

再论地转流的正压不稳定

林一骅^{1,2}

1、LASG 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

2、中国科学院大学地球与行星科学学院, 北京 100049

2022-03-19 T 18:00

摘要

本文研究了考虑地转约束的情况下, 正压不稳定的必要条件, 并基于能量学和位涡动力学理论, 对正压不稳定的必要条件的物理含义进行了诠释。对于满足地转平衡的基本流, 瑞利—郭晓岚 (Rayleigh—Kuo) 定理修正为: 若地转流可能出现不稳定, 其位涡梯度需在某个纬度取极值。Fjørtoft 定理相应地成为: 若地转流可能出现不稳定, 需满足 Q_y 与 $U - U_s$ 同号。即由原结论中的绝对涡度修正为位涡。这是地转约束也是位涡约束的结果。指出满足能量关系是正压不稳定可能出现的能量学要求, 瑞利—郭晓岚定理是正压不稳定可能出现的位涡动力学条件, 而 Fjørtoft 定理则是能量学与位涡动力学两种要求的协调, 三者均须满足, 正压不稳定才有可能发生。

关键词: 地转流动 正压不稳定 必要条件 能量学 位涡动力学

Barotropic Instability of Geostrophic Flow: The Problem Revisited

Lin Yihua^{1,2}

1 LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100029

2 College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy
of Sciences, Beijing 100049

Abstract Rayleigh-Kuo theorem and Fjørtoft theorem provide necessary conditions for barotropic instability of a geophysical fluid flow. Moreover, the barotropic instability of the geostrophic

¹作者简介 林一骅, 男, 1966 年出生, 研究员, 主要从事地球流体力学与海洋环流数值模拟研究。E-mail: linyh@lasg.iap.ac.cn

flow is of special importance for the geophysical flow. In this paper, two modified necessary conditions for the barotropic instability of the geostrophic flow are obtained. Based on energetics and potential vorticity dynamics theories, the implication of the necessary conditions for barotropic instability is explained. For the geostrophic flow, the Rayleigh-Kuo theorem can be revised as follows: A necessary condition for barotropic instability of the geostrophic flow is that the potential vorticity of the flow should have an extreme point. The Fjørtoft theorem correspondingly becomes: A necessary condition for barotropic instability of the geostrophic flow is that $Q_y(U - U_s) > 0$ in the field of the geostrophic flow, where y_s is a point at which $Q_y = 0$ and $U_s = U(y_s)$. That is, the absolute vorticity in the original theorems is modified to potential vorticity. These results are the consequence of geostrophic constraint and potential vorticity constraint. The energy relationship is the energetics requirement for the possibility of barotropic instability, the Rayleigh-Kuo theorem is the potential vorticity dynamics condition for the possibility of barotropic instability, and the Fjørtoft theorem is the coordination of the two requirements of energetics and potential vorticity dynamics. For possible barotropic instability, all three requirements must be met.

Keywords Geostrophic flow, Barotropic instability, Necessary conditions, energetics, Potential vorticity dynamics

1 引言

正压不稳定是大气和海洋这类地球流体大尺度运动中存在的主要不稳定类型之一，是天气尺度系统发生发展的重要机制。早在 1880 年，瑞利 (Rayleigh) 在研究无粘性流体平行剪切流动不稳定问题时指出，无粘性平行剪切流出现不稳定的必要条件是流速的廓线必须存在至少一个拐点即基本流的局地涡度至少存在一个极值点，此即著名的瑞利定理。郭晓岚 (Kuo, 1949) 把瑞利的结果推广至大气的大尺度运动，得到大气大尺度运动存在正压不稳定的必要条件是基本流动的绝对涡度存在极值点。在瑞利定理提出之后的 70 年之后，Fjørtoft (Fjørtoft, 1950) 的研究表明，无粘性的平行剪切流要出现不稳定，除了满足瑞利定理，还需要满足 $(U - U_s) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} < 0$ ，即

