惯性重力波与涡旋运动

林一骅 [1,2]　　黄啟巧 [3]
1、LASG　中国科学院大气物理研究所，北京 100029
2、中国科学院大学地球与行星科学学院，北京 100049
3、云南大学地球科学学院，昆明 650500

2025-05-16 T 15:02

摘要

本文基于尺度分析和量阶估计研究了正压地球流体在适应过程与演变过程中的惯性重力波与涡旋运动，着重探讨了在地转适应过程和准地转演变过程两个不同动力学阶段中各种因素对于地转偏差以及惯性重力波波源的贡献. 对于线性小扰动情况，若不计 β 效应，f 平面上的小扰动经地转适应过程达到常定的地转平衡，该常定的地转平衡状态将保持下去，不再激发出惯性重力波等非地转运动. 计入 β 效应，β 平面上的小扰动，经适应过程后进入准地转演变过程，非常定的演变过程将造成位势场起伏，进而产生地转偏差并激发出新的惯性重力波. 对于完全的非线性情况，不计 β 效应，在演变过程阶段，由于运动为非常定，本已处于准地转状态的涡旋运动通过非线性作用即通过广义位势涡度平流项的作用，在位势涡度守恒的约束下，通过改变位势通量散度而产生新的地转偏差，从而激发出新的惯性重力波. 对于 Burger 数 $Bu \ll 1$ 即运动尺度 L 远大于 Rossby 变形半径 L_d 的情况，必须同时计入 β 效应和广义位势涡度平流的影响，二者在位势涡度守恒的约束下，通过改变位势通量散度产生地转偏差，激发出新的惯性重力波.

关键词： 惯性重力波 涡旋运动 尺度分析 适应过程 演变过程

Inertia-Gravity Waves and Vortical Flows

作者简介 林一骅，男，1966 年出生，研究员，主要从事地球流体力学与海洋环流数值模拟研究。E-mail：linyh@lasg.iap.ac.cn

黄啟巧，女，2001 年出生，云南大学地球科学学院大气科学专业“菁英班”学生。E-mail：18285757207@163.com

通讯作者 林一骅，E-mail：linyh@lasg.iap.ac.cn

资助项目 国家自然科学基金项目 42275057、42230403、42075008

Funded by National Natural Science Foundation of China (Grants 42275057, 42230403, 42075008)

Lin Yihua[1,2] Huang Qiqiao[3]
1 LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029
2 College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049
3 School of Earth Sciences, Yunnan University, Kunming 650500

Abstract Based on scale analysis and order estimation, the inertia-gravity waves and vortical flows of barotropic geophysical fluid are investigated in the adjustment and evolution processes, and the contribution of various factors to the ageostrophic modes and the source of inertia-gravity waves in the two different dynamic stages of geostrophic adjustment and quasi-geostrophic evolution are discussed. For the linear small perturbation case, if the β effect is not considered, the small perturbations in the f plane establish the steady geostrophic balance through the adjustment process, and the steady-state of geostrophic balance will be maintained, and no more ageostrophic modes of motion, such as inertia-gravity waves, will be excited. Considering the β effect, the motion on the β plane transitions the stage of quasi-geostrophic evolution process after the adjustment process, and the unsteady evolution process will cause fluctuations of the geopotential field, which in turn generate the ageostrophic perturbations and excite the new inertia-gravity waves. In the full nonlinear case, excluding β effect, in the evolution stage, under the constraint of conservation of potential vorticity, the unsteady quasi-geotrophic flows generate new ageostrophic modes of motion by altering the divergence of geopotential flux due to the generalized potential vorticity advection, thereby excites new inertia-gravity waves. For the Burger number $Bu \ll 1$, i.e., the spatial scale L is much greater than L_d, the Rossby radius of deformation, the effects of both the β effect and the advection of generalized potential vorticity have to be accounted for, which generate ageostrophic modes of motion by altering the potential flux divergence within the constraints of potential vorticity conservation, thereby exciting inertia-gravity waves.

Keywords inertia-gravity waves, vortical flows, scale analysis, adjustment process, evolution process

