

耦合 Lorenz 模型的吸引子特性及其可预报性分析

张铭¹ 王伟¹ 钟权加² 丁瑞强^{1,3} 李建平⁴

¹ 成都信息工程大学, 四川省高原大气与环境重点实验室, 成都 610225

² 中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

³ 北京师范大学, 地表过程与资源生态国家重点实验室, 北京 100875

⁴ 中国海洋大学, 物理海洋教育部重点实验室, 青岛 266100

摘 要 本文主要探究了耦合 Lorenz 系统的混沌吸引子特性及其可预报性随耦合强度的变化特征。结果表明: 随着耦合强度增加, 快系统中的低频变化分量增大, 其吸引子也随之变大; 而慢系统自身的不稳定分量变大, 导致其变率增强, 吸引子轨道变得更加密集。在此基础上, 利用非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 方法定量分析了耦合系数变化对耦合 Lorenz 系统可预报性的影响。随着对快系统的耦合强度增加, 快/慢两个不同尺度系统的可预报性都会减少。然而, 增加对慢系统的耦合强度却只能提高快系统的可预报上限, 对慢系统的可预报性改变不大。

关键词: 非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 耦合 Lorenz 系统 误差增长 可预报性

文章编号: 2021236A

DOI: 10.3878/j.issn.1006-9895.2000.19000

收稿日期 2021-12-09; **网络预出版日期**

作者简介 张铭, 男, 1995 年出生, 硕士研究生, 主要从事可预报性方面的研究。E-mail: zhangming1223@foxmail.com

通讯作者 丁瑞强, E-mail: drq@bnu.edu.cn

资助项目 国家自然科学基金项目 41975070、42105059

Funded by National Natural Science Foundation of China (Grant 41975070, 42105059)

Analysis of attractor behavior and predictability in a coupled Lorenz model

ZHANG Ming¹, WANG Wei¹, ZHONG Quanjia², DING Ruiqiang^{1,3}, LI Jianping⁴

¹ Plateau Atmosphere and Environment Key Laboratory of Sichuan Province, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China

² State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics (LASG), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

³ State Key Laboratory of Earth Surface Processes and Resource Ecology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

⁴ Key Laboratory of Physical Oceanography.MOE.China, Ocean University of China, Qingdao 266100, China

Abstract There are many complex multi-scale systems in real life. Studying these coupled systems can help us to gain a more comprehensive understanding of the dynamical properties of the systems. In this paper, the implications of coupling strength on chaotic attractors and their predictability are investigated by varying the coupling coefficients of a coupled Lorenz model, which combined with a fast and slow dynamics. The results show that as the coupling coefficient increases, similar low-frequency variations to those of the slow dynamics can be found in the fast dynamics, along with its attractor becoming larger; while the high-frequency variability of the slow dynamics increases. The predictability limits of the system are investigated using the nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE) method. It is found that after coupling, the natural logarithm curves of error growth of both the fast and slow dynamics consist of two distinct growth rates, with the first period being the fast error growth and the second period being the slow error growth process. Furthermore, the saturation value of the error growth varies from the strength of the coupling. However, the sensitivity to the coupling coefficient is not the same for the predictability of systems of different scales. Increasing the coupling coefficient leads to a larger attractor for the fast dynamics, providing more predictable information, which offsets the effect of a reduction in the predictability limit due to the increased error growth rate, ultimately leading to a longer predictability time for the fast system. However, for the slow dynamic system, the size of the chaotic attractor is minimally affected by the strength of the

coupling, but an increase in the coupling coefficient will significantly add the instability of the slow dynamics, thus reducing the predictability limit of the slow system. Finally, this study can provide new insights into the predictability of such complex climate systems.

Keywords nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE), coupled Lorenz system, error growth, predictability

1 引言

大气作为一个复杂的非线性系统, 具有显著混沌特性, 导致其可预报时效有一定范围, 超出该范围, 预报将失去技巧(Thompson, 1957; Lorenz, 1963a, 1963b)。因此, 对大气、海洋等混沌系统可预报时效的估计具有重要意义(Palmer, 1999; 穆穆等, 2017)。早期的工作主要关注单个尺度混沌系统可预报性问题。一方面, 从观测和模式中存在误差的角度出发, 揭示了误差的增长规律(Dalcher and Kalnay, 1987; Mu and Duan, 2003), 并提出了估计混沌系统的可预报性上限的方法(Ding and Li, 2007; Krishnamurthy, 2019; 李建平和丑纪范, 2003)。另一方面, 探究了外强迫对混沌系统可预报性的影响, 发现施加特定的外强迫有助于提高系统可预报性(何文平等, 2006; 黎爱兵等, 2012; 李一伟等, 2020)。上述研究取得了许多重要的进展, 加深了人们对混沌系统可预报性的认识(Reichler and Roads, 2003; 段晚锁和穆穆, 2006; 李保生等, 2017)。

近几十年来, 随着复杂系统的多尺度特征及其相互作用问题逐渐受到重视(Goldenfeld and Kadanoff, 1999; 柴立和, 2005; Shen et al., 2021), 越来越多的工作围绕多尺度耦合模型的可预报性问题开展研究。具体归纳起来主要有以下两类, 一类是直接研究耦合 Lorenz 模型的可预报性问题(Moon et al., 2020)。如 Peña 和 Kalnay (2004)分析了一个此类耦合 Lorenz 模型的误差增长过程, 提出了分离不同尺度扰动的方法, 该方法有助于减少预报的不确定性; Boffetta 等(1998)发现

耦合系统的误差增长呈现先快后慢的特点，同时指出若只考虑快速误差增长过程可能会低估耦合系统的可预报上限；之后，还有研究进一步定量计算了在不同初始误差大小条件下该耦合模型可预报性，结果发现对数函数可以较好地描述可预报上限与初始误差大小的关系(Li and Ding, 2011)。另一类研究结合实际为题构建的理论耦合模型，分析特定尺度过程的可预报性问题及其影响机理(Zhang, 2010)。例如，Zhao 等(2021)在研究海气相互作用过程的可预报性时，构造了一个能够描述大气过程、海洋过程和季节循环过程的简单海-气耦合概念模型，并借助该模型指出了海洋内部过程的低频分量对提高大气可预报性有重要贡献。上述工作主要探讨了特定耦合强度下多尺度系统的可预报性问题，然而决定耦合系统整体的动力学特征除了各个尺度的子系统分量，还有各系统之间的耦合强度。目前，关于耦合强度对多尺度系统可预报性影响的研究还较少。因此，有必要考察不同耦合强度对多尺度系统本身动力学特征及其可预报性的影响。

本研究主要基于简单的 Lorenz 耦合模型(Boffetta et al., 1998; Li and Ding, 2011)，探究了耦合系数对不同尺度混沌吸引子的影响；并进一步利用非线性局部 Lyapunov 指数方法(NLLE; Ding and Li, 2007; 李建平和丁瑞强, 2009)，考察了不同耦合强度条件下耦合系统的误差增长规律及其可预报性的变化。

