

正压地转流的空间不稳定

林一骅^{1,2}

1、LASG 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

2、中国科学院大学地球与行星科学学院, 北京 100049

2022-02-12 T 16:00

摘要

与时间不稳定一样, 空间不稳定也是地球流体中扰动发生发展的重要机制。基于标准模方法, 研究了正压地转流对于小扰动的空间不稳定问题, 并得到发生空间不稳定的必要条件。该必要条件指出, 若正压地转流可能发生空间不稳定, 其位涡对于纬度的偏微商与小扰动相对于该地转流的相速必须在某些纬度带异号。在附加适当的限制的情况下, 空间不稳定与时间不稳定满足相同的必要条件, 即 Rayleigh—Kuo 定理和 Fjørtoft 定理。

关键词: 地转流动 正压 空间不稳定 必要条件

Spatial Instability of Barotropic Geostrophic Flow

Lin Yihua^{1,2}

1 LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100029

2 College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy
of Sciences, Beijing 100049

Abstract Like temporal instability, spatial instability also plays an important role for the development and evolution of disturbances in geophysical fluids. Based on the normal mode method, the spatial instability of the barotropic geostrophic flow for is investigated. The necessary condition for spatial instability of a barotropic geostrophic base flow with respect to a given small

¹作者简介 林一骅, 男, 1966 年出生, 研究员, 主要从事地球流体力学与海洋环流数值模拟研究。E-mail: linyh@lasg.iap.ac.cn

disturbances is the partial differential quotient of the potential vorticity of the base flow with respect to the latitude has the same sign as that of the phase velocity of the disturbance. Under certain conditions, like the classical temporal instability theory, the same criteria as the necessary conditions are provided, namely the Rayleigh-Kuo theorem and the Fjørtoft theorem.

Keywords Geostrophic flow, barotropic, spatial instability, necessary conditions

1 引言

地转流的正压不稳定是大气和海洋这类地球流体大尺度运动中存在的主要不稳定类型之一，是无粘性流体平行剪切流动不稳定问题在地球流体运动中的推广，是天气尺度系统发生发展的重要机制。Rayleigh (Rayleigh, 1880) 在研究无粘性流体平行剪切流动不稳定问题时指出，无粘性平行剪切流出现不稳定的必要条件是流速的廓线必须存在至少一个拐点即基本流的涡度至少存在一个极值点，此即著名的 Rayleigh 定理。Fjørtoft (Fjørtoft, 1950) 进一步研究表明，无粘性的平行剪切流要出现不稳定，除了满足 Rayleigh 定理，还需要满足 $(U - U_s) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} < 0$ ，即 Fjørtoft 定理，其中 U_s 为基本流涡度出现极值处的流速。Kuo (Kuo, 1949) 把 Rayleigh 的结果推广至旋转大气的大尺度运动，得到大气大尺度运动存在正压不稳定的必要条件是基本流动的绝对涡度存在极值点。关于平行剪切流不稳定问题在 Lin (Lin, 1945) 的论文以及 Drazin 和 Reid (Drazin 和 Reid, 2004) 的专著中有详尽的总结，Kuo (Kuo, 1973) 的综述文章和曾庆存 (曾庆存, 1979)、Gill (Gill, 1982)、Pedlosky (Pedlosky, 1987) 以及 Vallis (Vallis, 2017) 的专著则详细论述了地球流体正压不稳定问题。

这些经典工作主要研究给定的基本流对于小扰动的的时间稳定性，即小扰动是否随时间指数增长。事实上，扰动随空间增长即空间不稳定也是大气和海洋中扰动发生发展的重要机制。空间不稳定理论最早由 Landau (Landau, 1946) 研究等离子体问题时提出，并在其著作中有系统论述 (Landau 和 Lifshitz, 1959)。此外，关于流体运动空间不稳定问题在 Drazin 和 Reid (Drazin 和 Reid, 2004) 的专著中亦有介绍。Diwan (Diwan, 2015) 专门针对无粘性流体平行剪切流动空间不稳定问题讨论了不稳定发生的必要条件，提出了与无粘性流体平行剪切流动时间不稳定问题的 Rayleigh 定理和 Fjørtoft 定理相对应的空间稳性判据。海洋和大气系统中的空间不稳定，通常体现在某一天气系统或者海洋系统，在目前的空间位置上是稳定的，该系