1　引言

中纬度地球流体的大尺度运动（天气尺度与行星尺度的运动）的压力场和速度场通常近似处于“地转平衡”状态，流速场接近于地转流. 对于大尺度运动，在科氏力的作用下，这种近似平衡状态是波动过程将波动能量弥散之后，涡旋场和压力场之间达成的一种准平衡状态. 达成这一近似平衡状态的过程即为地转适应过程（Rossby，1938；曾庆存，1963，1979；叶笃正、李麦村，1965；Blumen，1972；Gill，1982；Pedlosky，1987；Vallis，2017）. 这种准平衡状态在随时间的演变过程中，各种偏离平衡状态的因子的作用，使得平衡态不断遭到破坏而令运动偏离这种准平衡；偏离越是厉害，演变也就越是迅速激烈，经过一段演变之后，再达到一个新的准平衡状态. 对于这种准平衡态的偏离，其实就是对于地转平衡的破坏. 地转运动是涡旋运动，是（准）无辐散的，而对于地转运动的偏离，将导致辐散辐合，产生相应的波动过程，在旋转地球的科氏力场中，这种波动就是惯性重力波. 相对于缓慢的（准）地转运动，惯性重力波的时间尺度较小，是一种快运动或者称为快波. 惯性重力波与（准）地转运动相比是一种空间尺度较小生命史较短的运动，但惯性重力波的发生发展及其演变会造成强对流和局部暴雨等强烈的中尺度天气现象，是不可忽视的大气动力学过程（曾庆存，1979；巢纪平，1980；陈炜和李跃清，2018）。经典大气动力学关于地转适应过程的研究，通常把惯性重力波视为暂态过程，着重研究其弥散过程与机制，而关注其激发与产生的过程的研究相对较少. Ford（1993）研究了重力波与涡旋流动的相互作用，并类比 Lighthill（Lighthill，1952）涡旋激发声波的理论，使用渐近方法探讨了涡旋流动激发重力波的过程. 事实上，早在上世纪六、七十年代，曾庆存（曾庆存，1963a，1963b，1979）就从非地转演变的角度对于产生快波和地转偏差的源进行了全面的研究和总结，其研究指出在大多数的非定常情况下，非线性项以及外源是产生快波及地转偏差的源，并进一步指出超高速不稳定、惯性不稳定和非地转不稳定等几类不稳定机制亦可导致快波的产生. 这些研究从适应过程与演变过程相互作用的角度和基本流动非地转不稳定的角度探讨了诸如惯性重力波这样的快波的激发过程，具有重要的启发意义.

本文针对正压地球流体运动，从辐合辐散运动所体现的波动过程（惯性重力波）与涡旋过程所体现的地转平衡（常定运动）或 Rossby 波（非常定运动）的相互作用出发，通过对线性过程与非线性过程的动力学分析，探

讨激发惯性重力波的波源. 以下各节从基本方程出发，导出描述波动和涡旋（即快过程与慢过程）的相互关系的方程，研究波动过程与涡旋过程及其相互关系，探讨激发惯性重力波的波源，最后对所得结果进行总结和讨论.

2 基本方程

假定无地形起伏，不计摩擦与加热，描写正压地球流体运动方程组可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}+\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

其中 u、v 分别为东西方向和南北方向的流速；$f=f_0+\beta y$ 是科氏参数,f_0 为 f 的参考值，$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}$ 为科氏参数随纬度的变化；$\phi=gh$ 为位势，g 是重力加速度，h 是流体厚度；$c=\sqrt{\tilde{\phi}}=\sqrt{gH}$ 是重力波波速，$\tilde{\phi}$ 为位势的平均值，H 为流体层的平均厚度.

引入特征水平尺度 L、特征时间尺度 τ、特征速度 U 和特征位势偏差 Φ，相应地引入无量纲量 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{t}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{\phi}$ 和 $\hat{f}$ 等如下

$$u=U\hat{u},\ v=U\hat{v},\ t=\tau\hat{t} \tag{4}$$

$$x=L\hat{x},\ y=L\hat{y},\ \phi=\Phi\hat{\phi} \tag{5}$$

$$f(y)=f_0\hat{f}(\hat{y}),\ \hat{f}(\hat{y})=1+\hat{\beta}\hat{y},\ \left(\hat{\beta}=\frac{\beta L}{f_0}\ll 1\right) \tag{6}$$

于是可将（1）—（3）化为无量纲方程

$$\epsilon\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}+Ro\left(\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}+\hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}}\right)-\hat{f}\hat{v}=-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \tag{7}$$

$$\epsilon\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}}+Ro\left(\hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}+\hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}\right)+\hat{f}\hat{u}=-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \tag{8}$$

$$\epsilon\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}}+Bu\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}\right)+Ro\left(\frac{\partial \hat{\phi}\hat{u}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{\phi}\hat{v}}{\partial \hat{y}}\right)=0 \tag{9}$$

其中 $\epsilon=\frac{1}{f_0\tau}$、$Ro=\frac{U}{f_0L}$ 和 $Bu=\left(\frac{L_d}{L}\right)^2=\frac{\tilde{\phi}}{f_0^2L^2}$ 分别为 Kibel 数、Rossby 数和 Burger 数，$L_d=\frac{c}{f_0}$，是 Rossby 变形半径.