2 非线性局部 Lyapunov (NLLE) 方法

对于一个 n 维非线性动力系统，其误差演化方程可以如下表示：

$$\dot{\delta} = J(x)\delta + G(x, \delta), \quad (1)$$

其中 x 是 t 时刻系统的状态向量， δ 是状态 x 上叠加的误差， $J(x)\delta$ 是切线性项，表示误差的线性增长部分， $G(x, \delta)$ 是关于误差增长的高阶非线性项，将误差演化方程(1)从初始时刻 $t = t_0$ 到 $t_0 + \tau$ 进行数值积分求解，可以得到：

$$\delta(t_0 + \tau) = \eta(\mathbf{x}(t_0), \delta(t_0), \tau) \delta(t_0), \quad (2)$$

其中， $\eta(\mathbf{x}(t_0), \delta(t_0), \tau)$ 为非线性误差传播算子， $\delta(t_0) = (\delta_1(t_0), \delta_2(t_0), \dots, \delta_n(t_0))$ 为初始误差向量。NLLE 可以定义为误差增长速率：

$$\lambda(\mathbf{x}(t_0), \delta(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\delta(t_0 + \tau)\|}{\|\delta(t_0)\|}, \quad (3)$$

这里的 $\lambda(\mathbf{x}(t_0), \delta(t_0), \tau)$ 不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和演化时间 τ ，还与初始误差 δ_0 有关。本文研究主要关注混沌系统整体可预报性，可以用全局吸引子上平均的 NLLE 得到，即：

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\delta_0, \tau) &= \int_{\Omega} \lambda(\mathbf{x}_0, \delta_0, \tau) d\mathbf{x} \\ &= \langle \lambda(\mathbf{x}_0, \delta_0, \tau) \rangle_N \end{aligned} \quad (4)$$

这里 Ω 代表整体吸引子的区域范围， $\langle \cdot \rangle_N$ 表示 $N (N \rightarrow \infty)$ 在整体吸引子上取不同样本的集合平均， $\bar{\lambda}(\delta_0, \tau)$ 表现为整个系统的不稳定度。在此基础上可以获得初始误差的平均相对增长，

$$\bar{E}(\delta_0, \tau) = \exp[\bar{\lambda}(\delta_0; \tau)\tau], \quad (5)$$

由(3)，(4)和(5)式可得：

$$\bar{E}(\delta_0, \tau) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau) \right)^{1/N} / \delta(t_0), \quad (6)$$

对于一个混沌系统， $\delta_1(t_0 + \tau), \delta_2(t_0 + \tau) \dots, \delta_N(t_0 + \tau)$ 表示相互独立的初始误差经过 τ 时刻演变后的误差大小，随着 $\tau \rightarrow \infty$ ，根据饱和定理(Ding and Li, 2007)，误差的平均相对增长以概率意义收敛到一个常数，即

$$\bar{E}(\delta_0, \tau) \xrightarrow{P} c(N \rightarrow \infty), \quad (7)$$

其中“ $\xrightarrow{P}$ ”表示依概率 P 收敛于某一值， P 是由混沌系统本身所决定，故对同一个混沌系统而言 P 是同一个概率分布，因此， c 为依赖于 P 的一个常数。简而言之， c 可看作是混沌系统相对误差增长 $\bar{E}(\delta_0, \tau)$ 的饱和值，一旦误差增长达到饱和值，则意味着系统的初始信息全部丢失，预测失去意义，把误差达到饱和

值的时间看作是系统的可预报期限。参考 Li 和 Ding(2011)的工作, 本文将初始误差演化到饱和值 c 的99%时对应的时间定义为可预报期限。

3 耦合 Lorenz 模型及其吸引子特性

本文的研究主要基于耦合 Lorenz 模型, 该模型耦合了快/慢两个不同时间尺度特征的子系统(Boffetta et al., 1998), 其动力方程组可表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1^{(s)}}{dt} = \sigma(x_2^{(s)} - x_1^{(s)}) \\ \frac{dx_2^{(s)}}{dt} = (-x_1^{(s)}x_3^{(s)} + r_sx_1^{(s)} - x_2^{(s)}) - \epsilon_s x_1^{(f)}x_2^{(f)} \\ \frac{dx_3^{(s)}}{dt} = x_1^{(s)}x_2^{(s)} - bx_3^{(s)} \\ \frac{dx_1^{(f)}}{dt} = c\sigma(x_1^{(f)} - x_1^{(s)}) \\ \frac{dx_2^{(f)}}{dt} = c(-x_1^{(f)}x_3^{(f)} + r_fx_1^{(f)} - x_2^{(f)}) + \epsilon_f x_1^{(f)}x_1^{(s)} \\ \frac{dx_3^{(f)}}{dt} = c(x_1^{(f)}x_2^{(f)} - bx_3^{(f)}) \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $c = 10$ 。根据不同变量的运动尺度特征, 将方程中变化相对较慢的前三个方程组成一个 Lorenz 模型慢系统, 变化相对快速的三个方程组成一个快系统, 分别用上标(s)和(f)表示。快系统中的参数 $c=10$ 为尺度参数, 表示快系统的变率比慢系统要大 10 倍。此外, 快/慢系统中 Rayleigh 数不一样, 慢系统的 $r_s = 28$, 而快系统的 $r_f = 45$ 。通过 $-\epsilon_s x_1^{(f)}x_2^{(f)}$, $\epsilon_f x_1^{(f)}x_1^{(s)}$ 将两个系统耦合为一个整体, 从 (1) 式中可见慢系统的耦合系数 ϵ_s 表示慢系统受到快系统的影响强度, 也决定着快系统在整个耦合系统中的强度; 同理, 快系统的耦合系数 ϵ_f 表示慢系统对快系统的影响强度, 以及慢系统在整个耦合系统中的影响强度。

图 1a 和图 1b 分别给出了在 $\epsilon_s = 0$, $\epsilon_f = 0$ 时的慢系统和快系统运动轨迹。两个系统都呈现相似的经典吸引子结构, 但各自最大的 Lyapunov 指数明显不同, 分别为 $\lambda_1^{(f)} = 12.17$, $\lambda_1^{(s)} = 0.905$, 说明快系统的误差增长速度要比慢系统大一个量级左右。从图 1c 也可以看出慢系统主要呈现低频变化特征, 而快系统则以

高频变化为主。

当耦合系数为 $\epsilon_s = 10^{-2}, \epsilon_f = 10$ 时，快/慢两个系统在耦合的作用下逐渐向彼此相适应，此时整个系统的最大 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = 11.5$ ，与没有耦合时快系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1^{(f)}$ 量级较为一致，这体现了快系统误差增长主导了耦合后系统整体的初始误差增长。除此之外，耦合之后吸引子结构也发生了改变，慢系统吸引子轨道变密集，说明其运动速率加快（图 1d）；快系统的振幅变大同时吸引子变得不清晰（图 1e）。通过图 1f 可以发现，耦合后，快系统呈现出与慢系统一致的低频变化分量，而慢系统的周期变短。

当耦合系数为 $\epsilon_s = 10^{-1.8}, \epsilon_f = 24$ 时，此时耦合进一步增强，可以更加明显发现快/慢系统的相互作用过程会随耦合系数变大而增强，继而导致慢系统变率增加，吸引子更加密集；快系统的低频成分更加明显，吸引子显著变大（图 1g-i）。

上述结果表明，耦合系数 ϵ_s, ϵ_f 既表征快/慢系统之间的相互作用强弱，也决定了耦合系统整体中不同尺度特征的相对大小。增大耦合系数会显著改变各自吸引子的运动轨迹，快/慢两个系统会相互适应，导致原本具有不同运动尺度的系统出现较多的一致性。

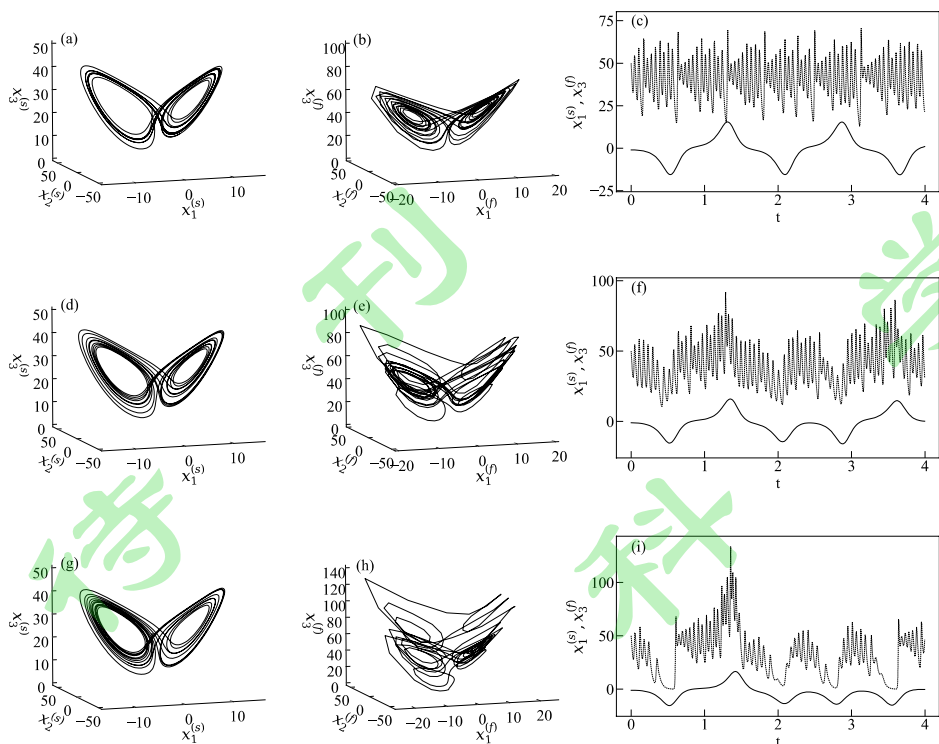


图 1 不同耦合系数时慢系统(a, d, g)和快系统(b, e, h)三维运动轨迹和 $x_1^{(s)}$ (粗实线), $x_3^{(f)}$ (细虚线)随时间 t 演变的时间序列(c, f, i)。(对应的耦合系数分别为: (a-c) $\epsilon_s = 0, \epsilon_f = 0$; (d-f) $\epsilon_s = 10^{-2}, \epsilon_f = 10$; (g-i) $\epsilon_s = 10^{-1.8}, \epsilon_f = 24$)

Fig.1 The three-dimensional trajectory of fast system (a, d, g) and the slow system (b, e, h) and the temporal evolution of $x_1^{(s)}$ (thick solid line), $x_3^{(f)}$ (thin dashed line) (c, f, i) with different coupling coefficients. (Coupling coefficients corresponding to (a-c) $\epsilon_s = 0, \epsilon_f = 0$; (d-f) $\epsilon_s = 10^{-2}, \epsilon_f = 10$; (g-i) $\epsilon_s = 10^{-1.8}, \epsilon_f = 24$)

4 快/慢系统在不同耦合强度下的可预报性特征

为了进一步分析快/慢系统的可预报性随耦合强度变化特征, 我们分别在快/慢两个系统上分别叠加 $\delta_0 = e^{-10}$ 大小的初始误差, 利用 NLLE 方法考察其误差增长特征及可预报性。

4.1 快系统的可预报分析

图 2a 给出了在 $\epsilon_f = 10, \epsilon_s = 10^{-3.0, -2.5, \dots, -1.45}$ 时快系统相对误差的自然对数增长曲线。由图可见, 在耦合之后, 快系统的误差演变呈现先快速增长, 然后

缓慢增长直到饱和（图 2a 内插图）。其中，缓慢的误差增长过程主要体现了慢系统对快系统的影响。随着耦合系数 ϵ_s 增加，快系统误差增长的饱和值略有降低，而且其后期的误差增长速度加快，导致误差很快达到饱和。根据误差饱和值定理得到可预报期限，可发现其可预报上限随着耦合系数 ϵ_s 增加而降低（图 2b）。

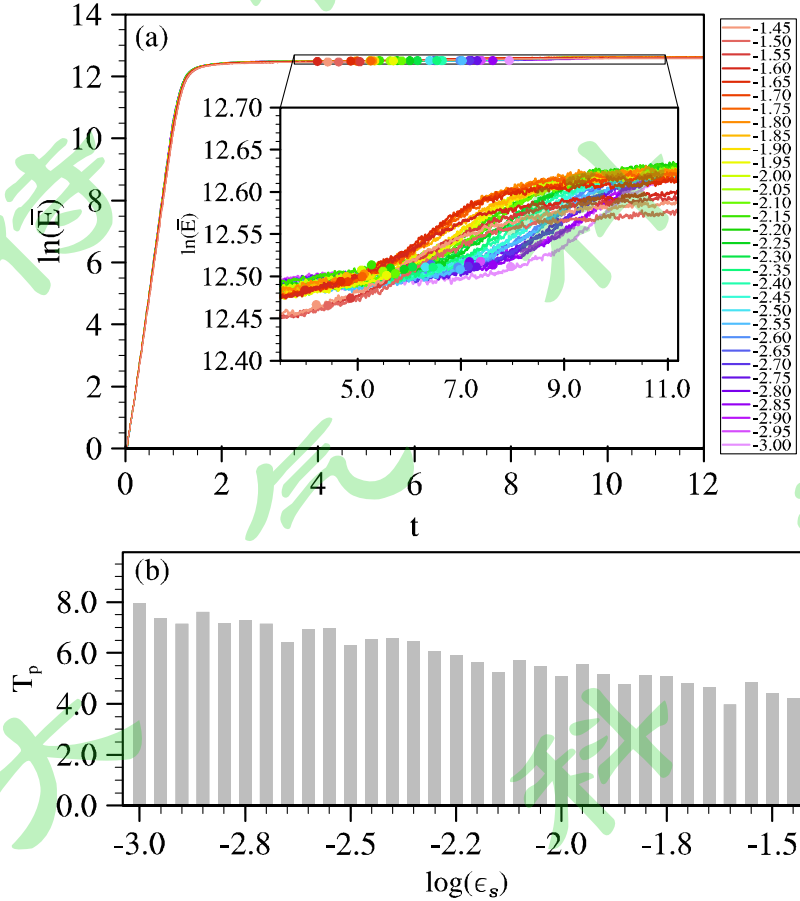


图 2 在 $\epsilon_f = 10$ 时，不同 ϵ_s 条件下快系统相对误差的自然对数随时间增长曲线(a)和可预报时间(T_p)随 ϵ_s 的变化(b) (图 a 的内插图为达到饱和时误差增长曲线的局部放大图，圆点表示误差达到各自饱和值的时间点；图中 ϵ_s 值的大小均以对数化后的 $\log(\epsilon_s)$ 表示)