统在移动过程中由于背景场的某种空间不均匀性,使得该系统移动到新的空间位置之后,其强度发生了显著增强(线性情况下为指数增长)。这种天气或者海洋系统的发展,表现为系统强度随空间的生长,所以称为空间不稳定。对于旋转大气的空间不稳定问题的关注,最早见于谢义炳(谢义炳, 1981)关于斜压行星波的稳定性问题的研究,该工作探讨了二层模式中斜压大气行星波时间和空间不稳定问题,但所得判据不能直接与经典的 Rayleigh 定理和 Fjørtoft 定理相对应,也没有讨论所得判据与 Rayleigh 定理和 Fjørtoft 定理之间的联系。

本文借鉴 Diwan (Diwan, 2015) 的方法,针对正压地转流讨论其空间不稳定的必要条件,进而得出与正压地转流时间不稳定问题的 Rayleigh 定理和 Fjørtoft 定理相对应的空间稳性判据。文章将在以下几部分从研究所用的基本方程出发,导出准地转位涡方程,用标准模方法给出正压地转流空间不稳定的必要条件,并与时间不稳定的相应结果加以比较,指出二者之间的联系和相似性,最后对所得结论进行总结并加以讨论。

2 基本方程

设 U 为纬向基本流,且满足地转平衡,即

$$fU = -g \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1)$$

其中 U 基本流, $H = H(y)$ 是流体层厚度,仅为 y 的函数, $f = f_0 + \beta y$ 为科氏参数, f_0 为参考纬度的科氏参数,取作常量, β 为 Rossby 参数,亦取为常量; g 为重力加速度。基本流动为地转流,故满足位涡守恒(此处表现为位涡沿流线不变),因而容易得到

$$Q = \frac{f + \bar{\zeta}}{H} = \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} = Q_0(y) \quad (2)$$

其中 $\bar{\zeta} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ 为基本流的相对涡度, Q 为基本流动的位涡,二者均仅为 y 的函数,对于固定的 y 值, Q 为常量,即位涡沿流线守恒。

现在我们要研究满足(1)和(2)的基本流动对于小扰动的稳定性。描述小扰动的运动方程和连续方程分别为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

u 、 v 为扰动速度， h 为扰动高度。计及 U 、 H 均为 y 的函数，由式 (3)、(4) 和 (5) 容易得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\zeta - \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} h\right) + \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{f - \frac{\partial U}{\partial y}}{H} \frac{\partial H}{\partial y}\right) v = 0 \quad (6)$$

$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 为扰动流的相对涡度。若扰动流 u 、 v 亦满足准地转，则式 (6) 可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (\nabla^2 \psi - f_0 Q \psi) + \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

此即扰动的准地转位涡方程。其中 $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ， $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ， ψ 为地转流函数， $f_0 h = g\psi$ ， ∇ 为 Hamilton 算子。若不计 (7) 中与辐合辅散相关的项 $f_0 Q \psi$ 以及与基本流动相应的压力梯度相关的项 $Q \frac{\partial H}{\partial y}$ ，则简化为 Kuo (Kuo, 1949) 中的方程。事实上， $\frac{\partial H}{\partial y}$ 至关重要，若没有该项，则基本流动 U 将无法维持，讨论起稳定与否是基础也将随之不存。对于基本流位涡沿流线守恒方程即式 (2) 对 y 求偏微商，有

$$Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - Q \frac{\partial H}{\partial y}}{H} \quad (8)$$

这样 (7) 可以表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (\nabla^2 \psi - f_0 Q \psi) + Q_y H \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

与 (9) 相对应的 y 方向的边界条件为

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{当 } y = y_1, \quad y = y_2 \quad (10)$$

如此一来，扰动的空间不稳定问题归结为方程 (9) 在边界条件 (10) 下的定解问题，若方程的解 ψ 的值随空间变化而增大，则扰动发展，即空间不稳定；反之，若 ψ 的值随空间变化而减小，则扰动衰减，即为空间稳定。