满足 Fjørtoft 定理, 其中 U_s 为基本流动出现极值处的流速。关于平行剪切流不稳定问题以及地球流体正压不稳定问题在林家翘 (Lin, 1945) 的论文、Drazin 和 Reid (Drazin 和 Reid, 2004) 的专著及郭晓岚 (Kuo, 1973) 的综述文章中有详尽的总结, 钱永甫 (钱永甫等, 2006) 的文章对于郭晓岚在大气动力不稳定领域的工作也做了回顾。

鉴于瑞利、郭晓岚及 Fjørtoft 等人所用的标准模方法的局限性, 曾庆存 (曾庆存, 1979; Zeng, 1983) 和 Pedlosky (Pedlosky, 1987) 用能量方法探讨了正压情况下天气尺度扰动的发展问题, 得到扰动发展需要满足的基本流和扰动的形态及其配置, 拓展了研究思路, 并且这类能量方法亦可推广至非线性问题。不过作为有旋运动, 能量学关系的只是流体运动需要满足的约束之一, 涡度或者位涡动力学条件则是需要满足的另一个约束。对于地球流体的大尺度运动, 只有满足地转平衡的基本流动才具有实际意义。因为如果基本流不满足地转平衡, 那么首先会通过较快的地转适应过程来实现地转平衡, 然后才会进入相对缓慢的准地转演变阶段 (曾庆存, 1979), 而正压不稳定是发生在准地转演变阶段的现象, 因而研究地转流动的正压不稳定问题更具有实际意义。此外, 作为正压不稳定的必要条件的瑞利—郭晓岚定理以及 Fjørtoft 定理只是作为数学推演的结果存在于文献之中, 其动力学含义一直没有给出明确的物理解释。

本文试图针对地转流动重新给出相应的定理, 并结合能量学和位涡动力学来解释地转流动正压不稳定必要条件的物理含义。文章将在以下部分从研究所用的基本方程出发, 导出准地转位涡方程, 用标准模方法给出地转流动正压不稳定的必要条件, 再基于能量学和位涡动力学理论, 对给出的正压不稳定必要条件的物理意义进行诠释, 最后对研究所得结论进行总结并加以讨论。

2 基本方程

设 U 为纬向基本流, 且满足地转平衡, 即

$$fU = -g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1)$$

其中 U 基本流, $H = H(y)$ 是流体层厚度, 仅为 y 的函数, $f = f_0 + \beta y$ 为科氏参数, f_0 为参考纬度的科氏参数, 取作常量, β 为罗斯贝 (Rossby) 参数, 亦取为常量; g 为重力加速度。基本流动为地转流, 故满足位涡守恒 (此处表现为位涡沿流线不变), 因而容易得到

$$Q = \frac{f + \bar{\zeta}}{H} = \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} = Q_0(y) \quad (2)$$

其中 $\bar{\zeta} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ 为基本流的相对涡度, Q 为基本流动的位涡, 二者均仅为 y 的函数, 对于固定的 y 值, Q 为常量, 即位涡沿流线守恒。

现在我们要研究满足 (1) 和 (2) 的基本流动对于小扰动的稳定性。描述小扰动的运动方程和连续方程分别为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

u 、 v 为扰动速度, h 为扰动高度。计及 U 、 H 均为 y 的函数, 由式 (3)、(4) 和 (5) 容易得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\zeta - \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} h \right) + \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \right) v = 0 \quad (6)$$

$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 为扰动流的相对涡度。若扰动流 u 、 v 亦满足准地转, 则式 (6) 可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (\nabla^2 \psi - f_0 Q \psi) + \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

此即扰动的准地转位涡方程。其中 $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, ψ 为地转流函数, $f_0 h = g \psi$, ∇ 为哈密顿 (Hamilton) 算子。若不计 (7) 中与辐合辅散相关的项 $f_0 Q \psi$ 以及与基本流动相应的压力梯度相关的项 $Q \frac{\partial H}{\partial y}$, 则简化为郭晓岚 (Kuo, 1949) 中的方程。事实上, $\frac{\partial H}{\partial y}$ 至关重要, 若没有该项, 则基本流动 U 将无法维持, 讨论起稳定与否是基础也将随之不存。