令

$$A_u = \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \tag{10}$$

$$A_v = \hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \tag{11}$$

$$A_\phi = \frac{\partial \hat{\phi}\hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}\hat{v}}{\partial \hat{y}} \tag{12}$$

为简便计，略去无量纲量的 "^" 标记，（7）—（9）改写为

$$\epsilon\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -RoA_u \tag{13}$$

$$\epsilon\frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -RoA_v \tag{14}$$

$$\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t} + Bu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -RoA_\phi \tag{15}$$

我们形式地把 A_u、A_v 和 A_ϕ 视为已知函数. 对（13）、（14）作散度运算和涡度运算，得到

$$\epsilon\frac{\partial D}{\partial t} - f\zeta + \beta u + \Delta\phi = -Ro\left(\frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y}\right)$$

$$\epsilon\frac{\partial \zeta}{\partial t} + fD + \beta v = -Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y}\right)$$

其中 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 为相对涡度，$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 为散度，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子. 利用（15）消去涡度方程中的散度，有

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{f}{Bu}\phi\right) + \beta v = -Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y} - \frac{f}{Bu}A_\phi\right) \tag{16}$$

或者写成

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{f}{Bu}\phi + \epsilon^{-1}\beta y\right) = -Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y} - \frac{f}{Bu}A_\phi\right) \tag{17}$$

再利用（15）消去散度方程中的散度并稍作运算，则有

$$\begin{aligned} Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\phi - \Delta\phi &= -f\left(\zeta - \frac{f}{Bu}\phi\right) + \beta u \\ &+Ro\left(\frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} - \epsilon Bu^{-1}\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

或者再利用（16）消去（18）中的相对涡度

$$\begin{aligned} \left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - \Delta\right]\frac{\partial \phi}{\partial t} &= f\epsilon^{-1}Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y} - \frac{f}{Bu}A_\phi\right) \\ &+\epsilon^{-1}f\beta v + \beta\frac{\partial u}{\partial t} + Ro\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} - \epsilon Bu^{-1}\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

记

$$\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}=\frac{\partial A_v}{\partial x}-\frac{\partial A_u}{\partial y}-\frac{f}{Bu}A_\phi \tag{20}$$

$$\mathcal{A}_\phi=\frac{\partial A_u}{\partial x}+\frac{\partial A_v}{\partial y}-\epsilon Bu^{-1}\frac{\partial A_\phi}{\partial t} \tag{21}$$

其中 $\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}$ 是广义位涡平流，$\mathcal{A}_\phi$ 是广义散度平流（曾庆存，1979）. 这样（16)、(17)、(18）和（19）可以写成

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+\beta v=-Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta} \tag{22}$$

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi+\epsilon^{-1}\beta y\right)=-Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta} \tag{23}$$

$$Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\phi-\Delta\phi=-f\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+\beta u+Ro\mathcal{A}_\phi \tag{24}$$

$$\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}=\epsilon^{-1}f\beta v+\beta\frac{\partial u}{\partial t}+f\epsilon^{-1}Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}+Ro\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_\phi \tag{25}$$

此外，容易得到以下两式

$$\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)u=-f\frac{\partial\phi}{\partial y}-\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-RofA_v-\epsilon Ro\frac{\partial A_u}{\partial t} \tag{26}$$

$$\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)v=f\frac{\partial\phi}{\partial x}-\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}+RofA_u-\epsilon Ro\frac{\partial A_v}{\partial t} \tag{27}$$

利用（26)、(27）两式消去（25）中显含的 u 和 v，可得

$$\begin{aligned}&\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}\\&=\left(\epsilon^{-1}f^2\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}-2f\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}-\epsilon\beta\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial t^2}\right)\\&+Ro\left(\epsilon^{-1}f^2\beta A_u-2f\beta\frac{\partial A_v}{\partial t}-\epsilon\beta\frac{\partial^2A_u}{\partial t^2}\right)\\&+Ro\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\left(f\epsilon^{-1}\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}+\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_\phi\right)\end{aligned} \tag{28}$$

（22）—（25）以及（28）构成我们所需要的基本方程.

3 惯性重力波与涡旋运动的线性动力学

我们先讨论线性情形，即令 Rossby 数 $Ro\ll1$，含有 Ro 的项可以忽略. 此时正压地球流体运动方程组（1）-（3）退化为小扰动形式，相应地

（22）—（25）以及（28）简化为

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+\beta v=0 \tag{29}$$

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi+\epsilon^{-1}\beta y\right)=0 \tag{30}$$

$$Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\phi-\Delta\phi=-f\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+\beta u \tag{31}$$

$$\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}=\epsilon^{-1}f\beta v+\beta\frac{\partial u}{\partial t} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}\\&=\left(\epsilon^{-1}f^2\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}-2f\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}-\epsilon\beta\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial t^2}\right)\end{aligned} \tag{33}$$

（29）为正压地球流体小扰动位势涡度方程的一种常用形式，等号左端圆括号中的量 $q=\zeta-\frac{f}{Bu}\phi$（其有量纲形式是 $\tilde{q}=\zeta-\frac{f}{c^2}\phi$，$c$ 为重力波相速度）在一些文献中称为小扰动的位势涡度. 需要注意，该量既非真正的小扰动位势涡度，亦非守恒量，除非忽略 β 效应. 在不计 β 效应时，每个固定坐标点上的 q（或 $\tilde{q}$）值为常数，且不随时间变化. 考虑 β 效应时，（29）可以写成（30）的形式，这样容易看出运动系统真正的位势涡度是 $\Omega_\vartheta=\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+\epsilon^{-1}\beta y$（其有量纲形式是 $\tilde{\Omega}_\vartheta=\left(\zeta-\frac{f}{c^2}\phi\right)+f=\left(\zeta-\frac{f}{c^2}\phi\right)+f_0+\beta y$，因 f_0 为常量，其微商为零，故在（30）中被忽略）. 位势涡度 Ω_ϑ 由三部分组成，其中 ζ 是相对涡度，$\frac{f}{Bu}\phi$ 表示流体柱拉伸或者压缩的贡献，$\epsilon^{-1}\beta y$ 则为行星涡度的贡献. 对于每个流体质点，位势涡度 Ω_ϑ 是守恒量.

（31）等号左端描述的是惯性重力波，等号右段第一项为小扰动的位势涡度项（涡旋作用项），第二项则为 β 作用项. 该方程可看作非齐次的惯性重力波方程，等号右端的位势涡度项（涡旋作用项）和 β 作用项可视为强迫项，即由于等号右端各项的强迫，激发出等号左端所描写的惯性重力波.

（32）若不计 β 效应，则等号右端项为零，此时方程中包含两种种形式的运动，即惯性重力波与地转平衡运动. （33）是由（32）消去 u 和 v 得到的只含单一因变量 ϕ 的方程，等号右端各项均与 β 有关，若忽略 β 的影响，其等号右端为零，与（32）的等号右端项为零时相同，方程中也包含惯性重力波与地转平衡运动.

（29）或（30）是正压小扰动的位势涡度守恒方程，描写的是涡旋运动. 由于无量纲 $\beta\ll 1$，若运动尚处于适应过程阶段，即 Kibel 数 $\epsilon\geqslant 1$，亦即

$\tau \leqslant f_0^{-1}$，此时有 $\epsilon^{-1}\beta \ll 1$，$\epsilon^{-1}\beta y$ 是小项，即 β 效应不重要，（29）或（30）成为

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)=0 \tag{34}$$

此时 $q=\zeta-\frac{f}{Bu}\phi$ 为小扰动系统的位势涡度，为守恒量，其在每个固定的坐标点上的值为常数且不随时间变化. 与之相应，也忽略掉（31）中含有 β 的项，则有

$$Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\phi-\Delta\phi=-f\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right) \tag{35}$$

（35）是用来研究地转适应过程的基本方程. 给定不满足地转平衡的初始流速场和位势场（亦即压力场），由此计算出 $\zeta-\frac{f}{Bu}\phi$，代入（35）右端作为强迫项，由于位势涡度守恒，该强迫项不随时间变化. 求出 ϕ 后再令 $t\to\infty$ 得到 $\phi^{(\infty)}$，$\phi^{(\infty)}$ 即为惯性重力波弥散掉非地转能量完成地转适应达到地转平衡之后的位势场，再依地转关系即可求得适应了的流场 $u^{(\infty)}$、$v^{(\infty)}$.

对（35）求关于 t 的偏微商并计及（34）则有

$$\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{36}$$

（36）其实就是（32）计及 $\epsilon^{-1}\beta \ll 1$ 而忽略等号右端含 β 的各项的结果，（36）包含了惯性重力波和地转平衡两类运动.

若 Kibel 数 $\epsilon \ll 1$，即 $\tau \gg f_0^{-1}$，此时有 $\epsilon^{-1}\beta \sim 1$，$\epsilon^{-1}\beta y$ 不再是小项，即 β 效应重要，不可忽略，而 $\epsilon^{-2} \ll 1$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi+y\right)=0 \tag{37}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+v=0 \tag{38}$$

（32）则成为

$$\left(Bu^{-1}f^2-\Delta\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}=fv+\beta\frac{\partial u}{\partial t}$$

考虑到 $\epsilon \ll 1$ 时，地转适应已经完成，v 已经是地转风，即 $v=v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial x}$ 并计及 $\beta \ll 1$ 而忽略 $\beta\frac{\partial u}{\partial t}$，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta-\frac{f^2}{Bu}\right)\phi+\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{39}$$

回到有量纲方程即为（方程中各量皆为有量纲量）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta-\frac{f^2}{c^2}\right)\phi+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{40}$$

这显然是小扰动情况下描写 Rossby 波的方程，若忽略 β 效应，则退化为地转平衡，流速场和位势场均为常定，不再有时间变化.

以上讨论中，没有考虑 Burger 数 $Bu=\left(\frac{L_d}{L}\right)^2$ 的作用，现在来作些讨论. 在位势涡度表达式中，含有 Bu 的项体现流体柱拉伸或压缩即辐合辐散效应. 若 $Bu=\left(\frac{L_d}{L}\right)^2\gg 1$，此时有 $L\ll L_d$，即运动尺度显著小于 Rossby 变形半径，运动近于无辐散. 此时在组成位势涡度的三项中，体现流体柱拉伸或压缩即辐合辐散效应的项 $\frac{f}{Bu}\phi$ 贡献最小，甚至可以忽略. 与此相反，若 $Bu=\left(\frac{L_d}{L}\right)^2\ll 1$，此时有 $L\gg L_d$，即运动尺度显著大于 Rossby 变形半径，流体层厚度变化亦即辐合辐散显著，此时相对涡度 ζ 的贡献较小，甚至可以忽略，这种运动即所谓超长波或者行星地转运动. 不过此时由于水平尺度过大，$\frac{\beta L}{f_0}\ll 1$ 已不成立，用 β 平面不再合适，应该使用球坐标系统.

（33）是单一因变量 ϕ 的线性常系数偏微分方程，理论上可以直接求解. 但因其阶数较高，对其做必要的定性分析，更容易明晰其物理意义. 鉴于算子 $\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2$ 对方程的性质具有关键作用，以及前面我们对于（4）式进行简单分析的结果，我们把运动的时间尺度分为 $\epsilon\ll 1$ 的以涡旋为主要特征的运动与 $\epsilon\gg 1$ 的以散度为主要特征的波动过程. 对于 $\epsilon\ll 1$ 的运动，此时 $\tau\gg f_0^{-1}$，（33）等号左端的算子 $\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\approx f^2$，这样等号右端各项与等号左端项的比值分别为

$$\frac{\left\|\epsilon^{-1}f^2\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\|}{\left\|f^2\Delta\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\|}=O\left(\epsilon^{-1}\beta\right)=O(1) \tag{41}$$

$$\frac{\left\|f\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}\right\|}{\left\|f^2\Delta\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\|}=O\left(\beta\right)\ll O(1) \tag{42}$$

$$\frac{\left\|\epsilon\beta\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial t^2}\right\|}{\left\|f^2\Delta\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\|}=O\left(\epsilon\beta\right)\ll O(1) \tag{43}$$

由此可见，对于 $\epsilon\ll 1$ 即时间尺度为 $\tau\sim\frac{1}{\beta L}\gg f_0^{-1}$ 的以涡旋为主要特征的运动，（33）式等号左端的算子 $\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2$ 可以用 f^2 替换，而等号右端第二、三项可以忽略. 这样有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta+\frac{f^2}{Bu}\right)\phi+\epsilon^{-1}\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{44}$$

（44）式为小扰动的准地转位势涡度方程，它所描写的是 Rossby 波，反映了（33）式中 $\epsilon\ll 1$ 即时间尺度分为 $\tau\sim\frac{1}{\beta L}\gg f_0^{-1}$ 的以涡旋为主要特征的运动，其含义与（29）或（30）式是类似的.

现在讨论 $\epsilon\gg 1$ 即 $\tau\ll f_0^{-1}$ 的以散度为主要特征的波动过程. 对于 $\epsilon\gg 1$ 即 $\tau\ll f_0^{-1}$ 的运动，算子 $\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\approx\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，这样等号右端三项与等

号左端项的比值分别为

$$\frac{\left\|\epsilon^{-1} f^2 \beta \frac{\partial \phi}{\partial x}\right\|}{\left\|\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t}\right\|} = O\left(\epsilon^{-3} \beta\right) \ll O(1) \tag{45}$$

$$\frac{\left\|f \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t}\right\|}{\left\|\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t}\right\|} = O\left(\epsilon^{-2} \beta\right) \ll O(1) \tag{46}$$

$$\frac{\left\|\epsilon \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2}\right\|}{\left\|\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t}\right\|} = O\left(\epsilon^{-1} \beta\right) \ll O(1) \tag{47}$$

这样对于 $\epsilon \gg 1$ 即 $\tau \ll f_0^{-1}$ 的以散度为主要特征的波动过程，(33) 等号右边各项均可忽略，方程简化为

$$\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) - \Delta\right] \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{48}$$

该方程与(36)式是完全相同的，描写惯性重力波运动和地转平衡运动. (48) 式是由 (33) 式略去等号右边带有 β 的各项得到的，因此也就忽略了 β 效应，这样由 β 效应产生的 Rossby 波也就退化成常定的地转平衡.

现在再回头分析 (31)、(32) 两个方程，探讨快过程惯性重力波与慢过程 Rossby 波即涡旋运动之间的关系和相互作用. 对于 $\epsilon \gg 1$ 即时间尺度 $\tau \ll f_0^{-1}$ 的波动过程，β 效应无关紧要，(31) 式等号右端第二项 βu 可以忽略，此时 (29) 式或 (30) 式简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{f}{Bu}\phi\right) = 0$$

此时小扰动的位势涡度 $\Omega_\vartheta = \zeta - \frac{f}{Bu}\phi$ 为守恒量，即 $\Omega_\vartheta = \zeta - \frac{f}{Bu}\phi = \Omega_\vartheta^{(0)}$，其中 $\Omega_\vartheta^{(0)}$ 是初始状态的位势涡度. (31) 式变成

$$Bu^{-1}\left(\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\phi - \Delta\phi = -f\Omega_\vartheta^{(0)} \tag{49}$$

(49) 为带有强迫项的波动方程. 根据地转适应理论 (曾庆存，1979)，若 $\Omega_\vartheta^{(0)}$ 场对应的流速场与压力场之间不满足地转平衡，将激发出惯性重力波，通过惯性重力波的弥散，流速场将与压力场实现地转平衡，当地转适应过程完成之后，惯性重力波将弥散掉，只保留下位涡守恒与地转平衡所描写的涡旋场. 在 f 平面上，保留下来的涡旋场是常定的地转平衡运动，不随时间变化，也就不再能够激发出新的惯性重力波.

若考虑 β 效应，情况则有显著不同。此时小扰动系统的位势涡度 $\Omega_\vartheta = \zeta - \frac{f}{Bu}\phi + \epsilon^{-1}\beta y$ 为守恒量，但量 $\zeta - \frac{f}{Bu}\phi$ 不是守恒量，其变化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{f}{Bu}\phi\right) = -\epsilon^{-1}\beta v$$

可见由于存在 β 效应，流体质点的运动将导致量 $\zeta-\frac{f}{Bu}\phi$ 随时间不断变化. 此时（31）式右端的强迫项不再像（49）式那样是常定的，因而将不断地变化并且不断地激发出惯性重力波. 在 f 平面情况，（49）式右端常定的强迫项所激发出的惯性重力波经过以 f_0^{-1} 为时间尺度的地转适应过程之后被弥散掉，与 $\Omega_\vartheta^{(0)}$ 场对应的流速场和压力场达到常定的地转平衡，之后就不再继续激发出惯性重力波. 存在 β 效应的情况下，即使通过惯性重力波的弥散流速场和压力场达到地转平衡，即 $fv_g=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，$fu_g=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$，下标 g 表示流速为地转流. 交叉微商并相加之后得到此时的散度为

$$D=\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}=-\frac{\beta}{f}v_g$$

再由（15）式（忽略等号右端项）可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\epsilon^{-1}\beta Bu\frac{v_g}{f} \tag{50}$$

由于达到地转平衡的情况下 $\epsilon\ll 1$，此时有 $\epsilon^{-1}\beta=O(1)$，从（50）式可见，β 平面上的地转流在 Burger 数 Bu 不显著小的情况下具有可观的散度，使得位势扰动成为非常定的，这样位势扰动场（即压力场）的改变就破坏了本来已经通过惯性重力波弥散建立起来的流速场与压力场之间的地转平衡，再度激发出惯性重力波. 而在 β 平面上由小扰动位势涡度守恒所描写的涡旋运动不再像 f 平面上那样为常定的地转平衡运动，而是非常定的 Rossby 波.

现在讨论（32）等号右端两项的相对大小. 在适应过程阶段，有 $\epsilon\gg 1$ 即 $\epsilon^{-1}\ll 1$，$\epsilon^{-1}f\beta v$ 远小于 $\beta\frac{\partial u}{\partial t}$，由此可以推知，适应过程阶段的地转偏差主要是由 $\beta\frac{\partial u}{\partial t}$（该项实际上与散度有关）造成，反映涡旋作用的 $\epsilon^{-1}f\beta v$ 贡献较小. 当 $\tau\gg f_0^{-1}$，适应过程完成，进入演变过程阶段，此时有 $\epsilon\ll 1$ 即 $\epsilon^{-1}\gg 1$，于是反映涡旋作用的 $\epsilon^{-1}f\beta v$ 远大于与散度有关的项 $\beta\frac{\partial u}{\partial t}$，原来的地转偏差基本消失，新的地转偏差则如上一小节所述，是由于非常定的准地转演变过程而产生.

4 惯性重力波与涡旋运动的非线性动力学

忽略非线性效应的线性情况下，由于 β 效应产生的 Rossby 波是持续激发惯性重力波的因素，现在讨论非线性效应的影响. 为简明计，我们先忽略 β 效应，专门讨论非线性项的影响，然后再比较 β 效应与非线性效应的大小，明晰二者的贡献. 不计 β 效应，（22）或（23）、（24）、（25）或（28）成为

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)=-Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta} \tag{51}$$

该式即无量纲形式的位势涡度守恒方程，可由如下形式的位势涡度守恒方程

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\zeta+f}{\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta+f}{\phi}\right)+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\zeta+f}{\phi}\right)=0$$

无量纲化之后稍作运算得到,其中 $Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}$ 就是位势涡度平流项 $\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\zeta+f}{\phi}\right)$ 的无量纲形式.

不计 β 效应时，（24）、（25）或（28）则成为

$$Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\phi-\Delta\phi=-f\left(\zeta-\frac{f}{Bu}\phi\right)+Ro\mathcal{A}_\phi \tag{52}$$

$$\left[Bu^{-1}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}=f\epsilon^{-1}Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}+Ro\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_\phi \tag{53}$$

（52）为带有强迫项的波动方程，等号左端体现了惯性重力波，等号右端第一项是位势涡度强迫源，第二项为广义散度平流，是非线性作用.（52）对时间求偏微商，再利用（51）即可得到（53）. 而（53）等号右端第一项就对应于（52）中等号右端的位势涡度强迫源，可见该项是由于广义位涡平流所致，也是非线性作用. （53）式等号右端第二项是非线性的广义散度平流之时间变化. （53）乃是以非线性的广义位势涡度平流和非线性的广义散度平流之时间变化（即广义散度平流倾向）为强迫项的波动方程.

在地转适应阶段，通常有 $\epsilon\gg Ro$（对于大尺度运动，通常还有 $Ro\ll 1$ 及 $Bu\leqslant 1$），此时（53）等号的右端项皆为小项，运动主要表现为惯性重力波. 在 $\tau\gg f_0^{-1}$ 之后，$O(\epsilon)=O(Ro)$，此时惯性重力波代表的非地转能量弥散掉，流速场与位势场达到地转平衡. 给定初始场，可以通过求解（52）或者（53）并令 $t\to\infty$ 求出达到地转平衡之后即所谓“适应了”的流速场 $u^{(\infty)}$、$v^{(\infty)}$ 和位势场 $\phi^{(\infty)}$.

我们比较一下（53）等号右端两个强迫项的大小并探究其来源. 第一项

$$\begin{aligned}f\epsilon^{-1}Ro\mathcal{A}_{\Omega_\vartheta}&=f\epsilon^{-1}Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x}-\frac{\partial A_u}{\partial y}-\frac{f}{Bu}A_\phi\right)\\&=f\epsilon^{-1}Ro\left(\frac{\partial A_v}{\partial x}-\frac{\partial A_u}{\partial y}\right)-f\epsilon^{-1}Ro\frac{f}{Bu}A_\phi\end{aligned}$$

前一项包含位势涡度平流，其本质是相对涡度对于位势涡度的贡献；后一项包含位势通量的散度 A_ϕ，其本质是散度效应导致的流体层厚度变化即流体柱压缩或拉伸对于位涡的贡献. 两项之间数量上的差别在于 Burger 数，只要 Bu 不显著大于或小于 1，前后两项的大小相近，作为惯性重力波强迫源的贡献也在伯仲之间. 对于 $Bu\gg 1$ 的情况，此时运动尺度 L 远小于 Rossby 变形半径 L_d，作为惯性重力波强迫源，位势涡度平流的贡献远比位势通量的散度重要. 这是一种尺度较小的运动，流场的作用或者说动能

的作用远比位势场或者位能的作用重要. 在 $Bu \ll 1$ 即运动尺度 L 远大于 Rossby 变形半径 L_d 的情况，这是一种尺度很大的运动，位势场或者位能的作用远比流场或者动能的作用重要，此时后一项的贡献才会显著，作为惯性重力波的强迫源，位势通量的散度的贡献远比位势涡度平流重要. 但此时地球的球面效应已经很显著，必须计入 β 效应，甚至要使用球面坐标.

（53）右端第二项为

$$
\begin{aligned}
Ro\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}_\phi &= Ro\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_u}{\partial x}+\frac{\partial A_v}{\partial y}-\epsilon Bu^{-1}\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\right)\\
&= Ro\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_u}{\partial x}+\frac{\partial A_v}{\partial y}\right)-Ro\epsilon Bu^{-1}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

其中前一项为广义散度平流的时间变化，后一项为位势通量散度的二阶时间微商，也就是位势倾向的变率，两项都与位势场的起伏即辐合辐散相关. 在适应过程阶段，由于 $O(\epsilon) \gg 1$，在 Bu 不显著大于 1 时，后一项显著大于前一项，其对于地转偏差的贡献也显著大于前一项. 只有在在 $Bu \gg 1$ 时，两项的贡献才相当. 对于已经完成地转适应的情况，后一项中的 $O(\epsilon) \ll 1$，在 Bu 不显著小于 1 时，后一项会显著地小于前一项，此时，作为惯性重力波强迫源，贡献主要在于前一项. 只有在 $Bu \ll 1$ 即运动尺度 L 远大于 Rossby 变形半径 L_d 的情况，后一项的贡献才会显著. 这是一种尺度很大的运动，位势场或者位能的作用远比流场或者动能的作用重要，此时地球的球面效应已经很显著，不能在忽略 β 效应，甚至必须使用球面坐标.

再比较一下（53）等号右端两项的大小. 当处于地转适应阶段时，$\epsilon \gg 1$ 亦即 $\epsilon^{-1} \ll 1$，此时第一项中与位势涡度平流相关的项显著小于第二项中与散度平流相关的项，而第一项中含有位势通量散度的项也显著小于第二项中的与位势通量散度相关的项. 在适应过程阶段，广义散度平流的影响是主要的，广义位势涡度平流的影响则较小. 在 $\tau \gg f_0^{-1}$ 之后，地转适应完成，运动处于演变过程阶段，此时有 $\epsilon \ll 1$ 而 $\epsilon^{-1} \gg 1$，第一项因含有 ϵ^{-1} 而显著大于第二项，广义位势涡度平流的影响是主要的，广义散度平流的影响则较小. 也就是说，适应过程完成之后，以散度为主要特征的惯性重力波因为弥散而强度减弱到相当程度，运动进入以涡旋为主要特征的演变过程.

5 结论与讨论

本文针对正压地球流体在适应过程与演变过程中的惯性重力波与涡旋运动进行了动力学分析，着重讨论了不同阶段中各种因素对于地转偏差的贡献以及作为惯性重力波波源的贡献.

对于线性小扰动情况，若不计 β 效应，f 平面上的小扰动其适应过程与演变过程是相互独立的，适应过程通过惯性重力波弥散而达到常定的地转平

衡，该常定的地转平衡将保持下去，不再激发出惯性重力波等非地转运动. 计入 β 效应后，β 平面上的小扰动，其适应过程中的地转偏差直接来源于非地转运动的散度；在演变过程阶段，新的地转偏差则源于于已经处于准地转的非常定运动所产生的位势场起伏，进而作为波源激发出新的惯性重力波.

对于完全的非线性情况，即便不计 β 效应，f 平面上的适应过程与演变过程也存在相互作用. 适应过程中的地转偏差主要源于广义散度平流的影响，而对于广义散度平流而言，对于 Burger 数 Bu 不显著大于 1，即对于尺度较大直至尺度不特别小的运动，位势倾向时间变率对于地转偏差的影响显著大于散度平流时间变率的影响，只有对于 $Bu \gg 1$ 即尺度很小的运动，二者对于地转偏差的贡献才相当. 在演变过程阶段，惯性重力波因为弥散而强度减弱到相当程度，此时主要体现为涡旋运动，广义位势涡度平流成为主导，其中对于 Bu 不显著大于 1 或 Bu 小于 1 的情况，相对涡度平流的贡献与位势通量散度所致位势起伏的贡献在伯仲之间. $Bu \gg 1$ 的情况，此时运动尺度 L 远小于 Rossby 变形半径 L_d，位势涡度平流的贡献远比位势通量的散度所致位势起伏的贡献来得重要，对于这种尺度较小的运动，流场或者说动能起主要作用，位势场或者位能为次要. $Bu \ll 1$ 的情况则相反，此时运动尺度 L 远大于 Rossby 变形半径 L_d，位势通量的散度所致位势起伏的贡献远超位势涡度平流的贡献，对于这种尺度较大的运动，位势场或者位能起主要作用，流场或者说动能为次要，此时忽略 β 效应已不合适，必须把 $\epsilon^{-1}f\beta v$ 与广义位势涡度平流一起计入. 演变过程阶段，由于运动为非常定，本已处于准地转的涡旋运动通过非线性作用即通过广义位势涡度平流项的作用，在位势涡度守恒的约束下，通过改变位势通量散度而产生新的地转偏差，从而激发出新的惯性重力波.

也就是说，地转适应过程和转地转演变过程既是相对独立的不同的两个过程，又存在密切的相互作用，通过适应过程，惯性重力波弥散掉地转偏差的能量，实现准地转的演变过程；演变过程中的涡旋场，由于其非常定性质，通过 β 效应以及非线性的广义位势涡度平流过程可以使本已处于准地转的涡旋运动逐渐偏离准地转状态，进而产生出地转偏差，激发出惯性重力波.

针对（31）及（32）或者（52）及（53）各式，原则上我们可以仿照曾庆存（曾庆存，1979）的方法，将其化为微分——积分方程，然后作进一步的数学分析，再分别针对近场（波源区域内及其附近）和远场（远离波源的区域）情况作具体讨论，甚至用渐近方法给出不同无量纲参数域不同涡旋结构的贡献（曾庆存，1979；Ford，1993）. 不过这样处理既繁琐也欠直观. 通过以上定性的动力学分析，已经可以清楚地看到大气中非常定的涡旋运动本身就是激发惯性重力波的强迫源，准地转的涡旋运动本身是惯性重力波弥散非地转能量之后实现地转适应的产物，同时又是产生非地转运动激发

惯性重力波的因素.

参考文献

Blumen W. 1972. Geostrophic Adjustment[J]. Reviews of Geophysics and Space Physics 10(2): 485-528.

巢纪平. 1980. 非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用 [J]. 大气科学, 4(3): 230-235. Chao J P. 1980. The gravitational wave in non-uniform stratification atmosphere and its preliminary application for the prediction of heavy rainfall[J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences, 4(3): 230-235.

陈炜，李跃清. 2018. 对流层重力波的主要研究进展 [J]. 干旱气象, 36(5):1006-7639. DOI: 10.11755/j.issn. Chen W, LI Y. Main Research Progress on Gravity Waves in the Troposphere[J]. Journal of Arid Meteorology, 36(5):1006-7639.DOI: 10.11755/j.issn.

Ford R. 1993. Gravity Wave Generation by Vortical Flows in a Rotating Frame[D]. A dissertation sublnitted for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Cambridge.

Gill A E. 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics [M]. Academic Press.

Holton J R. 2004. An Introduction to Dynamic Meteorology [M]. 4th Edition. Elsevier.

Lighthill J M. 1952. On sound generated aerodynamically. I. General theory[J]. