizontal vortex transmission caused by potential energy conversion may generate planetary waves with large amplitude, but it will not break the westerlies; (2) the fracture of the westerlies will occur when the average zonal wind velocity and wave amplitude meet the bifurcation condition under the wave flow interaction. Namely, it is more conducive to the mutual transmission of energy between the Arctic and the middle latitudes and the subtropics when this bifurcation condition is satisfied. For example, the translatitudinal transportation of Arctic cold air leads to the extreme cold events over East Asia. At the same time, it can maintain the high and low index cycle of the westerlies.

Keywords Rossby wave, Quasi-periodical conversion between high and low index of westerlies, Horizontal vortex transmission, Bifurcation, Fracture of the westerlies

1 引言

1990 年代以来，北半球冬季许多地区如美国、中国和欧洲等地都频繁出现了极端严寒的天气与气候，并伴随着强烈的风暴与暴风雪以及破纪录的冰冻雨雪事件。一些研究表明，北极增暖使得北极与中纬度地区间的厚度梯度和温度梯度减小，导致中高纬地区冬季西风急流减弱，大尺度行星波发展，经向活动增强，有利于北极地区冷空气向南侵袭，引发中纬度地区低温事件出现（Francis et al., 2009; Overland and Wang, 2010; Francis and Vavrus, 2012; Ding et al., 2014, 2017）。在西风急流低层，冬季西风急流减弱到一定程度，将出现断裂现象。而这种断裂的情形，从几何意义上来说，是发生了分岔现象，表征着西风带结构发生了变化。

1939 年，Rossby 首先提出了西风带环流指数的概念；之后 Namias（1950）就实际天气过程概述了西风带高低指数的循环过程。大气西风带环流低指数状态是纬向气流弱，行星波振幅大；而西风带环流高指数状态是纬向气流强，行星波振幅小，实际大气中西风带高低指数循环约为 2～6 周的时间（Charney and DeVore，1979；金飞飞和朱抱真，1986a）。国际上很多学者（Lorenz，1972; Hoskin and Hollingsworth, 1973; Gill, 1974; Deininger, 1982; Simmons et al., 1983）对西风环流的形成开展了卓有成效的研究，尤其是有限振幅波的发现，突破了以往小扰动线性理论的束缚，为西风环流不稳定发展的研究奠定了基础。叶笃正等（1958）将经向环流建立的动力原因归结为斜压不稳定。曾庆存等（1979）认为纬向环流的建立过程是大气的旋转适应过程。这些结果均对理解西风环流变化的本质具有重要意义，然而，对于西风带高低指数环流之间的转换过程，目前研究的还不是很多。

关于西风带高低指数循环的研究，Charney and DeVore（1979）把准地转 β 平面近似的正压模式的双稳态与大气中高低西风带指数联系起来，并且指出地形和热力强迫波引起的一类低指数达到稳定平衡态是大气阻塞现象的原因。Charney and Straus（1980）发现，在斜压模式中，高指数的平衡态是不稳定的，只有一类低指数的平衡态是稳定的。他们还通过数值计算发现，可以用平衡态不稳定来解释移动性行星波构成周期性振荡的过程。然而，他们并未研究高低指数平衡态之间的转换。Mitchell and Dutton（1981）指出在正压强迫模式中平衡态不稳定的周期解是一种恒幅行波，从而得到了一种最简单的振荡，并发现了一类既有定常的强迫运动，又有移动性的自由波运动的混合型环流，可以表示持续性准定常的阻塞形势。金飞飞和朱抱真（1986b）利用两层准地转低阶模式研究了强迫波、自由波与纬向气流的共振作用，解释了高低指数特征流型的维持和转换。这些结果从动力学的角度解释了西风带高低指数的维持和转换，为后来的数值模拟奠定了理论基础。

然而，以上这些研究更多的是关于截断模式中涡度系数随时间变化的稳定性。虽然涡度系数的稳定性对流型的转换有重要作用，但西风带高低指数环流之间的相互转换，实际上是环流在空间结构上的变化，因此，还需在分析涡度系数随时间变化的稳定性的基础上，进一步将涡度系数与表征流型的基函数结合起来，讨论流型的空间结构变化，以及涡度系数的稳定性对空间结构的影响。为此，将气象上常用的等值线通过切线的方式，转化为二维空间上的向量方程，探讨流型等值线的结构变化，获得与等值线分析方法一致的结果，并能将数值模拟和动力分析紧密的结合在一起。这一方法，目前在气象上仍鲜见应用。

对于影响流型转换机制的因子，除了地球自转引起的纬向环流以外，由 β 效应引起的经向风速切

变带来的切变动量的传递，南北温度梯度引起位能转换的动量水平涡动输送是影响西风带变化的主要因素（王为德，1983）。为了研究在维持西风带高低指数循环的过程中，大气内部所应具有的动力作用，直接采用三角函数来表示水平涡动输送，而不讨论位能的转换及地形、热源等外源强迫的作用。流型转换过程中，当大气西风带处于低指数状态时，纬向气流弱，往往容易产生纬向环流断裂的情况（王为德，1983；罗德海，2001）。分析发现，只有扰动是不会出现纬向环流断裂现象。为此，需进一步分析波流相互作用对这一异常现象的影响。而大气环流带断裂的现象，从几何的角度上看，是由于大气的空间结构发生了变化，这种变化往往伴随着分岔现象（朱抱真等，1991），为此，本文将采用分岔的方法来研究纬向环流断裂这种异常现象。本文首先利用准地转正压涡度方程，得到正压模式流函数的等值线和向量形式，再结合涡度系数周期性变化，研究西风带流函数的空间结构变化，然后分析波流相互作用对纬向环流断裂的影响。最后给出本文的主要结论，并对这些结论可能存在的异议进行了讨论。

2 方法

由于球坐标系中方程的形式复杂，因此，除了考虑全球范围内的大气运动时必须采用球坐标系外，通常都采用局地直角坐标系（吕美仲等，2004）。由于本研究集中在北半球西风带，为此，文章采用局地直角坐标系下的无热源和无地形的 β 平面近似的准地转正压涡度方程（Hoskins and Hollingsworth，1973）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}+J(\psi,\nabla^2\psi)=0, \qquad (1)$$

来分析北极与中纬度及副热带能量相互输送的机制，其中，ψ 为准地转流函数，表征北半球西风环流，$\beta=\partial f/\partial y$，$f$ 为 Coriolis 系数，x 和 y 分别表示经度和纬度，J 为 Jacobi 算子：

$$J(\psi,\nabla^2\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}, \qquad (2)$$