与 (7) 相对应的 y 方向的边界条件为

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{当 } y = y_1, \quad y = y_2 \quad (8)$$

如此一来, 扰动的不稳定问题归结为方程 (7) 在边界条件 (8) 下的定解问题, 若方程的解 ψ 的值随时间增大, 则扰动发展, 即不稳定; 反之, 若 ψ 的值随时间减小, 则扰动衰减, 即为稳定。

3 正压不稳定的必要条件

由于方程 (7) 中的 U 、 Q 和 H 均与变量 x 和 t 无关, 因此可设方程的解 ψ 具有以下形式

$$\psi = \phi(y) e^{ik(kx-ct)} \quad (9)$$

把 (9) 代入 (7) 和 (8), 则有

$$(U - c) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (k^2 + f_0 Q) \right] \phi + \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \phi = 0 \quad (10)$$

$$\phi = 0, \text{ 当 } y = y_1, y = y_2 \quad (11)$$

若 $U - c \neq 0$, 则 (10) 可以改写成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (k^2 + f_0 Q) \right] \phi + \frac{1}{U - c} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \phi = 0 \quad (12)$$

以 ϕ 的共轭复数 ϕ^* 乘以式 (12) 并对 y 积分, 利用式 (11) 的边界条件, 可得

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 - \frac{1}{U - c} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 \right] dy = 0 \quad (13)$$

由 (9) 可知, 若扰动不稳定, c 需存在正的虚部, 即 $c = c_R + ic_I$, 且 $c_I > 0$ 。将 $c = c_R + ic_I$ 代入 (13), 分离其实部和虚部, 可得其虚部为

$$c_I \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{|U - c|^2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 dy = 0 \quad (14)$$

若要保证 $c_I > 0$, 式 (14) 中则只能令积分为零, 又 $|U - c|^2$ 和 $|\phi|^2$ 均为非负, 故要求 $\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y}$ 在区间 (y_1, y_2) 上变号, 即存在 $y_s \in (y_1, y_2)$, 使得

$$\left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_s} = 0 \quad (15)$$

若不计 $Q \frac{\partial H}{\partial y}$, 即为郭晓岚 (Kuo, 1949, 1973) 所得到的正压不稳定必要条件, 即瑞利—郭晓岚定理, 若再不计 β 效应, 则等价于瑞利所得到的无粘平行剪切流不稳定性时的必要条件 (Rayleigh, 1890)。郭晓岚的正压不稳定必要条件即在区间 (y_1, y_2) 的某处 $y = y_s$, 基本流的绝对涡度对 y 的偏微商 $\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, 亦即基本流的绝对涡度在 $y = y_s$ 处存在极值点, 该条件看似与 (15) 矛盾, 因为由 (15) 可知, 在 $y = y_s$ 处 $\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q \frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$ 。但若对于基本流位涡沿流线守恒方程即使 (2) 对 y 求偏微商, 有

$$Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y}}{H} \quad (16)$$

H 为流体层的厚度, 是一正定量, 因而 (15) 式等价于

$$Q_y \Big|_{y=y_s} = 0 \quad (17)$$

也就是说对应于瑞利—郭晓岚定理在区间 (y_1, y_2) 的某处 $y = y_s$, 基本流的绝对涡度存在极值点, 地转流正压不稳定必要条件修正为在区间 (y_1, y_2) 的

某处 $y = y_s$ ，基本流的位势涡度存在极值点。二者的差异在于郭晓岚的工作只是在瑞利的方程中计入了 β 效应，而没有对基本流做任何限制。实际上，地球流体的大尺度运动，必然受地转平衡约束，而位涡守恒则是地球流体流动（自然也包括地转流动）的本质属性，不受地转平衡及位涡守恒约束而随意给定的基本流动对于地球流体则缺乏实际意义。（15）或者（17）则是计入位涡守恒约束之后得到的更辐合地球流体实际的必要条件。

（13）式的实部亦不难得到

$$c_R \int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 - \frac{U - c_R}{|U - c|^2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 \right] dy = 0$$

或者

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 \right] dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - c_R}{|U - c|^2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 \right] dy \quad (18)$$

由于 Q 通常为正值，故（18）式等号右端积分为非负，又 $|U - c|^2$ 和 $|\phi|^2$ 均为非负，这样要使得（19）式成立，必须满足

$$(U - c_R) \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) > 0$$

这样就有

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - c_R}{|U - c|^2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 \right] dy > 0 \quad (19)$$

计及若存在不稳定，则需（14）式中的积分为零，将（14）式中的积分乘以 $c_R - U_s$ （其中 U_s 为（15）式或者（17）式成立时即 Q 在 $y = y_s$ 取极值处的基本流 U 的值），与（19）式相加，则有

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - U_s}{|U - c|^2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) |\phi|^2 \right] dy > 0 \quad (20)$$

同上所述，（20）式成立亦须满足

$$(U - U_s) \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) > 0 \quad (21)$$

计及（16）式，则（21）式等价于

$$(U - U_s) Q_y > 0 \quad (22)$$

这是地转流动若可能存在不稳定需要满足的 Fjortoft 定理，该定理要求在区间 (y_1, y_2) 上， $U - U_s$ 与 Q_y 同号，这相当于要求在 $Q_y > 0$ 的子区间上 U_s 为 U 的最小值，而在 $Q_y < 0$ 的子区间上 U_s 为 U 的最大值。同样由于位涡守恒对于准地转基本流的约束，Fjortoft 定理中的绝对涡度由位涡所替代。

现在对 (17) 式进行简要分析, 以对比与前人结果的异同。计及基本流动满足地转平衡即 (1) 式, 由与 (17) 式等价的 (15) 式,

$$\begin{aligned} \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} &= \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{f}{g} U \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} \\ &= \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{U}{L_D^2} \left(1 - \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{f} \right) = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{U}{L_D^2} (1 - R_o) \end{aligned}$$

其中 L_D 是罗斯贝变形半径, 而 $\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{f}$ 实际上是基本流动的罗斯贝数 R_o , 对于满足地转平衡的基本流动, $R_o \ll 1$ 。若运动在 y 方向的尺度为 L , 基本流动变化的尺度为 ΔU , 若不稳定出现, 则需要

$$L < \left[\frac{\Delta U}{\beta + \frac{U}{L_D^2} (1 - R_o)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

对于 $U > 0$, 即基本流动为西风, $\frac{U}{L_D^2} (1 - R_o)$ 为正, 这样不稳定可能出现的经向尺度就比郭晓岚的情况即 $L < \left[\frac{\Delta U}{\beta} \right]^{\frac{1}{2}}$ 更小 (Gill, 1982), 即需要基本流更加狭窄; 对于 $U < 0$, 即基本流动为东风, $\frac{U}{L_D^2} (1 - R_o)$ 为负, 这样不稳定可能出现的经向尺度就比郭晓岚的情况即 $L < \left[\frac{\Delta U}{\beta} \right]^{\frac{1}{2}}$ 更宽, 即可能出现不稳定的基本流动可以较宽。也就是说, 维持可能出现不稳定的相同强度的东、西风, 东风需要的南北向压力梯度更大。若取 $\beta \sim 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$, $L_D \sim 10^6 m$, $U \sim 10 m s^{-1}$, 则 $\frac{U}{L_D^2} (1 - R_o) \sim 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$, 即 $\frac{U}{L_D^2} (1 - R_o)$ 可达 β 数值的一半, 可见基本流是否满足地转平衡对于可能出现不稳定所要求的基本流宽度有显著影响。

4 正压不稳定的能量学与位涡动力学

以上所得 (17) 与 (22) 两式只是正压不稳定的必要条件, 而非充分条件, 得到该必要条件的途径是通过数学推演, 而非基于清晰简明的物理模型。两个必要条件分别要求基本流动的位涡在某个纬度取极值以及其他纬度上的流速与该纬度流速之差要与所在纬度的位涡的偏微商 Q_y 同号, 这两个条件的只是为满足相应的积分约束的要而去给出, 其物理含义至今尚不明确。此处将对这两个条件的物理意义进行探讨。

从能量学的观点看来, 正压不稳定的能量由基本流动的动能提供, 因此我们把扰动能量方程作为研究的出发点。用 $-\psi$ 乘以 (7) 式, 经过一些运

算, 容易得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + f_0 Q \psi^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{U}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{U}{2} f_0 Q \psi^2 \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[U \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \psi^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ & = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

将上式在所考虑的区域（南北向为基本流的宽度，东西向为一个波长）上积分，并计及南北向的刚壁边界条件和东西方向的周期边界条件，消去散度项，则有

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (24)$$

其中横线表示 x 方向的积分或者平均， $\bar{E}$ 为扰动能量，即

$$\bar{E} = \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} f_0 Q \psi^2 \right] dy \quad (25)$$

方括号中的前强两项为扰动动能，第三项为扰动位能。(24) 式等号右端项的被积函数还可以写成如下形式

$$\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) uv = \left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \quad (26)$$

由此可见，(24) 式等号右端的被积函数实际上是基本流的相对涡度与扰动的雷诺应力的乘积，通过扰动的雷诺应力与基本流的相互作用，从基本流中获取动能，让扰动能量增长，从而使扰动发展；或者通过这种相互作用，把扰动能量输送给基本流，从而导致扰动能量损失，扰动衰减。而且从(26)式的最后一项可知，对于具有正涡度的气旋式基本流，若扰动流线呈西南—东北走向，则扰动发展，若呈东南—西北走向，则扰动衰减；对于具有负涡度的反气旋式基流，情况相反，即扰动流线呈西南—东北走向，扰动衰减，而呈东南—西北走向，扰动发展 (Pedlosky, 1987; 曾庆存, 1979, 1982, 1983)。需要注意的是，这并非扰动发展的充分条件，这只是表明这种情况下扰动存在发展或者衰减的可能性。对于有旋流动，涡度或者位涡对于流动具有很强的约束，只有满足某些特定的涡度或者位涡条件，基本流的能量才有可能转变为扰动的能量，令扰动发展。

对于位涡动力学，(7) 式可以写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q + H Q_y \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

其中 $q = \nabla^2 \psi - f_0 Q \psi$ 为扰动位涡, 将上式乘以 $\frac{q}{H Q_y}$, 在所考虑的区域上积分, 并计及南北向的刚壁边界条件和东西方向的周期边界条件, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{q}^2}{2 H Q_y} dy = 0 \quad (28)$$

如前面所述, 横线表示对 x 的积分或者平均。由于 $H > 0$, 如果扰动发展, 等号右边应该大于零, 扰动涡旋加强, 整个区域的位涡拟能随时间增长。现在该式为零, 只可能有两种情况, 一是 $q \equiv 0$ 或者 q 为常量, 这对应于稳定的情况 (因为 H 和 Q_y 均与时间无关); 而是在区间 (y_1, y_2) 上至少存在一点 y_s , 在该点上 Q_y 变号, 即

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_s-\epsilon} \frac{\bar{q}^2}{2 H_1 Q_{y1}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_s+\epsilon}^{y_2} \frac{\bar{q}^2}{2 H_2 Q_{y2}} dy = 0 \quad (29)$$

其中 H_1 、 H_2 及 Q_{y1} 、 Q_{y2} 分别是 H 和 Q_y 在相应区间上的取值, $\epsilon > 0$ 为一小量, 旨在去掉奇点。由积分中值定理, 可得

$$\frac{1}{\tilde{H}_1 \tilde{Q}_{y1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_s-\epsilon} \frac{\bar{q}^2}{2} dy + \frac{1}{\tilde{H}_2 \tilde{Q}_{y2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_s+\epsilon}^{y_2} \frac{\bar{q}^2}{2} dy = 0 \quad (30)$$

上式中的 $\tilde{H}_1$ 、 $\tilde{Q}_{y1}$ 以及 $\tilde{H}_2$ 、 $\tilde{Q}_{y2}$ 分别表示该量子相应区间的均值。由 (30) 式可知, 扰动发展时, 两个区域上位涡拟能均随时间增加, 但两个区间上 Q_y 符号相反, 故 (30) 式或者 (28) 式能够成立。这其实也就是 (17) 式给出的定理, 即扰动可能发展所必须满足的位涡动力学条件。在 y_s 上 Q_y 为零, 即 Q 取极值, 由 (27) 式, 此时有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q \equiv 0 \quad (31)$$