由于方程 (9) 中的 U 、 Q 和 H 均与变量 x 和 t 无关，因此可设方程的解 ψ 具有以下形式

$$\psi = \phi(y) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (11)$$

其中 σ 为波动的圆频率， k 为 x 方向的波数。把 (11) 代入 (9) 和 (10)，则有

$$\left(U - \frac{\sigma}{k}\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (k^2 + f_0 Q)\right] \phi + Q_y H \phi = 0 \quad (12)$$

$$\phi = 0, \quad \text{当 } y = y_1, \quad y = y_2 \quad (13)$$

若 $U - \frac{\sigma}{k} \neq 0$, 则 (12) 可以改写成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (k^2 + f_0 Q) \right] \phi + \frac{1}{U - \frac{\sigma}{k}} Q_y H \phi = 0 \quad (14)$$

此即广义 Rayleigh 方程。以 ϕ 的共轭复数 ϕ^* 乘以式 (14) 并对 y 积分, 利用式 (13) 的边界条件, 可得

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 - \frac{1}{U - \frac{\sigma}{k}} Q_y H |\phi|^2 \right] dy = 0 \quad (15)$$

以下将从 (15) 式出发来研究空间不稳定问题。

3 对应于 Rayleigh 定理的空间不稳定必要条件

对于时间不稳定问题, 由 (11) 可知, 若扰动不稳定, σ 为复数且要存在正的虚部, 即 $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$, 且 $\sigma_I > 0$, 而波数 k 为实数。将 $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ 代入 (15), 分离其实部和虚部, 可得其虚部为

$$\frac{\sigma_I}{k} \int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y H |\phi|^2}{|U - \frac{\sigma}{k}|^2} dy = 0 \quad (16)$$

其中 σ_I 是时间增长 (衰减) 率。若要保证 $\sigma_I > 0$, 即出现时间不稳定, 式 (16) 中则只能令积分项为零, 又 $|U - \frac{\sigma}{k}|^2$ 和 $|\phi|^2$ 以及 H 均为非负, 故要求 Q_y 在区间 (y_1, y_2) 上变号, 即存在 $y_s \in (y_1, y_2)$, 使得

$$Q_y|_{y=y_s} = 0 \quad (17)$$

这是正压地转流时间不稳定必要条件, 即 Rayleigh 定理或 Rayleigh—Kuo 定理, 该定理要求正压地转流时间不稳定必要条件为在区间 (y_1, y_2) 中的某处 $y = y_s$, 基本流的位势涡度存在极值点。

对于空间不稳定问题, 从 (15) 式出发, 保持 σ 为实数, 而令波数 k 为复数, 即 $k = k_R + ik_I$ 。为方便计, 令 $c = \frac{\sigma}{k}$, c 为复相速, 其实部和虚部分别为 $c_R = \frac{\sigma k_R}{k_R^2 + k_I^2}$ 和 $c_I = -\frac{\sigma k_I}{k_R^2 + k_I^2}$ 。将复波数 $k = k_R + ik_I$ 代入 (15), 分离虚部与实部, 可得其虚部为

$$k_I \int_{y_1}^{y_2} \left(2k_R + \frac{\sigma}{k_R^2 + k_I^2} \frac{Q_y H}{|U - c|^2} \right) |\phi|^2 dy = 0 \quad (18)$$

对于空间不稳定的扰动, $k_I \neq 0$, 对于空间增长的扰动, k_I 的正负号则依赖于扰动的群速 $\frac{d\sigma}{dk}$ 。对于顺着基本流传播的增长的扰动 $k_I < 0$, 而对于逆基本流传播的增长的扰动 $k_I > 0$ 。为保证 $k_I \neq 0$, (18) 式中的积分部分必须为零。(18) 的积分部分亦可写成

$$\frac{2k_R(k_R^2 + k_I^2)}{\sigma} \int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y H}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy \quad (19)$$

由 (19) 式可见, Q_y 必须在 (y_1, y_2) 上或至少在 (y_1, y_2) 上的某些子区间上与相速 $c_{px} = \frac{\sigma}{k_R}$ 异号, 否则 (19) 式将不成立。由此看来, 与时间不稳定的 Rayleigh—Kuo 定理要求在 Q_y 在区间 (y_1, y_2) 上有极值点有所不同, 空间不稳定问题更加复杂, 这与方程 (9) 的性质有关, 该方程中对于时间的微商是一阶的, 而对于空间的微商尤其对于 x 的微商阶数较高, 必然导致空间问题的复杂性。从 (19) 式可以得到关于以下空间不稳定必要条件的定理。