Fig.2 (a)Temporal evolution of the natural logarithmic error growth and (b) the time of predictability limit (T_p) of the fast system with different slow coupling coefficient ϵ_s and constant fast coupling coefficient ($\epsilon_f = 10$). (The inset of (a) is the enlarged detail of the error growth curve when the error reaches saturation, and the dots correspond to the positions where the respective error growth reaches saturation, The values of ϵ_s are logarithmicized ($\log(\epsilon_s)$) in the figure)

图 3a 给出了在 $\epsilon_s = 10^{-2.0}$ ， $\epsilon_f = 1, 2, \dots, 28$ 时快系统相对误差的对数增长曲线。从图可见，耦合系统中误差增长曲线也是呈现由先快后慢增长过程，且随

耦合系数 ϵ_f 的增加, 快系统的误差增长饱和值显著变大(图 3a 内插图)。这意味着较大的耦合系数 ϵ_f 提供了更多的可预报信息, 从而提高快系统可预报性可预报上限 (图 3b)。当耦合系数 ϵ_f 大于 20 时, 此时饱和值足够大, 导致误差经过一段缓慢增长才达到饱和, 快系统的可预报性增加更加显著。

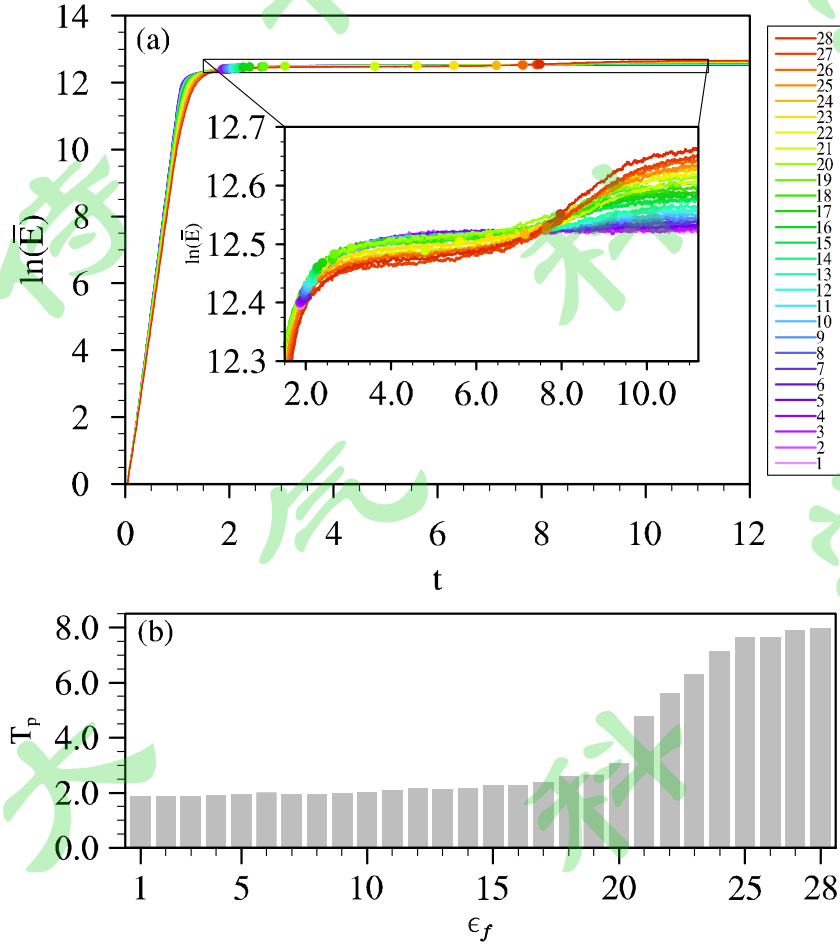


图 3 在 $\epsilon_s = 10^{-2}$ 时, 不同 ϵ_f 条件下快系统相对误差的自然对数随时间增长曲线(a)和可预报时间(T_p)随 ϵ_f 的变化(b) (图 a 的内插图为达到饱和时误差增长曲线的局部放大图, 圆点表示误差达到各自饱和值的时间点)

Fig.3 (a) Temporal evolution of the natural logarithmic error growth and (b) the time of predictability limit (T_p) of the fast system with different fast coupling coefficient (ϵ_f) and constant slow coupling coefficient ($\epsilon_s = 10^{-2}$). (The inset of (a) is the enlarged detail of the error growth curve when the error reaches saturation, and the dots correspond to the positions where the respective error growth reaches saturation)

图 4 给出了在不同的 ϵ_s , ϵ_f 系数下, 耦合后快系统的可预报期限。可以看出,

当 ϵ_f 越大, ϵ_s 越小时, 快系统的可预报上限越大, 反之越小 (图 4a)。随着 ϵ_f 的增加, 可预报性增加, 当 ϵ_f 大于 20 左右之后, 由前文对快系统误差增长曲线随 ϵ_f 变化分析 (图 3a) 可知, 此时慢系统对快系统的作用较大, 导致快系统出现了一段缓慢误差增长过程, 表现出在 ϵ_f 大于 20 之后可预报期限增加更为显著 (图 4b), 这可能与混沌系统在特定的耦合条件下产生非混沌奇怪吸引子有关 (何文平等, 2006); 而随着耦合系数 ϵ_s 以指数形式增加, 快系统的可预报性呈线性下降趋势 (图 4c)。此外, 进一步综合分析耦合系数 $\epsilon_s = 10^{-2}$, $\epsilon_f = 10$ 与 $\epsilon_s = 10^{-1.8}$, $\epsilon_f = 24$ 时快系统的可预报期限 (图 4a) 及对应耦合条件时吸引子特征 (图 1), 发现随着耦合加强, 快系统向慢系统适应, 吸引子变大, 导致可预报信息变多, 快系统的可预报时间增加。综上分析, 随着 ϵ_s 的增加, 系统后期的误差增长速率增快, 从而降低快系统的可预报期限。然而, 随着 ϵ_f 的增加可预报期限提高。若同时增加快系统的耦合系数 ϵ_f 和慢系统的耦合系数 ϵ_s , 总体上是有利于快系统的可预报性提高。

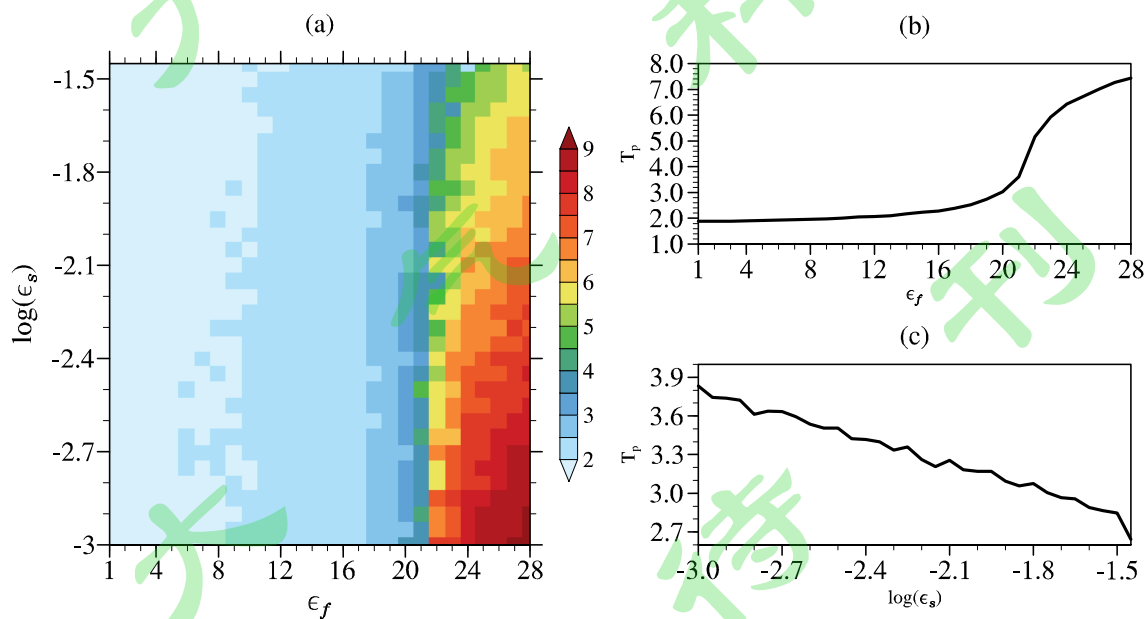


图4 (a)不同耦合系数下, 快系统的可预报时间; (b)对图a沿 c_s 轴平均后, 快系统可预报时间随 c_f 的变化和(c)对图a沿 c_f 轴平均后, 快系统可预报时间随 c_s 的变化 (图中 ϵ_s 值的大小均以对

数化后的 $\log(\epsilon_s)$ 表示)

Fig.4 (a) The time of predictability limit of the fast system with different coupling coefficients; (b)

The average time of predictability limit of the fast system varies with ϵ_f (average along the c_s

coordinate axis of figure a) and c_s (c) (average along the c_f coordinate axis of figure a) (The

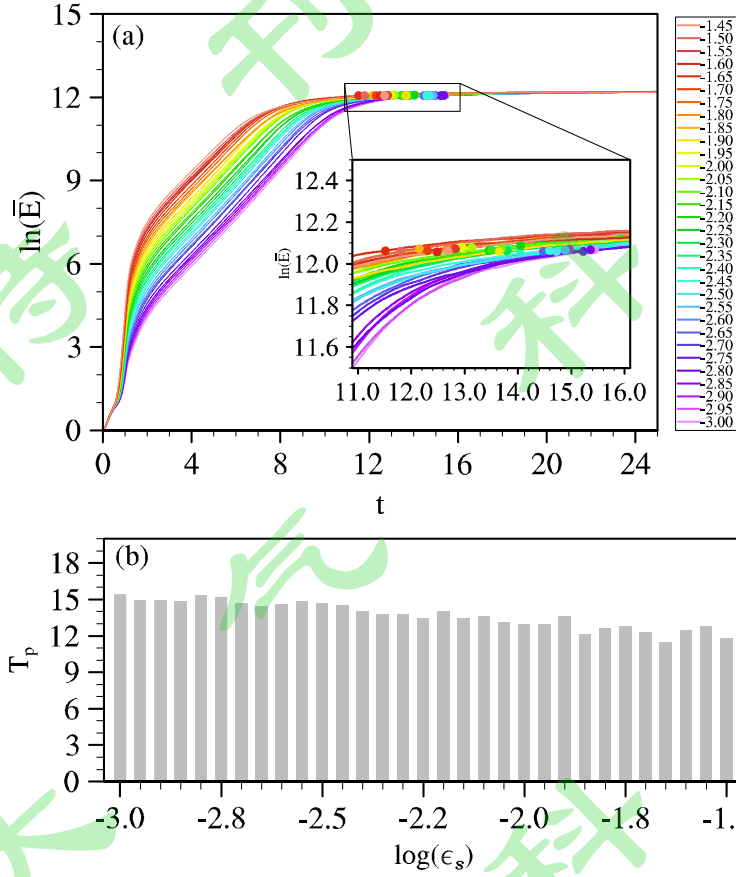
values of ϵ_s are logarithmicized ($\log(\epsilon_s)$) in the figure)

4.2 慢系统的可预报分析

下文主要讨论不同耦合参数下慢系统的误差增长特性及其可预报性。图 5a 给出了当 $\epsilon_f = 10$ ，不同 ϵ_s 条件下，慢系统的误差增长曲线，由图可见：慢系统的误差增长与快系统一样呈现先快后慢两个过程。随着 ϵ_s 的增加，慢系统的误差饱和值没有明显变化（如图 5a 的内插图所示），但是增加了慢系统误差增长过程中快速增长的部分，导致可预报信息很快的丧失，慢系统的可预报时间降低（图 5b）。这说明 ϵ_s 增加意味着系统的不稳定分量增多，误差增长达到饱和的时间减少。然而，随着 ϵ_f 的增加，慢系统误差增长曲线之间几乎没有明显的差别（图 6 及其内插图），得到的可预报期限也没有明显变化，基本维持在 14.6 个时间单位左右（图 6b）。说明改变 ϵ_f 对慢系统的可预报性影响不大。图 7 给出了在不同的 ϵ_s, ϵ_f 数值下，慢系统的可预报期限。可见，慢系统的可预报性受到 ϵ_f 影响较小(图 7a、b)，其主要受到 ϵ_s 影响，表现为随着 ϵ_s 的指数增加，慢系统的平均可预报性呈现线性减少趋势(图 7c)。

综上分析，耦合作用基本不改变慢系统的吸引子大小，而会通过改变慢系统中快速误差增长饱和值大小，进而改变系统的可预报性。随着 ϵ_s 增加，慢系统中更多的可预报信息将以快速误差增长的方式失去，从而缩短了系统的可预报时间；然而，改变 ϵ_f 对慢系统可预报时间影响较小。如果同时增加耦合系数 ϵ_s 和 ϵ_f ，即耦合加强时，慢系统受到快系统的影响加强，不利于其可预报性。同样

247 从不同的耦合系数下慢系统的时间序列演变图也可以看出（图 1c、f、i）：耦合
 248 越强，慢系统的周期变短，频率变快，表现为慢系统的不稳定分量增加，这不
 249 利于系统可预报信息的维持。



250 图 5 在 $\epsilon_f = 10$ 时，不同 ϵ_s 条件下慢系统相对误差的自然对数随时间增长曲线(a)和可预报时
 251 间(T_p)随 ϵ_s 的变化(b) (图 a 的内插图为达到饱和时误差增长曲线的局部放大图，圆点表示误
 252 差达到各自饱和值的时间点，图中 ϵ_s 值的大小均以对数化后的 $\log(\epsilon_s)$ 表示)

254 Fig.5 (a) Temporal evolution of the natural logarithmic error growth and (b) the time of
 255 predictability limit (T_p) of the slow system with different slow coupling coefficient c_s and constant
 256 fast coupling coefficient ($\epsilon_f = 10$). (The inset of (a) is the enlarged detail of the error growth curve
 257 when the error reaches saturation, and the dots correspond to the positions where the respective
 258 error growth reaches saturation; The values of ϵ_s are logarithmicized ($\log(\epsilon_s)$) in the figure)

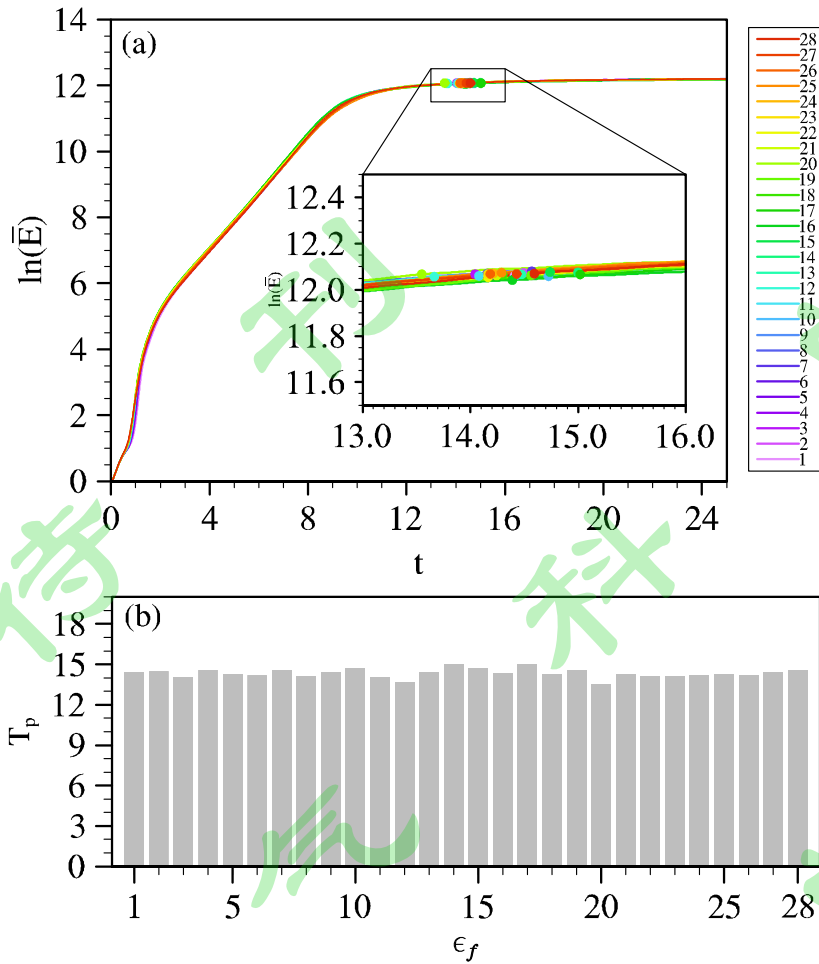


图 6 在 $\epsilon_s = 10^{-2}$ 时, 不同 ϵ_f 条件下慢系统相对误差的自然对数随时间增长曲线(a)和可预报时间(T_p)随 ϵ_f 的变化(b) (图 a 的内插图为达到饱和时误差增长曲线的局部放大图, 圆点表示误差达到各自饱和值的时间点)

Fig.6 (a) Temporal evolution of the natural logarithmic error growth and (b) the time of predictability limit (T_p) of the slow system with different fast coupling coefficient (ϵ_f) and constant slow coupling coefficient ($\epsilon_s = 10^{-2}$) The inset of (a) is the enlarged detail of the error growth curve when the error reaches saturation, and the dots correspond to the positions where the respective error growth reaches saturation)

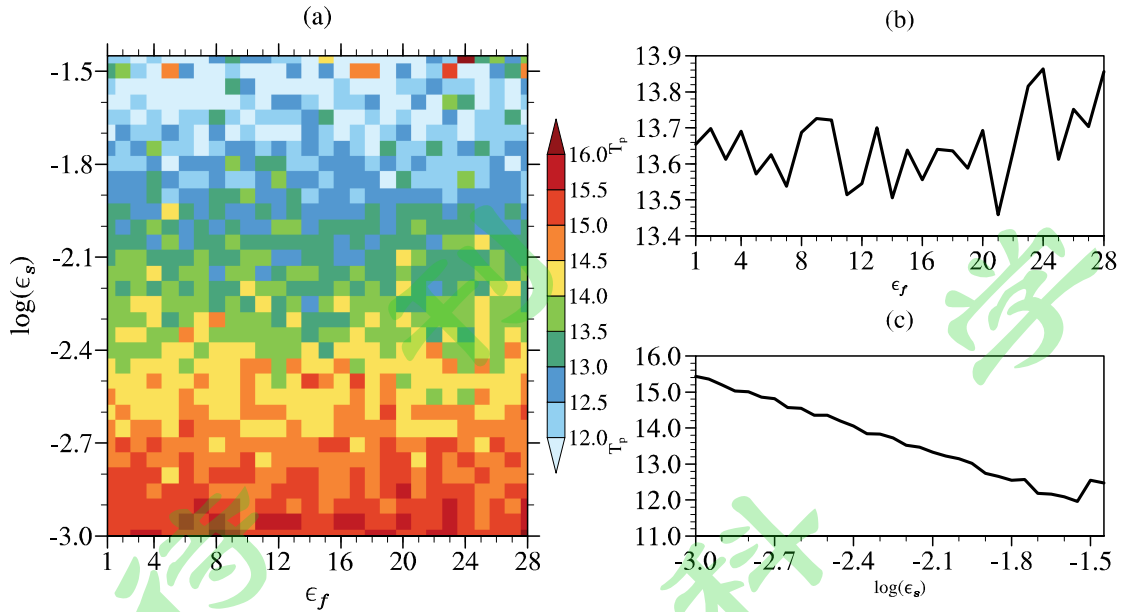


图 7 (a)不同耦合系数下，慢系统的可预报时间；(b) 对图 a 沿 c_s 轴平均后，慢系统可预报时间随 c_f 的变化和(c)对图 a 沿 c_f 轴平均后，慢系统可预报时间随 c_s 的变化(图中 ϵ_s 值的大小均以对数化后的 $\log(\epsilon_s)$ 表示)

Fig.7 (a) The time of predictability limit of the slow system with different coupling coefficients. The average time of predictability limit of the slow system varies with ϵ_f (b) (average along the $\log(c_s)$ coordinate axis of figure a) and c_s (c) (average along the c_f coordinate axis of figure a) (The values of ϵ_s are logarithmicized ($\log(\epsilon_s)$) in the figure)

4.3 耦合系统整体的可预报分析

耦合系数既表示不同特征尺度之间相互作用大小，也决定了整个耦合系统中快系统和慢系统的相对大小，进而可能对多尺度耦合系统整体可预报产生影响。通过在耦合系统整体的初始时刻叠加 $\delta_0 = e^{-10}$ 大小的误差，利用 NLLE 方法计算不同耦合系数下系统整体的可预报期限，以此考察不同尺度相对大小对多尺度系统整体的可预报影响。

图 8a 给出了在不同的 ϵ_s, ϵ_f 系数下，耦合系统整体的可预报期限。从图可见，耦合系统整体的可预报上限取决于快/慢两个系统的共同作用。当 ϵ_f 越大， ϵ_s 越小时，耦合系统整体的可预报性更大。反之，可预报性越小。结合前文的讨论发现，慢过程以低频变化为主，其误差增长较为缓慢，增加其在耦合系统

中的强度（增加耦合系数 ϵ_f ）有利于提高系统的可预报性；反之，快过程以高频变化为主，其误差增长较快，增加其在耦合系统的强度（增加耦合系数 ϵ_s ）会降低系统的可预报性。此外，还发现耦合 Lorenz 模型的可预报上限对耦合系数响应表现出不一致性。随着 c_f 增加，耦合系统整体的平均可预报期限基本呈现线性增加的趋势（图 8b）；随着 c_s 指数增加，耦合系统整体系统的平均可预报性期限才呈现线性下降的趋势（图 8c）。

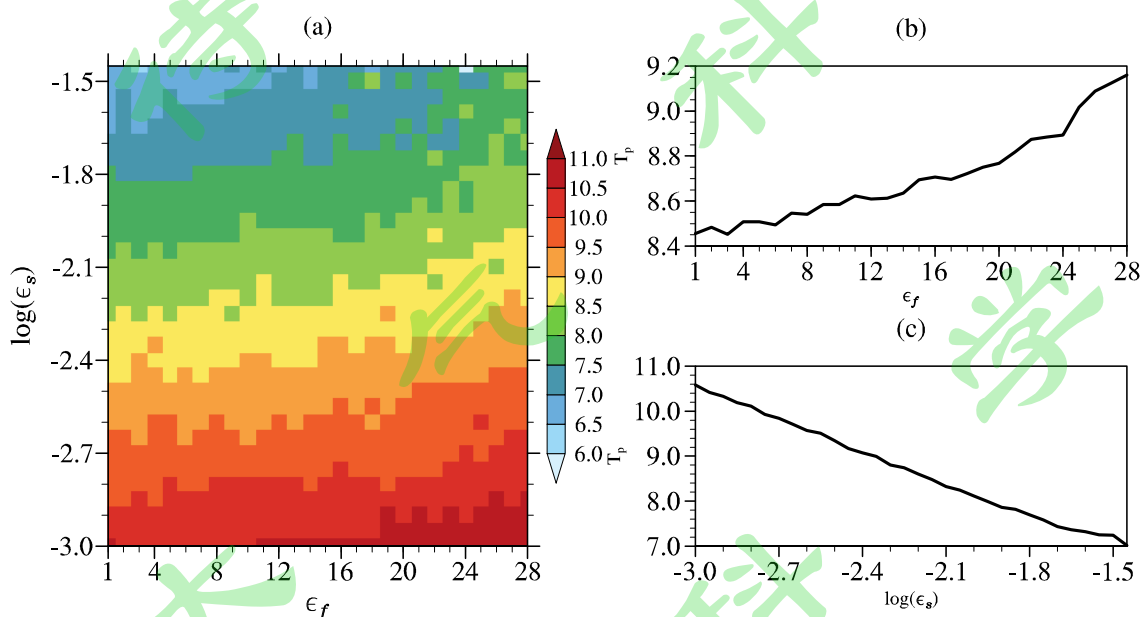


图 8 (a)不同耦合系数下，耦合系统整体的可预报时间；(b)对图 a 沿 c_s 平均后，整体可预报时间随 c_f 的变化和(c)对图 a 沿 c_f 平均后，整体可预报时间随 c_s 的变化(图中 ϵ_s 值的大小均以对数化后的 $\log(\epsilon_s)$ 表示)

Fig.8 (a) The time of predictability limit of the coupled system with different coupling coefficients. (b) the average time of predictability limit of the coupled system varies with ϵ_f (average along the c_s coordinate axis of figure a) and c_s (c) (average along the c_f coordinate axis of figure a) (The values of ϵ_s are logarithmicized ($\log(\epsilon_s)$) in the figure)

5 结论与讨论

本文主要研究了耦合 Lorenz 模型的吸引子特性及其可预报性随耦合系数变化的特征。得到的主要结论有：

- 1) 耦合系数的大小会显著影响耦合系统的吸引子特性。随着耦合作用增强，

快/慢两个不同尺度的子系统会相互适应，具体表现为快系统的吸引子变大的同时出现了低频变化；慢系统的吸引子变率增加，准周期运动的频率更高，周期缩短，表现出更不稳定特征。

2) 耦合系数可以通过改变不同稳定度的分量在整个系统中的比例，进而影响系统的可预报上限。随耦合系数 ϵ_s 增加，快系统对整个耦合系统的作用增强，继而增加了系统的不稳定分量，导致系统整体以及个尺度分量的可预报性降低。随着耦合系数 ϵ_f 的增加，慢系统对耦合系统的作用增强，有利于提供更多的可预报信息，进而提高系统整体以及快系统的可预报性，但是对慢系统自身的可预报性影响不大。

3) 耦合 Lorenz 模型整体的可预报上限对耦合系数响应表现出不一致性。随着 c_f 增加，耦合系统整体的可预报期限呈现线性增加的趋势，而随着 c_s 指数增加耦合系统整体的可预报期限才呈现线性下降的趋势。

本文使用一个简单的概念耦合模型，揭示出耦合强度对多尺度系统的可预报性有重要影响，这对多圈层相互作用下的大气可预报性研究有一定启示意义。如前人研究发现全球变暖会增强海气相互作用，从而增加大气季节内尺度的可预报性(Neena and Goswami, 2010)，但是会降低天气尺度的可预报性(Xu et al., 2020)，说明海气耦合作用强度对实际大气可预报性的影响不可忽略。此外，本文中的耦合项的形式是 $-\epsilon_s x_1^{(f)} x_2^{(f)}, \epsilon_f x_1^{(f)} x_1^{(s)}$ ，从概念上该项可以拆分为两部分，一部分是 $x_1^{(f)} x_2^{(f)}$ 和 $x_1^{(f)} x_1^{(s)}$ ，表示不同系统各自的状态或强度，对应于气候系统中各圈层本身的变率；另一部分是耦合系数 $-\epsilon_s$ 和 ϵ_f ，对应于气候系统中各圈层之间相互作用的物理过程，这些物理过程也可能影响气候的可预报上限。因此，在未来工作中，有必要利用更多观测资料和复杂耦合模式，加强气候系统中各圈层之间的耦合过程及其对可预报性影响方面的研究。

327

328

参考文献 (References)

329

Boffetta G, Giuliani P, Paladin G, et al. 1998. An extension of the Lyapunov analysis for the predictability problem [J]. *J. Atmos. Sci.*, 55(23): 3409-3416.

330

331 柴立和. 2005. 多尺度科学的研究进展 [J]. *化学进展*, 17(2): 186-191. Chai Lihe.

332 2005. Recent progress of multiscale science [J]. *Progress in Chemistry*, 17(2): 186-

333 191.

334 Dalcher A, Kalnay E. 1987. Error growth and predictability in operational ECMWF

335 forecasts [J]. *Tellus A*, 39(5): 474-491.

336 Ding R Q, Li J P. 2007. Nonlinear finite-time Lyapunov exponent and predictability [J].

337 *Phys. Lett. A*, 364(5): 396-400.

338 段晚锁, 穆穆. 2006. 用非线性最优化方法研究 El Niño 可预报性的进展与前瞻 [J].

339 *大气科学*, 30(5): 759-766. Duan Wansuo, Mu Mu. 2006. Advance and prospect of

340 the studies of El Niño predictability by nonlinear optimization method, *Chinese*

341 *Journal of Atmospheric Sciences*, 30(5): 759-766.

342 Goldenfeld N, Kadanoff L P. 1999. Simple lessons from complexity [J]. *science*,

343 284(5411): 87-89.

344 何文平, 封国林, 高新全, 等. 2006. 准周期外力驱动下 Lorenz 系统的动力学行为 [J].

345 *物理学报*, 55(6): 3175-3179. He Wenping, Feng Guolin, Gao Xinquan, et al. 2006.

346 Dynamics of the Lorenz system under quasiperiodic driving [J]. *Acta Phys. Sin.*,

347 55(6): 3175-3179.

348 Krishnamurthy V. 2019. Predictability of Weather and Climate [J]. *Earth Space Sci*, 6(7):

349 1043-1056.

350 黎爱兵, 张立凤, 项杰. 2012. 外强迫对 Lorenz 系统初值可预报性的影响 [J]. *物理学*

351 *报*, 61(11): 556-564. Li Aibing, Zhang Lifeng, Xiang Jie. 2012. Influence of external

352 forcing on the predictability of Lorenz model [J]. *Acta Phys. Sin.*, 61(11): 556-564.

353 李保生, 丁瑞强, 李建平, 等. 2017. 强迫 Lorenz 系统的可预报性研究 [J]. *物理学报*,

354 66(6): 34-42. Li B S, Ding R Q, Li J P, et al. 2017. Predictability of forced Lorenz

355 system [J]. *Acta Phys. Sin.*, 66(6): 34-42.

356 李建平, 丑纪范. 2003. 非线性大气动力学的进展 [J]. *大气科学*, 27(4): 653-673. Li

357 Jianping, Chou Jifan. 2003. Advances in nonlinear atmospheric dynamics [J].
 358 Chinese Journal of Atmospheric Sciences, 27(4):653-673.
 359 李建平, 丁瑞强. 2009. 混沌系统单变量可预报性研究 [J]. 大气科学, 33(3): 551-556.
 360 Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2009. Studies of predictability of single variable from
 361 multi-dimensional chaotic dynamical system[J]. Chinese Journal of Atmospheric
 362 Sciences, 33(3): 551-556.
 363 Li J P, Ding R Q. 2011. Temporal-spatial distribution of atmospheric predictability limit
 364 by local dynamical analogs [J]. Mon. Wea. Rev., 139(10): 3265-3283.
 365 李一伟, 范广洲, 赖欣. 2020. Lorenz 模型中外源强迫强弱对初值可预报性的影响研
 366 究 [J]. 高原气象, 39(1): 153-161. Li Yiwei, Fan Guangzhou, Lai Xin. 2020. Study
 367 on the Influence of External Forcing Weakness on the Predictability of Initial Value
 368 in Lorenz Model [J]. Plateau Meteorology, 39(1): 153-161.
 369 Lorenz E N. 1963a. Section of planetary sciences: The predictability of hydrodynamic
 370 flow [J]. Trans. N. Y. Acad. Sci., 25(4): 409-432.
 371 Lorenz E N. 1963b. Deterministic nonperiodic flow [J]. J. Atmos. Sci., 20(2): 130-141.
 372 Moon S, Seo J M, Baik J-J. 2020. High-dimensional generalizations of the Lorenz
 373 system and implications for predictability [J]. Physica Scripta, 95(8): 085209.
 374 doi:10.1088/1402-4896/ab9d3e
 375 穆穆, 段晚锁, 唐佑民. 2017. 大气-海洋运动的可预报性: 思考与展望 [J]. 中国科学:
 376 地球科学, 47(10): 1166-1178. Mu mu, Duan Wansuo, Tang Youmin. 2017. The
 377 predictability of atmospheric and oceanic motions: Retrospect and prospects [J]. Sci.
 378 China: Earth Sci., 47(10): 1166-1178.
 379 Mu M, Duan W S. 2003. A new approach to studying ENSO predictability: Conditional
 380 nonlinear optimal perturbation [J]. Chin. Sci. Bull., 48(10): 1045-1047.
 381 Neena JM, Goswami BN. 2010. Extension of potential predictability of Indian summer
 382 monsoon dry and wet spells in recent decades [J]. Q. J. R. Meteorol. Soc., 136(648):
 383 583-592.
 384 Palmer T N. 1999. A Nonlinear Dynamical Perspective on Climate Prediction [J]. J.
 385 Climate, 12(2): 575-591.
 386 Peña M, Kalnay E. 2004. Separating fast and slow modes in coupled chaotic systems
 387 [J]. Nonlin. Processes Geophys., 11(3): 319-327.

- Reichler T J, Roads J O. 2003. The role of boundary and initial conditions for dynamical seasonal predictability [J]. *Nonlin. Processes Geophys.*, 10(3): 211-232.
- Shen B-W, Pielke Sr R A, Zeng X B, et al. 2021. Is Weather Chaotic?: Coexistence of Chaos and Order within a Generalized Lorenz Model [J]. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 102(1): 148-158.
- Thompson P D. 1957. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns [J]. *Tellus*, 9(3): 275-295.
- Xu L, Zhang C, Chen N C, et al. 2020. Potential precipitation predictability decreases under future warming [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 47(22): e2020GL090798.
- Zhang S Q. 2010. A Study of Impacts of Coupled Model Initial Shocks and State-Parameter Optimization on Climate Predictions Using a Simple Pycnocline Prediction Model [J]. *J. Climate*, 24(23): 6210-6226.
- Zhao H R, Zhang S Q, Li J P, et al. 2021. A study of predictability of coupled ocean-atmosphere system using attractor radius and global attractor radius [J]. *Climate Dyn.*, 56(3): 1317-1334.