沿 $y = y_s$, q 为零或者常量。在上 Q_y 为零, 即 Q 取极值处, 无论是极大值还是极小值, 其实都对应于基本流切变最强处, 此处基本流的相对正涡度或者相对负涡度数值都为最大, 这里有最多的正相对涡度或者负相对涡度, 正压不稳定出现时, 这里盈余的相对涡度就会被输送至相对涡度数值较小的地方, 使得相对涡度的空间分布趋于均匀, 也就是令基本流的速度切变即动能梯度的空间分布趋于均匀。

至此所得到的扰动可能发展必须满足的两个条件, 即扰动能量随时间增长必须满足的条件, 以及扰动位涡拟能随时间增长所必须满足的条件, 二者互不相同而且各自独立, 而扰动若可能发展, 扰动能量和扰动位涡拟能同时随时间增长才行。现在探讨什么情况下, 这两个条件可以同时得以满足。

用 $-\psi H Q_y$ 乘以 (7) 式, 经过类似上述推导能量方程的推演, 不难得到用 $H Q_y$ 加权的广义能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} H Q_y \bar{\epsilon} dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U H Q_y}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial (U - U_s) H Q_y}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (32)$$

其中 $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} f_0 Q \psi^2$ 为扰动能量密度, U_s 是 Q_y 为零处即 y_s 处 U 的值, 为常量, 因此增加或者去掉该量并不改变以上被积函数中的偏微商。以上广义能量方程可以写成以下形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} H Q_y \bar{\mathcal{E}} dy = \int_{y_1}^{y_2} (U - U_s) H Q_y \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} dy = - \int_{y_1}^{y_2} (U - U_s) H Q_y \overline{vq} dy \quad (33)$$

用 q 乘以 (27) 式, 可以得到位涡拟能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\overline{q^2}}{2} dy = - \int_{y_1}^{y_2} H Q_y \overline{vq} dy \quad (34)$$

再用 Uq 乘以 (27) 式, 可以得到用 U 加权的广义位涡拟能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{U \overline{q^2}}{2} dy = - \int_{y_1}^{y_2} U H Q_y \overline{vq} dy \quad (35)$$

用 U_s 乘以 (34) 式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{U_s \overline{q^2}}{2} dy = - \int_{y_1}^{y_2} U_s H Q_y \overline{vq} dy \quad (36)$$

(35) 式减去 (36) 式, 再与 (33) 式相减

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} H Q_y \bar{\mathcal{E}} dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(U - U_s) \overline{q^2}}{2} dy \quad (37)$$

(37) 式中, $\mathcal{E}$ 、 H 、 q^2 均正定, 这样只要保证 Q_y 与 $U - U_s$ 同号, 扰动就可能发展。这是 Fjørtoft 定理的要求, 也是能量约束和位涡约束共同作用的结果。从 (34) 式还可以看出, 若扰动位涡拟能随时间增长, 扰动位涡的经向输送 $\overline{vq}$ 必须与基本流的位涡梯度 $-Q_y$ 同号, 也就是扰动位涡必须顺着基本流位涡梯度的方向输送, 即由基本流位涡高值区向基本流位涡低值区输送, 其结果就是削弱基本流的位涡梯度, 使得基本流的位涡在经向的分布趋于均匀。这种效应也可以从扰动位涡经向输送对于基本流的直接影响上反映出来, 在此我们考虑可随时间变化的纬向基本流, 其方程不难得到 (Pedlosky, 1987; Vallis, 2017)

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \quad (38)$$

此处的 $\bar{U}$ 为纬向平均的基本流, 但可随时间变化 (38) 对 y 积分, 经过简单推演可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \bar{U} dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} dy = \int_{y_1}^{y_2} \overline{vq} dy \quad (39)$$

为方便讨论, 引入经向位移 δy (Pedlosky, 1987)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta y = v \quad (40)$$

代入 (27) 式 (若考虑随时间变化纬向平均基流, 亦能推得形式上与 (27) 式完全相同的扰动位涡方程) 则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) q = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta y H Q_y \quad (41)$$

由此可求得 q 的一个特解为

$$q = -\delta y H Q_y \quad (42)$$

于是有

$$\overline{vq} = -\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\overline{\delta y^2})}{2}\right] H Q_y \quad (43)$$

把 (43) 式代入 (39) 式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \bar{U} dy = - \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\overline{\delta y^2})}{2}\right] H Q_y dy \quad (44)$$

对于发展的扰动, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\overline{\delta y^2})}{2}$ 为正, 又因 H 为正, 在 $Q_y > 0$ 的区间, 不稳定将使基本流减弱; 而在 $Q_y < 0$ 的区间, 不稳定则将使基本流增强。总体效果是令基本流在南北向的分布更加均匀, 也就是令基本流动能的南北梯度减小。另外, 基本流的方程可以写成 Crocco 形式 (Batchelor, 1967)

$$QH U = -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH + \frac{1}{2}U^2\right) \quad (45)$$

可见, 对于给定的 U (即沿给定的流线), 位涡取值对应于流动的总能量的梯度, 即伯努利 (Bernoulli) 函数的梯度, 位涡的极值点则对应于总能量的梯度的极值点, 而不是对应于能量本身的极值点。由此看来, 能量的空间分布本身只是为扰动发展提供了最基本的条件, 位涡的空间分布通过控制扰动位涡的输送方向来进一步决定不稳定是否可能发生。只有能量条件和位涡条件相互匹配, 不稳定才可能发生。(26) 式确定的基本流的廓线与扰动流线的匹配关系是能量方程所要求的最基本的条件, (17) 式的瑞利—郭晓岚定理是位涡动力学要求满足的条件, (22) 式的 Fjørtoft 定理则是能量学和位涡动力学相彼此调一致的需要。

5 总结与讨论

本文在考虑地转约束的情况下, 重新审视了正压不稳定这一经典问题, 对前人的结果做了补充与修正。对于大气和海洋等地球流体的大尺度运动,

地转约束是基本前提。天气尺度扰动赖以发生发展的背景是比其尺度更大的行星尺度系统，行星尺度系统受到地转约束的影响更为强烈，必须考虑地转的约束。对于满足地转平衡的基本流，瑞利—郭晓岚定理修正为：若满足地转平衡的基本流可能出现不稳定，基本流的位涡梯度需在某个纬度取极值。Fjørtoft 定理相应地表述为：若满足地转平衡的基本流可能出现不稳定，需满足 Q_y 与 $U - U_s$ 同号。即原结论中的绝对涡度修正为位涡，这是地转约束也是位涡约束的结果。以往研究工作中，基本流的选择存在任意性，事实上，如果基本流不满足地转平衡，那么首先会通过地转适应过程，在较短的时间内达到地转平衡，再在准地转情况下进入缓慢的演变过程，此时若出现不稳定，则必然是地转流的不稳定，所以本文的提法更加合理。此外，计入地转约束之后，对于西风基本流，正压不稳定出现的条件更加难以满足，而东风基本流则更容易满足正压不稳定的条件。

瑞利—郭晓岚定理和 Fjørtoft 定理在所见到的文献中，仅作为数学推导的结论，至于其物理含义则鲜有阐明。我们从位涡动力学出发，结合能量方程，得到了与瑞利—郭晓岚定理和 Fjørtoft 定理等价的结果，并从能量学和位涡动力学的角度，对瑞利—郭晓岚定理和 Fjørtoft 定理进行了诠释。瑞利—郭晓岚定理要求基本流位涡至少存在一个极值点， Q 取极值处，无论是极大值还是极小值，其实都对应于基本流切变最强处，此处基本流的相对正涡度或者相对负涡度数值都为最大，这里有最多的正相对涡度或者负相对涡度。位涡极值点的存在，可以保证扰动位涡的输送为顺梯度方向，这样就可以把位涡盈余处多余的位涡向位涡不足处输送，其结果是让基本流的位涡在空间上更加均匀。扰动发展，需要满足能量关系的约束，即基本流的形态和扰动的形态需要满足能够扰动从基本流中获取能量的要求，同时还需满足位涡动力学的约束条件，而且能量约束和位涡动力学约束要相互协调一致，即发展的扰动，其作用在于将基本流的动能从盈余处向不足处输送，同时将基本流的涡度或者位涡由从盈余处向不足处输送，最终的结果是使得基本流的动能梯度和位涡梯度趋于极小，基流在纬向的分布趋于均匀。Fjørtoft 定理则是能量约束和位涡动力学约束协调一致的体现。

需要特别指出的是，位涡极值点并不对应能量或者动能的极值点，而是对应能量梯度（动能梯度）的极值点，可以认为，能量的空间分布形态为发生不稳定提供了条件，而基本流位涡或者涡度的分布则通过控制扰动涡度的输送方向来决定不稳定是否可能出现。这样才能保证发生不稳定之后，通过扰动对位涡和能量的输送，最终的结果是使得基本流的动能梯度和位涡梯度趋于均匀。

相对于经典流体无粘平行剪切流的不稳定，地球流体由于科氏力的存在，正压不稳定更难出现。科氏力的存在，会抑制不稳定的出现，这是因为

地转平衡的约束,把能量以基本流动能的形式储存在基本流之中,要从中提取有效能量供扰动发展就更加困难。从位涡动力学角度来看,由于基本流的位涡沿流线守恒这一约束,限制了把基本流位涡转化为扰动位涡的过程,使得不稳定出现的条件更加苛刻。不过计入科氏力及其随纬度的变化之后,因为科氏力不做功,所以在能量方程里没有体现,科氏力对于不稳定的必要条件的影响也只体现于数量上,并没有改变其实质。由此看来,导致正压不稳定的根本原因还是蕴藏在基本流之中,决定于基本流的涡度及动能的空间分布,即与基本流流速的空间结构密切相关。

参考文献

- Batchelor G K. 1967. An Introduction to Fluid Mechanics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Drazin P G, Reid W H. 2004. Hydrodynamic Stability [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fjørtoft, R. 1950. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex [J] Geofis. Publ.17, 1-52.
- Gill A E. 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics [M]. Academic Press.
- Kuo H L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere [J]. Journal of Meteorology, 6, 105-122. doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006<0105:DIOTDN>2.0.CO;2
- Kuo H L. 1973. Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory [J]. Advances in Applied Mechanics, 13, 247-330. doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70145-5
- Lin C C. 1945. On the stability of two-dimensional parallel flows. II. Stability in an inviscid fluid [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 4(3): 218-234.
- Pedlosky J. 1987. Geophysical Fluid Dynamics [M]. New York: Springer-Verlag.
- 钱永甫, 陈月娟, 王谦谦, 巢纪平. 2006. 郭晓岚教授对大气科学的杰出贡献 [J]. 气象学报, 64(4): 408-411. Qian Y F, Chen Y J, Wang Q Q and Chao J P. 2006. Creative and great contributions of professor Guo Xiaolan (Hsiao Lan Kuo) to the atmospheric sciences—A Memorial of Professor Guo Xiaolan [J]. Acta Meteorologica Sinica, 64(4): 408-411.
- Rayleigh L. 1880. On the Stability, or Instability, of certain Fluid

Motions [J]. Proceedings London Mathematical Society, s1-11, 57-72.
doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57

Vallis G K. 2017. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.

曾庆存. 1979. 数值天气预报的数学物理基础 [M]. 北京: 科学出版社.

Zeng Q C. 1979: The physical and mathematical basis of numerical weather prediction (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.

Zeng Q C. 1982. On the evolution and interaction of disturbances and zonal flow in rotating barotropic atmosphere [J]. Journal of the Meteorological Society of Japan, 60(1):24-31.

Zeng Q C. 1983. The evolution of a Rossby-wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere [J]. Journal of Atmospheric Sciences, Journal of Atmospheric Sciences, 40(1): 73-84.