定理 1 正压地转流对于小扰动不稳定的必要条件是在 (y_1, y_2) 上或至少在 (y_1, y_2) 上的某些子区间上该地转流的位涡对于 y 的偏微商 Q_y 与小扰动的相速 $c_{px} = \frac{\sigma}{k_R}$ 异号。

由定理 1 看来, 空间不稳定的必要条件似乎与 Rayleigh—Kuo 定理无关, 二者似乎是相互独立的。实际上, 在一定条件下, 二者密切相关, 满足空间不稳定必要条件即定理 1 的流动, 也满足 Rayleigh—Kuo 定理。对于正压地转流, 由 (19) 式可知, 三种类型的扰动可能出现。

第一种情况, 依定理 1, 若在某些南北区域即子区间 $(y_\alpha, y_\beta) \subset (y_1, y_2)$ 出现空间不稳定的非中性波, 则要求在这些 $c_{px} > 0$ 或者 $c_{px} < 0$ 。对于 $c_{px} > 0$, (19) 式等号左端大于零, 这意味着等号右端也大于零, 这就要求在这些子区间上 $Q_y < 0$; 类似地, 对于 $c_{px} < 0$, 则要求在这些子区间上 $Q_y > 0$ 。如果在 (y_1, y_2) 的某些子区间内有 $c_{px} > 0$, 而在另外一些子区间上有 $c_{px} < 0$, 这样必定存在某些属于 (y_1, y_2) 的点, 在该点上 $Q_y = 0$, 即满足 Rayleigh—Kuo 定理。

第二种情况, 若在整个区间 (y_1, y_2) 上, 总是有 $c_{px} > 0$, 把 (19) 改写成如下形式

$$\frac{k_R^2 + k_I^2}{c_{px}} \int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy = - \left(\int_{y_s}^{y_2} \frac{Q_y^+ H}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy + \int_{y_1}^{y_s} \frac{Q_y^- H}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy \right) \quad (20)$$

即在 (y_1, y_2) 的子区间 (y_s, y_2) 上 Q_y 取正值 Q_y^+ , 在另外一个子区间 (y_1, y_s) 上 Q_y 取负值 Q_y^- , 即 Q_y 在 y_s 点变号, 这样只要等号右端的第一个积分小于第二个积分, 仍然可以保证 (20) 式成立, 即定理 1 成立, 即满足空间不稳定的必要条件, 同时满足 Rayleigh—Kuo 定理。另外一种可能是在整个区间 (y_1, y_2) 上, 均有 $Q_y < 0$, 此时满足定理 1, 空间不稳定可能出现, 但不满足 Rayleigh—Kuo 定理。

第三种情况, 若在整个区间 (y_1, y_2) 上, 总是有 $c_{px} < 0$, (19) 式改

写成

$$\frac{k_R^2 + k_I^2}{c_{px}} \int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy = - \left(\int_{y_s}^{y_2} \frac{Q_y^- H}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy + \int_{y_1}^{y_s} \frac{Q_y^+ H}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy \right) \quad (21)$$

结果和第二种情况类似, 在 (y_1, y_2) 的子区间 (y_s, y_2) 上 Q_y 取负值 Q_y^- , 在另外一个子区间 (y_1, y_s) 上 Q_y 取正值 Q_y^+ , 即 Q_y 在 y_s 点变号, 这样只要等号右端的第一个积分的绝对值小于第二个积分的绝对值, 仍然可以保证 (21) 式成立, 定理 1 成立, 即满足空间不稳定的必要条件, 同时满足 Rayleigh—Kuo 定理。另外一种可能是在整个区间 (y_1, y_2) 上, 均有 $Q_y < 0$, 此时满足定理 1, 空间不稳定可能出现, 但不满足 Rayleigh—Kuo 定理。

由以上分析可见, 在很大程度上, 时间不稳定的必要条件和空间不稳定的必要条件是相互协调的, 二者都需要在南北方向上存在基本流位涡的极值点, 只有第二种情况和第三种情况的部分情形会出现满足定理 1, 即满足空间不稳定的必要条件而不满足 Rayleigh—Kuo 定理。如果对正压地转流做适当的限制, 即要求流动既满足时间不稳定的必要条件, 同时也满足空间不稳定的必要条件, 则正压地转流时空不稳定的必要条件可总结成如下的定理, 这其实就是同时考虑时空不稳定情况下推广了的 Rayleigh—Kuo 定理。