而 ψ 可表示为基本流 $\bar{\psi}$ 上叠加一个小扰动 ψ'：

$$\psi=\bar{\psi}+\psi'. \qquad (3)$$

同时，Hoskins and Hollingsworth（1973）认为，大气环流基本流是纬向不均匀的 Rossby 波。为此，将基本流 $\bar{\psi}$ 看作是一维 Rossby 波形式：

$$\bar{\psi}=-Uy+A\sin k_0(x-ct), \qquad (4)$$

其中，U 为平均纬向风速，$-Uy$ 表示平均纬向气流，$A\sin(k_0x-ct)$ 表示基波，基波是由经向风速切变带来的切变动量传递而形成，A 为基波振幅，k_0 和 c 分别为基波波数和基波相速度。将公式（3）和（4）式带入公式（1），则 ψ' 满足下列线性方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi'+U\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial x}+\beta\frac{\partial\psi'}{\partial x}+k_0A\cos k_0(x-ct)\left(\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial y}+k_0^2\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)=0. \qquad (5)$$

由于基本流 $\bar{\psi}$ 在以 c 速度移动的坐标系中是定常的，因此相当于讨论一个移动性平面行星波的运动问题，即可忽略其移动过程中的时间变量。为此，作变换：

$$x'=x-ct. \qquad (6)$$

在新坐标系下，将基本流 $\bar{\psi}$ 方程（4）带入到方程（1）中，得到：$U=\beta/k_0^2$。为此，公式（5）简化为（为了简单，仍将 x' 写为 x）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi'+\left(\frac{\beta}{k_0^2}\frac{\partial}{\partial x}+k_0A\cos(k_0x)\frac{\partial}{\partial y}\right)(\nabla^2\psi'+k_0^2\psi')=0. \qquad (7)$$

方程（7）不容易求得精确解，采用如下方式对其近似计算：对函数 $\psi'(x,y,t)$，按某种完备正交函数族展开成关于空间变量的无穷级数的形式，其系数仅为时间变量的函数，取级数的有限项来近似表示 $\psi'(x,y,t)$，从而将描写方程（7）变为描述 N 个一元函数的常微分方程组，这种近似方法称为 Glerkin 截断（Charney and DeVore，1979；金飞飞和朱抱真，1986）。本文采用三角函数作完备正交函数族，即上述扰动方程的波解为以下形式：

$$\nabla^2\psi'=\psi'_B\cos l_1y+\psi'_C\sin l_1y\sin(k_0x+\theta), \qquad (8)$$

其中，涡度系数 ψ'_B 和 ψ'_C 只是时间的函数，并假定扰动流的初始位相 $\theta=\pi/2$。由于 $\cos l_1y$ 和 $\sin l_1y\sin(k_0x+\theta)$ 是 Laplace 方程 $\nabla^2\xi=-\rho_n\xi$（n=1, 2, 3, …, ξ 为二阶可微函数）所对应特征值 $\rho_1=l_1^2$，$\rho_2=l_1^2+k_0^2$ 的特征函数，利用公式（8），得到相应的扰动流函数：

$$\psi'=\frac{\psi'_B}{l_1^2}\cos l_1y+\frac{\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\sin l_1y\cos k_0x, \qquad (9)$$

其中，公式右侧第一项为对平均纬向气流的纬向不均匀扰动；公式右侧第二项为经向扰动，表征动量的水平涡动输送，由经圈环流引起的位能转换得到（王为德，1983）。

将公式（4）和（9）带入到公式（3）中，则有正压模式西风流函数表达式：

$$\psi = -Uy + A\sin k_0 x + \frac{\psi'_B}{l_1^2}\cos l_1 y + \frac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\sin l_1 y \cos k_0 x. \tag{10}$$

下面，将利用公式（10），分析平均纬向气流 $-Uy$ 和基波 $A\sin k_0 x$ 对西风带指数循环的影响。上述方法中，使用了多个假设，其使用理由及可能存在的问题见表 1。

表 1　本文使用的假设条件的理由及可能存在的问题

Table 1　Reasons for the assumptions and possible problems used in this article

使用的假设	使用的理由	可能存在的问题
无外源强迫	本文主要研究大气环流内部自身作用和结构及其变化特征。	与实际大气环流存在差异。实际外源强迫包括：湍流感热、潜热加热和地形强迫等，但对于本文考虑的中纬度大尺度运动而言，这些强迫相对较小（吕美仲等，2004）。
β 平面近似	对大尺度运动来说，要考虑地球曲率的影响，为了既使用直角坐标系，又把 Coriolis 参数 f 随纬度的变化考虑在内，通常选取 y 轴与经圈相切，f 随纬度的变化近似用 f 随 y 的变化来表达（朱抱真等，1991），这样既使用直角坐标平面又能在 β 平面上比较合理地描述 Coriolis 参数的线性变化。	由于地球曲率的存在，使得直角坐标与地球参照系存在差异，尤其是在高纬度地球，这种差异更为明显。但是本文主要涉及西风带（主要在中纬度），近似程度还比较好（刘式适等，1996）。
Glerkin 截断假设	由于 Laplace 方程特征函数是完备正交的，故流函数可展开为关于 Laplace 方程特征函数的级数，合理地取级数的有限项（大项）即可逼近该流函数。	Glerkin 截断过程中，取不同的特征函数组合，模拟的大气环流结构存在一定的差异，但这种差异不大，能够反映大气环流的基本特征（朱抱真等，1991）。

3　流函数等值线的向量形式

为了分析平均纬向气流 $-Uy$ 和基波 $A\sin k_0 x$ 对西风带指数循环的影响，我们需要分析流函数 $\psi(x,y)$ 的结构。但是，在实际应用中，往往采用等值投影[将二元函数 $F=\psi(x,y)$ 投影到 $F=F_0$ 平面，使曲面 $F=\psi(x,y)$ 转换为等值曲线 $\psi(x,y)=F_0$]的方法将二元函数的流函数投影到 x–y 平面上（刘式达和刘式适，2011），用等值线来描述流函数的结构[由于本文所采用的坐标系是局地直角坐标系，为此，没有使用地图投影，而是将流函数 $\psi(x,y)$（曲面）通过等值投影方法，投影为 x–y 平面上的曲线（等值线）]。为此，利用等值投影的方法，将西风带流函数公式（10）写为等直线簇的形式：

$$\psi \equiv -Uy + A\sin k_0 x + \frac{\psi'_B}{l_1^2}\cos l_1 y + \frac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\sin l_1 y \cos k_0 x = \psi_0, \tag{11}$$

其中，ψ_0 为常数。虽然等值线可以直观地表示环流的几何结构，但不便于分析环流结构的变化，需转化为向量形式进行讨论。为此，对方程（11）两边微分：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0. \tag{12}$$

由于 ψ'_B 和 ψ'_C 以及位相 θ 只是时间的函数，结合公式（11）和（12），等值线上任何一点的切线满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{(\psi)_x}{(\psi)_y} = -\frac{Ak_0\cos k_0 x - k_0\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\sin l_1 y \sin k_0 x}{-U - \dfrac{\psi'_B}{l_1}\sin l_1 y + l_1\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\cos l_1 y \cos k_0 x}. \tag{13}$$

由于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u = -\partial\psi/\partial y$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = v = \partial\psi/\partial x$，所以，利用（13）式，可以得到流函数等值线的向量形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = U + \dfrac{\psi'_B}{l_1}\sin l_1 y - l_1\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\cos l_1 y \cos k_0 x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ak_0\cos k_0 x - k_0\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\sin l_1 y \sin k_0 x. \end{cases} \tag{14}$$

方程（14）的第二式除以第一式，为切线方程（13），故二维方程（14）的相轨线可以表示流函数等值线的切线向量。方程（14）的右边各项中，既有时间变量的涡度系数，也有空间变量的三角函数，但二者之间是相互独立的。因此，下面将不同时刻的扰动涡度系数看成参数，分别对基本流满足 $\overline{\psi} \equiv 0$ 和 $\overline{\psi} \neq 0$ 时的情况进行讨论，以此分析平均纬向气流 $-Uy$ 和基波 $A\sin k_0 x$ 在西风带指数循环中所起的作用。

4　基本流 $\overline{\psi} \equiv 0$ 时的西风环流特征

根据上面的分析，本节首先讨论基本流 $\overline{\psi} \equiv 0$ 时的西风环流，即仅有扰动时的流函数。此时，根据流函数等值线的向量形式（14）得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\psi'_B}{l_1}\sin l_1 y - l_1\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\cos l_1 y \cos k_0 x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k_0\dfrac{\psi'_C}{l_1^2 + k_0^2}\sin l_1 y \sin k_0 x. \end{cases} \tag{15}$$

为了研究扰动方程（15）的几何结构，利用微分方程的稳定性来进行分析。首先，求方程（15）的平衡点，令（15）式右边等于零（Charney and DeVore，1979；张锦炎，1981），计算得到对应的平衡点为

$$\left(\frac{m}{2k_0}\pi,\frac{n}{l_1}\pi\right),\ \left(\frac{m}{k_0}\pi,\ \mathrm{arctg}\left(\frac{l_1^2}{l_1^2+k_0^2}\frac{\psi_C'}{\psi_B'}\right)\right).$$

$m=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots,\ \ n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$ （16）

其次，通过分析平衡点处的特征值来获得扰动方程的几何结构。

（I）对于平衡点$\left(\frac{m}{2k_0}\pi,\frac{n}{l_1}\pi\right)$，对应的特征方程为

$$\lambda^2-\left(\frac{l_1k_0}{l_1^2+k_0^2}\psi_C'\right)^2=0,\qquad (17)$$

特征方程有一正一负两实根，此时平衡点为鞍点。

（II）对于平衡点$\left(\frac{m}{k_0}\pi,\mathrm{arctg}\left(\frac{l_1^2}{l_1^2+k_0^2}\frac{\psi_C'}{\psi_B'}\right)\right)$，对应的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{l_1^2k_0^2(\psi_B'^2+\psi_C'^2)}{(l_1^2+k_0^2)^2}\sin^2\vartheta=0,\qquad (18)$$

其中，

$$\vartheta=\mathrm{arctg}\left(\frac{l_1^2}{l_1^2+k_0^2}\frac{\psi_C'}{\psi_B'}\right),\qquad (19)$$

此时，特征方程有一对共轭纯虚根，此时平衡点为中心。从平衡点的表达式可以看出，中心的纵坐标ϑ是随涡度系数而改变的，由于涡度系数ψ_B'和ψ_C'是时间的函数，为此可知扰动流函数的高压中心和低压中心均随时间变化而南北向移动。如果将扰动涡度系数ψ_B'和ψ_C'看成是参数，方程（15）可视为二维的自治动力系统，根据特征方程（17）和（18），无论涡度系数ψ_B'和ψ_C'怎么变化，两个平衡点不会发生分岔，也即环流场的结构不会发生变化。

上面的讨论，是将扰动涡度系数ψ_B'和ψ_C'作为参数进行分析的，但这个参数并不是常数，而是关于时间的变量。为了分析环流的周期性，需分析扰动涡度系数随时间变化的情况。将扰动流函数表达式（9）带入线性方程（7）中，合并同类项，得到如下关于时间的方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\psi_B'}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}k_0l_1g_0A\psi_C',\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\psi_C'}{\mathrm{d}t}=k_0l_1g_1A\psi_B',\end{cases}\qquad (20)$$

其中，

$$g_0=1-\frac{k_0^2}{k_0^2+l_1^2},g_1=1-\frac{k_0^2}{l_1^2},\qquad (21)$$

则方程（20）前两式对应的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{1}{2}l_1^2k_0^2A^2g_0g_1=0.\qquad (22)$$

由于l_1、k_0、A均不为零，而$g_0>0$，由（22）式可知方程（20）的结构由g_1决定。根据公式（21），g_1由l_1、k_0决定，为此，利用l_1、k_0的大小关系，得到扰动涡度系数方程的时间特征：

（I）当$l_1<k_0$时，即$g_1<0$，特征方程（22）具有一正一负两个实根。因此，方程（20）具有鞍点结构，对应的，扰动涡度系数ψ_B'、ψ_C'随时间呈指数性发散，不具有周期性。

（II）当$l_1>k_0$时，即$g_1>0$，特征方程（22）具有一对共轭的纯虚根。因此，方程（20）具有中心结构，对应的，扰动涡度系数ψ_B'、ψ_C'随时间呈周期性振荡。

在实际大气运动中，扰动波数往往是大于基波波数（朱抱真等，1991），即$l_1>k_0$。为此，下面只讨论$l_1>k_0$的情况，此时，方程（20）为第（II）类几何结构，即中心结构。方程（20）的第二式除以第一式，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\psi_C'}{\mathrm{d}\psi_B'}=-\frac{2g_1\psi_B'}{g_0\psi_C'},\qquad (23)$$

可以解得

$$2g_1\psi_B'^2+g_0\psi_C'^2=r_0^2.\qquad (24)$$

其中，r_0为常数。由于$l_1>k_0$，因此，公式（24）表征椭圆簇，用向量的形式描述，即可表示为图 1a。

进一步，对方程（20）的第一式微分，并将第二式代入第一式，得到关于ψ_B'的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_B'}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\psi_B'=0,\qquad (25)$$

其中，

$$\omega^2=\frac{1}{2}l_1^2k_0^2g_0g_1A^2,\qquad (26)$$

ω为方程（25）的频率。从而，求得扰动涡度系数时间方程的解析解：

$$\psi_B'=A_B\sin(\omega t+\phi),\qquad (27)$$

A_B和ϕ分别为扰动涡度系数ψ_B'的振幅和辐角。关于ψ_C'的方程具有与ψ_B'同样形式的解析解（公式略）。从方程（27）可以看出，扰动涡度系数ψ_B'和ψ_C'具有周期形式，不同的初值只改变振幅和位相，并

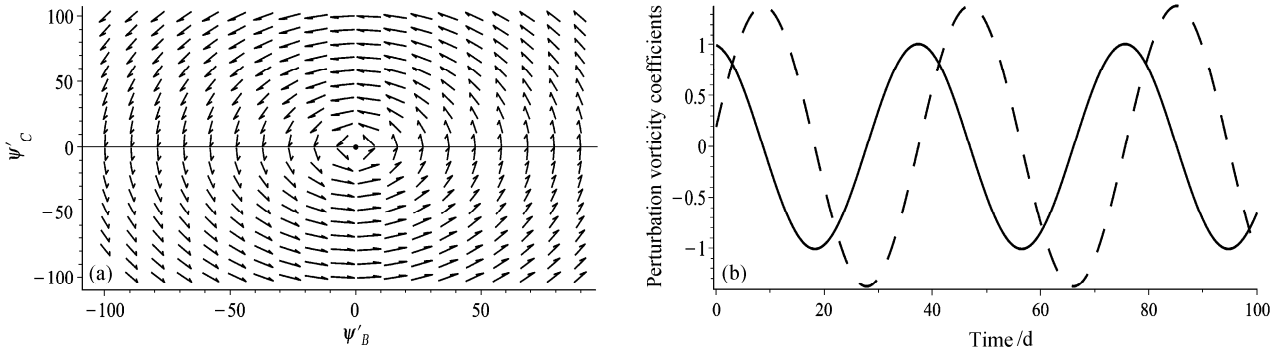

图 1　扰动涡度系数 ψ'_B 和 ψ'_c 的时间结构：（a）相轨线簇；（b）时间序列（实曲线为 ψ'_B，虚曲线为 ψ'_c）

Fig. 1 Time structures of the perturbation vorticity coefficients ψ'_B and ψ'_c: (a) Phase trajectories; (b) time series (solid and dashed curves are for ψ'_B and ψ'_c, respectively)

不改变其周期结构。为此，任意选取 $\psi'_B(0)=1$，$\psi'_C(0)=0.2$ 作为初值[该初始条件主要为了使得第一天的流型呈纬向型，但由特征方程（22）可知，当 $l_1>k_0$ 时，涡度系数方程（20）是稳定的，对初值并不敏感，无论初值为何值，不影响流型周期性变化]，$l_1=3, k_0=2$，时间步长以 d 为单位，根据公式（26）和 $T=2\pi/\omega$，可以计算出扰动流函数 ψ' 的循环周期大约为 37 d 左右。相应的 $\psi'_B(t)$ 和 $\psi'_C(t)$ 时间序列见图 1b，一个周期内扰动环流 ψ' 的空间结构变化见图 2。

在只有扰动流作用下，西风带大气运动主要分两个阶段。在第一阶段，水平涡动输送 $\psi'_C \sin l_1 y \cos k_0 x/(l_1^2+k_0^2)$ 增大而纬向扰动 $\psi'_B \cos l_1 y/l_1^2$ 减小。在南北风切变与东西风切变的共同作用下，初始的纬向西风带（图 2a）上，北缘和南缘开始有涡旋产生（图 2b、c）。这种涡旋结构使得上游的西风动量输送减弱辐散区的西风；而在下游的西风动量输送加强辐合区的西风，使得南北向的环流切变逐渐增大而纬向气流减小（图 2d）。这种流场发展到最大时，将近似为一个个独立的涡旋，此时虽然经向环流比较明显，但没有出现纬向环流断裂（图 2e）。随着时间的增加，大气运动进入第二阶段，水平涡动输送 $\psi'_C \sin l_1 y \cos k_0 x/(l_1^2+k_0^2)$ 增大而纬向扰动 $\psi'_B \cos l_1 y/l_1^2$ 减小。此时，上游弱西风增强而下游的强西风减弱，深厚的槽脊逐渐收缩，南北向的环流切变逐渐减小而纬向气流增大（图 2g、h）。到第 36 天左右，环流恢复为以平直气流为特征的纬向环流，至此完成了一个循环（图 2i、j）。

上述分析揭示：当基本流 $\bar{\psi}$ 恒为零时，无论水平涡动输送多大，纬向流场也不会断裂，即仅有扰动环流，不能描述这类异常环流的特征。为此，如果要描述包含异常情况的西风带高低指数的转换机制，需进一步分析基本流 $\bar{\psi}\neq 0$ 时的空间结构特征。

5　基本流 $\bar{\psi}\neq 0$ 时的西风环流特征

上节讨论了基本流 $\bar{\psi}\equiv 0$ 时的西风环流特征，为了分析基本流在西风环流高低指数转换过程中所起的作用，需要进一步分析基本流 $\bar{\psi}$ 和扰动流函数 ψ' 的相互作用。此时，流函数等值线的向量形式为方程（14）。在这里，由于平均纬向风速 U 与基波振幅 A 均不为零，故平衡点不再简单。为此，本节将直接采用微分方程分岔理论（朱抱真等，1991；高普云，2005 ）进行讨论。对于参数系统：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}), \tag{28}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots x_n)\in R^n$，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2\cdots a_m)\in R^m$，$\boldsymbol{G}=(G_1,G_2\cdots G_n)\in C^\infty(R^n)$，由于实分岔点 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值为零，并且满足平衡态关系，从而，可知方程（28）的分岔点满足如下条件：

$$\begin{cases}\det[J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})]=0,\\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\end{cases} \tag{29}$$

其中，det(A)表示求矩阵 A 的行列式；$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$ 为 Jacobian 矩阵，方程（29）含 $n+1$ 个方程，$n+m$ 个变量。对于方程（14）而言，$\boldsymbol{\alpha}=(A,U)$，$\boldsymbol{G}=(G_1,G_2)$，其中

$$\begin{cases}G_1(x,y)=U+\dfrac{\psi'_B}{l_1}\sin l_1 y-l_1\dfrac{\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\cos l_1 y\cos k_0 x,\\ G_2(x,y)=Ak_0\cos k_0 x-k_0\dfrac{\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\sin l_1 y\sin k_0 x.\end{cases} \tag{30}$$

$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$ 为 Jacobian 矩阵，即

$$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{l_1k_0\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\cos l_1y\sin k_0x & \psi'_B\cos l_1y+\dfrac{l_1^2\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\sin l_1y\cos k_0x\\ -Ak_0^2\sin k_0x-\dfrac{k_0^2\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\sin l_1y\cos k_0x & -\dfrac{l_1k_0\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\cos l_1y\sin k_0x\end{bmatrix}. \quad (31)$$

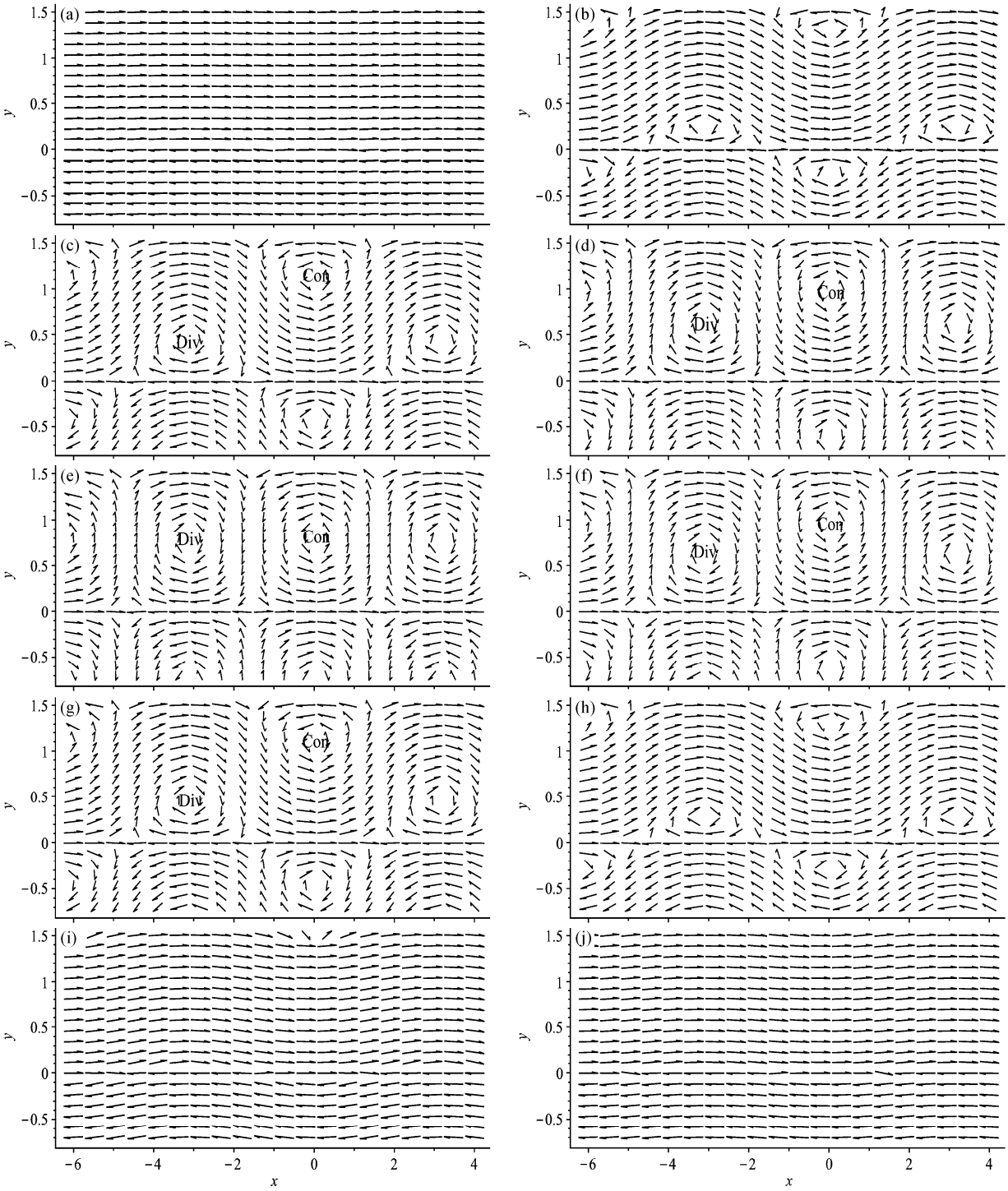

图 2 一个周期内的扰动环流 ψ' 的空间结构变化：（a）第 1 天；（b）第 5 天；（c）第 9 天；（d）第 13 天；（e）第 17 天；（f）第 21 天；（g）第 25 天；（h）第 29 天；（i）第 33 天；（j）第 37 天

Fig. 2 Spatial structures of the perturbed circulation ψ' within a period: (a) The first day; (b) the fifth day; (c) the ninth day; (d) the thirteenth day; (e) the seventeenth day; (f) the twenty-first day; (g) the twenty-fifth day; (h) the twenty-ninth day; (i) the thirty-third day; (j) the thirty-seventh day

根据方程（29），得到关于方程（14）分岔点$(\overline{x},\overline{y})$与参数 U、A 的方程组：

$$\begin{cases} U+\dfrac{\psi'_B}{l_1}\sin l_1\overline{y}-l_1\dfrac{\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\cos l_1\overline{y}\cos k_0\overline{x}=0, \\ Ak_0\cos k_0\overline{x}-k_0\dfrac{\psi'_C}{l_1^2+k_0^2}\sin l_1\overline{y}\sin k_0\overline{x}=0, \\ -\dfrac{(l_1k_0)^2\psi'^2_C}{(l_1^2+k_0^2)^2}\cos^2 l_1\overline{y}\sin^2 k_0\overline{x}+Ak_0^2\psi'_B\sin k_0\overline{x}\cos l_1\overline{y}+ \\ \dfrac{Ak_0^2l_1^2\psi'_C}{2(l_1^2+k_0^2)}\sin l_1\overline{y}\sin 2k_0\overline{x}+\dfrac{k_0^2\psi'_B\psi'_C}{2(l_1^2+k_0^2)}\sin 2l_1\overline{y}\cos\cdot \\ k_0\overline{x}+\dfrac{l_1^2k_0^2\psi'^2_C}{(l_1^2+k_0^2)}\sin^2 l_1\overline{y}\cos^2 k_0\overline{x}=0. \end{cases} \tag{32}$$

公式（32）共有三个方程、四个变量（U, A, $\overline{x}$, $\overline{y}$）。通过消去$\overline{x},\overline{y}$，可以得到关于 A,U 的隐式方程 $F(A,U)=0$。为此，根据隐函数存在定理（张恭庆和林源渠，1987；郭大钧，2001），存在函数 $f\in C(R)$，满足 $U=f(A)$。该函数表达式即为分岔临界条件，由此，可以判定流场断裂的条件。

然而，由于方程（32）是复杂的代数方程组，解出的隐式方程 $F(A,U)=0$ 解析式过于繁冗，因此，采用数值计算方法求解方程（32），获得关于隐式方程 $F(A,U)=0$ 的数值解（图 3）。这里，参数取值仍与前面一致：$l_1=3$，$k_0=2$，$\psi'_B(0)=1$，$\psi'_C(0)=0.2$。

根据图 3，可以看出，在整个 $A-U$ 平面上，存在如下三种情况：(1)在分岔临界线 $U=f(A)$ 上，即会出现西风带断裂；（2）在分岔临界线以上的区域，即 $U>f(A)$ 处，方程（10）是稳定的，没有分岔点，则不会出现西风带断裂；（3）在分岔临界线以下的区域，即 $U<f(A)$ 处，方程（10）是稳定的，没有分岔点，则为纯粹的经向风（图 3 阴影部分，无实际意义），与实际大气运动不符。因此，只有当平均纬向风速 U 与基波波幅 A 满足条件 $U=f(A)$ 时，才有可能在低指数状态时使纬向环流断裂，又能恢复到高指数环流来，意味着北极与中纬度之间的能量输送不仅强度大，而且跨度大，往往容易带来极端天气气候。

结构方程（14）中的扰动涡度系数 ψ'_B 和 ψ'_C 是随时间变化的，将扰动涡度系数时间方程的解析解（27）式带入到方程（14）中，得到不同时刻西风准地转流函数的空间变化。这里，为了使初始时刻的准地转流场呈纬向流场，取 $U=0.15$，$A=0.82$，$l_1=3$，$k_0=2$，$\psi'_B(0)=1$，$\psi'_C(0)=0.2$（扰动流场呈周期性变化，任取初始值均能表达周期循环），时间步长以 d（天）为单位。根据公式（26）和 $T=2\pi/\omega$，可以计算出西风带高低指数相互转换的循环周期大约为 37d 左右。

第 1 天，水平涡动量输送 $\psi'_C\sin l_1y\cos k_0x/(l_1^2+k_0^2)$ 较小，西风带风切变以东西向为主，在表征经向风速切变的基波 $A\sin k_0x$ 与纬向气流 $-Uy$ 的共同作用下，形成具有涡旋的流场，表征叠加基波后的初始纬向流场（图 4a）。随着时间的增加，扰动流中的水平涡动量输送 $\psi'_C\sin l_1y\cos k_0x/(l_1^2+k_0^2)$ 增大，而纬向扰动 $\psi'_B\cos l_1y/l_1^2$ 减小，在基本流和扰动流的共同作用下，东风带与西风带之间的南北向风切变慢慢增大，纬向波动的振幅不断增大（图 4b、c）。到第 6～10 天，随着水平涡动量输送的进一步加大，辐散中心 $(-\pi/2k_0,0)$ 开始出现斜伸，斜伸的辐散中心使得西风动量的输送在上游的辐散区辐

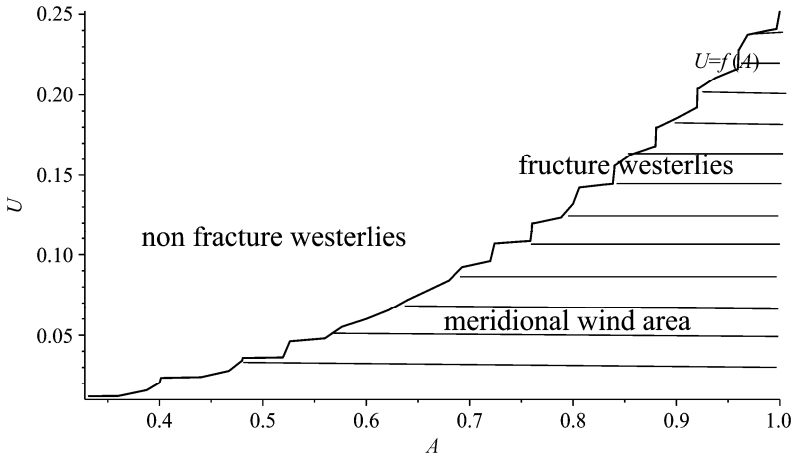

图 3 西风带的分类：断裂西风带[$U=f(A)$]、非断裂西风带[$U>f(A)$]和径向风带[$U<f(A)$]

Fig. 3 Classification of in the westerlies: Fructure westerlies [$U=f(A)$], non fructure westerlies [$U>f(A)$], and meridional wind area [$U<f(A)$]

散，减弱此处的西风；同时，西风动量的输送在下游的辐合区辐合，进一步增强此处的西风（图 4b、c）。随着时间的增加，这西北—东南向的结构将被进一步拉伸，中心被挤压，到 18～22 天，当水平涡动量输送达到分岔条件时，这种挤压造成结构变化，平衡点 $(-\pi/2k_0,0)$ 处，呈现出一种准静止状态的鞍型流场，西风纬向带随之而断裂，表征着经向气流达到鼎盛（图 4d、e）。

根据能量守恒原理，水平涡动量输送不可能无限增长，甚至不能长久维持，在一段时间后，水平

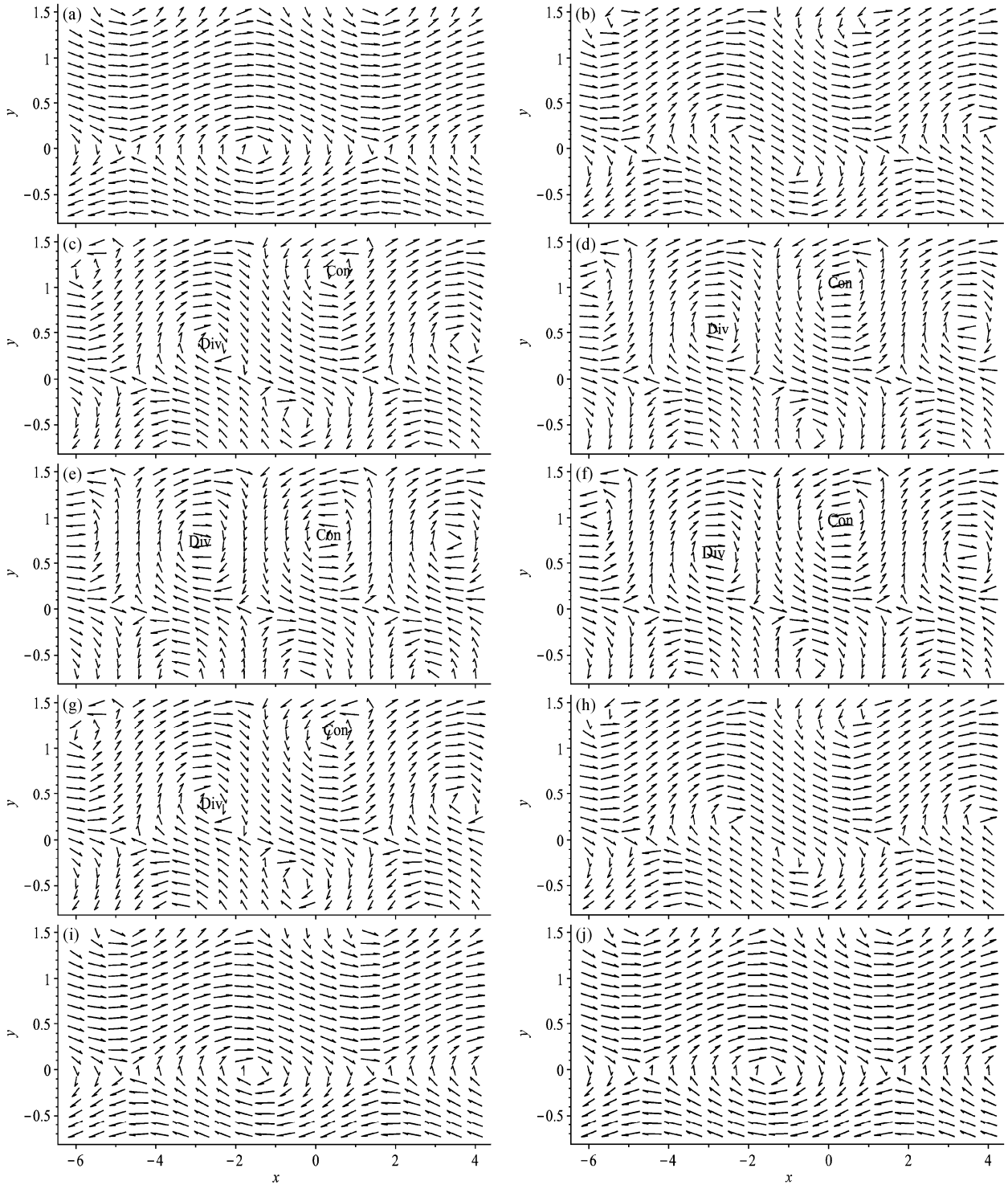

图 4 同图 2，但为西风环流 Ψ

Fig. 4 Same as Fig. 2, but for spatial structures of the circulation Ψ in the westerlies

涡动量输送 $\psi'_C \sin l_1 y \cos k_0 x/(l_1^2+k_0^2)$ 逐渐减小，而纬向扰动 $\psi'_B \cos l_1 y/l_1^2$ 增大，准静止的鞍型流场恢复到强大的斜伸辐散中心流场（图 4f）。随着水平涡动输送减小和纬向扰动增大趋势的进一步发展，上游的弱西风增强而下游的强西风减弱，斜伸的辐散中心开始逐渐收缩，此时，南北向的环流切变开始减小（图 4g、h）。到第 36～40 天，这种南北向的环流切变进一步减小，逐渐恢复为以平缓谐波为特征的纬向环流（图 4i、j），至此完成了一个循环。

6 结语与讨论

本研究运用准地转模式，通过等值投影的方法，将地转流函数的等值线转换为向量场结构，探讨西风带高低指数周期性转换的机制，结果表明：（1）仅有位能转化所引起的水平涡动输送，可以产生大振幅的行星波，但不会产生西风带的断裂；（2）波流相互作用下，平均纬向风速 U 与基波波幅 A 满足一定的分岔条件时（如图 3 所示），会出现西风带断裂现象，并能维持环流的高低指数循环。因此，只有在满足这个分岔条件时，既能不时形成南北能量的跨纬度输送，又能有效维持西风带高低指数的不断转换。

本文虽然较好地描述了高低指数间结构的变化及准周期循环，但仍然存在以下几个问题：（1）对流层高层的动能和热能输送对于西风带高低指数环流的形成、维持是重要的，也就是西风带具有一定的斜压性质，表明本研究的正压模式存在一定的局限性；（2）西风带高低指数环流之间的转换具有一定的跳跃性质，而本研究的转换是连续性的，没有体现突变这一特征；（3）外源强迫对于西风带高低指数环流的形成、维持的重要作用，模式中忽略了地形和热源等外源强迫的作用，只研究了大气内部动力机制，这些不完善有待今后深入的研究，从理论上进一步逼近实际大气中各个物理量相互作用后的结果。

参考文献（References）

Charney J G, DeVore J G. 1979. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking [J]. J. Atmos. Sci., 36 (7): 1205–1216, doi:10.1175/1520-0469(1979)036<1205:MFEITA>2.0.CO;2.

Charney J G, Straus D M. 1980. Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced, planetary wave systems [J]. J. Atmos. Sci., 37 (6): 1157–1176, doi:10.1175/1520-0469(1980)037<1157:FDIMEA>2.0.CO;2.

Deininger R C. 1982. Topographically forced wave instability at finite amplitude [J]. J. Atmos. Sci., 38 (12): 2619–2625, doi:10.1175/1520-0469(1981)038<2619:TFWIAF>2.0.CO;2.

Ding Q H, Wallace J M, Battisti D S, et al. 2014. Tropical forcing of the recent rapid Arctic warming in northeastern Canada and Greenland [J]. Nature, 509 (7499): 209–212, doi:10.1038/nature13260.

Ding Q H, Schweiger A, L'Heureux M, et al. 2017. Influence of high-latitude atmospheric circulation changes on summertime Arctic sea ice [J]. Nat. Climate Change, 7: 289–295, doi:10.1038/nclimate3241.

Francis J A, Chan W H, Leathers D J, et al. 2009. Winter Northern Hemisphere weather patterns remember summer Arctic sea-ice extent [J]. Geophys. Res. Lett., 36 (7): L07503, doi:10.1029/2009GL037274.

Francis J A, Vavrus S J. 2012. Evidence linking Arctic amplification to extreme weather in mid-latitudes [J]. Geophys. Res. Lett., 39 (6): L06801, doi:10.1029/2012GL051000.

高普云. 2005. 非线性动力学——分叉、混沌与孤立子 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 73–74. Gao Puyun. 2005. Nonlinear Dynamics-Bifurcations, Chaos, and Solitons (in Chinese) [M]. Changsha: NUDT Press, 73–74.

Gill A E. 1974. The stability of planetary waves on an infinite beta-plane [J]. Geophys. Fluid Dyn., 6 (1): 29–47, doi:10.1080/03091927409365786.

郭大钧. 2001. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 34–36. Guo Dajun. 2001. Nonlinear Functional Analysis (in Chinese) [M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 34–36.

Hoskins B J, Hollingsworth A. 1973. On the simplest example of the barotropic instability of Rossby wave motion [J]. J. Atmos. Sci., 30 (1): 150–153, doi:10.1175/1520-0469(1973)030<0150:OTSEOT>2.0.CO;2.

金飞飞, 朱抱真. 1986a. 强迫波、自由波和纬向气流的相互作用——I. 平衡态环流的分支 [J]. 中国科学 B 辑, (6): 663–672. Jin Feifei, Zhu Baozhen. 1988. Interaction of forced waves, free wave and zonal flow (I)—Bifurcation of the equilibria [J]. Scientia Sinica (Series B), 31 (4): 469–480.

金飞飞, 朱抱真. 1986b. 强迫波、自由波和纬向气流的相互作用——II. 高低指数的转换和振荡的定性分析 [J]. 中国科学 B 辑, (8): 889–896. Jin Feifei, Zhu Baozhen. 1986b. The interaction of forced waves, free waves and zonal flow (II)—Qualitative analysis of the conversion and oscillation about high and low index cycles [J]. Scientia Sinica (Series B) (in Chinese), 16(7): 889–896.

刘式达, 刘式适. 2011. 大气涡旋动力学 [M]. 北京: 气象出版社, 212–213. Liu Shida, Liu Shishi. 2011. Atmospheric Vortex Dynamics (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 212–213.

刘式适, 刘式达, 谭本馗. 1996. 非线性大气动力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 134–135. Liu Shishi, Liu Shida, Tan Benkui. 1996. Nonlinear Atmospheric Dynamics (in Chinese) [M]. Beijing: National Defend Industry Press, 134–135.

Lorenz E N. 1972. Barotropic instability of Rossby wave motion [J]. J. Atmos. Sci., 29 (2): 258–265, doi:10.1175/1520-0469(1972)029<0258:BIORWM>2.0.CO;2.

罗德海. 2000. 阻塞非线性动力学 [M]. 北京: 气象出版社, 67. Luo Dehai. 2000. Blocking Nonlinear Dynamics (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 67.

吕美仲, 侯志明, 周毅. 2004. 动力气象学 [M]. 北京: 气象出版社,

137–138. Lü Meizhong, Hou Zhiming, Zhou Yi. 2004. Dynamic Meteorology (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 137–138.

Mitchell K E, Dutton J A. 1981. Bifurcations from stationary to periodic solutions in a low-order model of forced, dissipative barotropic flow [J]. J. Atmos. Sci., 38 (4): 690–716, doi:10.1175/1520-0469(1981)038<0690:BFSTPS>2.0.CO;2.

Namias J. 1950. The index cycle and its role in the general circulation [J]. J. Atmos. Sci., 7 (2): 130–139, doi:10.1175/1520-0469(1950)007<0130:TICAIR>2.0.CO;2.

Overland J E, Wang M Y. 2010. Large-scale atmospheric circulation changes are associated with the recent loss of Arctic sea ice [J]. Tellus A, 62 (1): 1–9, doi:10.1111/j.1600-0870.2009.00421.x.

Simmons A J, Wallace J M, Branstator G W. 1983. Barotropic wave propagation and instability, and atmospheric teleconnection patterns [J]. J. Atmos. Sci., 40 (6): 1363–1392, doi:10.1175/1520-0469(1983)040<1363:BWPAIA>2.0.CO;2.

王为德. 1983. 瞬时经圈环流与西风带环流变化的关系 [J]. 气象学报, 41 (2): 138–146. Wang Weide. 1983. On the relation between the mid-latitude meridional cell and the change of zonal circulation [J]. Acta Meteorologica Sinica (in Chinese), 41 (2): 138–146, doi:10.11676/qxxb1983.016.

叶笃正, 朱抱真. 1958. 大气环流的若干基本问题 [M]. 北京: 科学出版社, 33–34. Ye Duzheng, Zhu Baozhen. 1958. Basic Problems of Atmospheric Circulation (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press, 33–34.

曾庆存. 1979. 旋转大气中运动的非线性相互作用和旋转适应过程 [J]. 中国科学, (10): 986–995. Zeng Qingcun. 1979. On nonlinear interaction of motion and process of rotational adaption in rotating atmosphere [J]. Scientia Sinica, 22 (8): 945–957.

张恭庆, 林源渠. 1987. 泛函分析讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 103–104. Zhang Gongqing, Lin Yuanqu. 1987. Functional Analysis Handout (in Chinese) [M]. Beijing: Peking University Press, 103–104.

张锦炎. 1981. 常微分方程几何理论与分支问题 [M]. 北京: 北京大学出版社, 64–65. Zhang Jinyan. 1981. Geometric Theory and Branch Problems of Ordinary Differential Equations (in Chinese) [M]. Beijing: Peking University Press, 64–65.

朱抱真, 金飞飞, 刘征宇. 1991. 大气和海洋的非线性动力学概论 [M]. 北京: 海洋出版社, 89–89. Zhu Baozhen, Jin Feifei, Liu Zhengyu. 1991. An Introduction to the Nonlinear Dynamics of the Atmosphere and Ocean (in Chinese) [M]. Beijing: China Ocean Press, 89–89.