定理 2 对于正压地转流动, 其时间与空间不稳定的必要条件为在区间 (y_1, y_2) 中的某处 $y = y_s$, 该正压地转流的位势涡度存在极值点。

4 对应于 Fjøltoft 定理的空间不稳定必要条件

Rayleigh—Kuo 定理也称为正压不稳定的局部必要条件, 因为该定理只要求基本流的位涡存在极值点, 极值点的存在与否是流动廓线局部性质, 而 Fjøltoft 定理被称为正压不稳定的全局必要条件, 其原因在于该定理考虑了不同纬度上, 流速之间的相互关系, 也就是流速廓线的全局结构。

对于时间不稳定问题, 类似上节, 将 $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ 代入 (15), 分离其实部和虚部, (15) 式的实部亦不难得到

$$\frac{\sigma_R}{k} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 - \frac{U - \frac{\sigma_R}{k}}{|U - \frac{\sigma}{k}|^2} Q_y H |\phi|^2 \right] dy = 0$$

或者

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k^2 + f_0 Q) |\phi|^2 \right] dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - \frac{\sigma_R}{k}}{|U - \frac{\sigma}{k}|^2} Q_y H |\phi|^2 \right] dy \quad (22)$$

由于 Q 通常为正值, 故 (22) 式等号右端积分为非负, 又 $|U - c|^2$ 和 $|\phi|^2$ 及

H 均为非负, 这样要使得 (22) 式成立, 必须满足

$$\left(U - \frac{\sigma_R}{k}\right) Q_y > 0$$

这样就有

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - \frac{\sigma_R}{k}}{|U - \frac{\sigma}{k}|^2} Q_y H |\phi|^2 \right] dy > 0 \quad (23)$$

因若存在不稳定, 则需 (16) 式中的积分为零, 将 (16) 式中的积分乘以 $c_R - U_s$ (其中 U_s 为 (17) 式成立时即 Q 在 $y = y_s$ 取极值处的基本流 U 的值), 与 (23) 式相加, 则有

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U - U_s}{|U - \frac{\sigma}{k}|^2} Q_y H |\phi|^2 \right] dy > 0 \quad (24)$$

而这必须满足

$$(U - U_s) Q_y > 0 \quad (25)$$

这是正压地转流时间不稳定的必要条件, 即 Fjørtoft 定理, 该定理要求在区间 (y_1, y_2) 上, $U - U_s$ 与 Q_y 同号, 这相当于要求在 $Q_y > 0$ 的子区间上 U_s 为 U 的最小值, 而在 $Q_y < 0$ 的子区间上 U_s 为 U 的最大值, 这是对于基本流的速度廓线全局结构的要求。

对于空间不稳定而言, 亦如上节, 保持 σ 为实数, 而令波数 k 为复数, 即 $k = k_R + ik_I$ 。并记 $c = \frac{\sigma}{k}$, c 为复相速, 其实部和虚部分别为 $c_R = \frac{\sigma k_R}{k_R^2 + k_I^2}$ 和 $c_I = -\frac{\sigma k_I}{k_R^2 + k_I^2}$ 。将复波数 $k = k_R + ik_I$ 代入 (15), 分离虚部与实部, 可得其实部为

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k_R^2 - k_I^2 + f_0 Q) |\phi|^2 - \frac{U - c_R}{|U - c|^2} Q_y H |\phi|^2 \right] dy = 0 \quad (26)$$

用 $c_R - U_s$ 乘以 (19) 式再与 (26) 式相加, 有

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \left[\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + (k_R^2 - k_I^2 + f_0 Q) |\phi|^2 \right] dy - \frac{2k_R(k_R^2 + k_I^2)(c_R - U_s)}{\sigma} \int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{U - U_s}{|U - c|^2} Q_y H |\phi|^2 dy \end{aligned} \quad (27)$$

把 (27) 式稍作变形, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + f_0 Q |\phi|^2 \right) dy + k_R^2 \left(\frac{2U_s}{c_R} - \frac{k_I^2}{k_R^2} - 1 \right) \int_{y_1}^{y_2} |\phi|^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{U - U_s}{|U - c|^2} Q_y H |\phi|^2 dy \end{aligned} \quad (28)$$

为叙述方便, 记 $\kappa = \frac{2U_s}{c_R} - \frac{k_I^2}{k_R^2} - 1$, 如果 (28) 式等号左端为正, 则可得到与 Fjørtoft 定理相同的空间不稳定的必要条件。因为正压地转基本流的

位涡 Q 通常为正值, 所以 (28) 式等号左端第一项为正, 若 κ 为正, 则第二项也为正, 此时 (28) 式等号右端也必定为正, 于是有 $(U - U_s) Q_y > 0$ 。但事实上 κ 的正负难以预先确定, 从 κ 的表达式可以看出, 这决定于参数 c_R 、 k_R 、 k_I 和基本流的状态 U_s 。因为参数太多, 对于一般情况很难得到确定的结论。此处仅就一个较为特殊但却重要的情况, 即近中性扰动做进一步的探讨。实际上, 近中性情况对于不稳定问题具有特别重要的意义, 因为中性情况与不稳定情况的区别是本质性的, 如果不稳定进一步发展, 使得扰动远离中性情况, 这个过程则是量的变化。已有的经典研究结果表明, 对于无粘的平行剪切流动, 若基本流的速度廓线存在拐点, 则一定会出现中性扰动 (von Mises 和 Friedrichs, 1971; Drazin 和 Reid, 2004)。这个针对无粘平行剪切流动的结果容易推广到正压地转流动。使用 von Mises 和 Friedrichs (von Mises 和 Friedrichs, 1971) 的方法, 从广义 Rayleigh 方程 (14) 出发, 借助微分方程的 Sturm-Liouville 理论及变分原理, 则可以针对正压地转流动得到与 Mises 和 Friedrichs 类似的结论, 该结果也可以使用摄动方法得到 (Lin, 1945), 该问题我们将另文论述。以该中性扰动 ($k_I = 0$) 为基准, 将偏离中性扰动的一般扰动对 k_I 做 Taylor 展开

$$c_R = c_{Rn} + \frac{\partial c_R}{\partial k_I} \Big|_n k_I + O(k_I^2)$$

其中 c_{Rn} 是中性波的相速。对上式取倒数, 并用二项式展开

$$\frac{1}{c_R} = \frac{1}{c_{Rn}} \left[1 - \frac{\partial c_R}{\partial k_I} \Big|_n \frac{k_I}{c_{Rn}} + O(k_I^2) \right] \quad (29)$$

这样 κ 可以写成

$$\kappa = \frac{2U_s}{c_{Rn}} \left[1 - \frac{\partial c_R}{\partial k_I} \Big|_n \frac{k_I}{c_{Rn}} + O(k_I^2) \right] - \frac{k_I^2}{k_R^2} - 1 \quad (30)$$

中性扰动的相速 c_R 满足 $c_{Rn} = U_s$ (Drazin 和 Reid, 2004), 把该条件代入 (30) 式, 按 k_I 的幂次合并相应的项可得

$$\kappa = 1 - 2 \frac{\partial c_R}{\partial k_I} \Big|_n \frac{k_I}{c_{Rn}} + O(k_I^2) \quad (31)$$

由 (31) 式可见, 当 $k_I \rightarrow 0$ 时, 有 $\kappa \rightarrow 1$ 。此时 (28) 式等号左端为正, 这意味着 $(U - U_s) Q_y > 0$ 。这样对于近中性的空间不稳定问题, 可以得到与时间不稳定问题的 Fjørtoft 定理相对应的定理。

定理 3 对于正压地转流动, 若扰动是近中性的, 其空间不稳定的必要条件是该正压地转流动的流速与位涡满足 $(U - U_s) Q_y > 0$, 其中 U_s 是 $Q_s = 0$ 处 U 的值。

5 总结与讨论

本文针对正压地转流动讨论了其空间不稳定的必要条件，并通过与时间不稳定必要条件的对比，给出了同时适用于时间不稳定和空间不稳定的局地性必要条件即与 Rayleigh-Kuo 定理相对应的定理 2 以及全局性必要条件即与 Fjørtoft 定理相对应的定理 3，在一定的限制下，把时间不稳定和空间不稳定的必要条件统一起来，这表明在很大程度上流动的时间演化和空间结构之间存在密切的内在联系。这种联系体现在定理 2 和定理 3 对于正压地转流的局地特征与全局结构的要求上，即流动的位涡存在极值点，并且位涡对纬度的偏微商要和任意纬度的流速与位涡极值点流速之差正相关。由于定理 2 和定理 3 是正压地转流时间不稳定和空间不稳定共同的必要条件，这意味着满足时间不稳定即通常意义上的正压不稳定的流动，也很可能是空间不稳定的，这也令地球流体的更加可能通过这种机制促成天气尺度扰动的发生和发展。

由于定理 2 和定理 3 是在增加了限制条件的情况下得到的，所以这两个可以统一描述时间不稳定和空间不稳定必要条件的定理并不能完全涵盖空间不稳定的所有情形。只满足定理 1 的条件，在不满足定理 2 的情况下（此时一定不满足定理 3），即正压地转流的位涡不存在极值点或者正压地转流的流速廓线不存在拐点，此时流动时时间稳定的，但仍然有可能出现空间不稳定。从这个意义上来说，出现空间不稳定的条件更加宽泛。事实上，在实际的天气分析当中也发现，某些不满足时间不稳定条件的扰动，仍然可以发展，这有可能是空间不稳定的结果。由此可见，空间不稳定虽然与时间不稳定密切相关，但仍是一种独立的不稳定类型，其本身就能够导致天气尺度和次天气尺度系统的发生和发展，这在谢义炳（谢义炳，1981）的工作中已经明确指出。

在控制准地转运动的方程中，对于时间的微商是一阶，而对于空间的微商项是高阶的，这导致描述扰动空间变化比描述时间演变更加困难，针对空间不稳定的全局必要条件只讨论了近中性扰动的情况，要讨论一般情况则比较困难，同时这也导致难以通过能量学和位涡动力学的途径对空间不稳定问题进行研究，进而与本文所得的标准模方法的结果加以比较和印证。此外，本文仅就正压情况展开讨论，而对于地球流体来说，斜压情况更具普遍意义，希望将来能在本工作的基础上，对斜压流动的空间不稳定问题做进一步的探讨。

参考文献

- Diwan S S. 2015. Necessary conditions for spatial inviscid instability [J]. *Proceedings of the Royal Society A* 471: 20140607.
- Drazin P G, Reid W H. 2004. *Hydrodynamic Stability* [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fjørtoft, R. 1950. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex [J]. *Geofis. Publ.* 17, 1-52.
- Gill A E. 1982. *Atmosphere-Ocean Dynamics* [M]. Academic Press.
- Kuo H L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere [J]. *Journal of Meteorology*, 6, 105-122. doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006<0105:DIOTDN>2.0.CO;2
- Kuo H L. 1973. Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory [J]. *Advances in Applied Mechanics*, 13, 247-330. doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70145-5
- Landau L D. 1946. On the vibrations of the electronic plasma [J]. *Journal of Physics USSR* 10(1): 23-34.
- Landau L D, Lifshitz E M. 1959. *Fluid Mechanics* [M]. London: Pergamon Press.
- Lin C C. 1945. On the stability of two-dimensional parallel flows. II. Stability in an inviscid fluid [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, (3)4: 218-234.
- Pedlosky J. 1987. *Geophysical Fluid Dynamics* [M]. New York: Springer-Verlag.
- Rayleigh L. 1880. On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions [J]. *Proceedings London Mathematical Society*, s1-11, 57-72. doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57
- Vallis G K. 2017. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- von Mises R, and Friedrichs K O. 1971. *Fluid Dynamics* [M]. New York: Springer-Verlag.
- 谢义炳. 1981. 稳定的和不稳定的斜压行星波 [J]. *气象学报*, 39(1):44-58.
- Hsieh Y P. 1981. The stable and unstable planetary waves in the baroclinic atmosphere [J]. *Acta Meteorologica Sinica*, 39(1):44-58.
- 曾庆存. 1979. *数值天气预报的数学物理基础* [M]. 北京: 科学出版社.

Zeng Q C. 1979. The physcial and mathematical basis of numerical weather prediction (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.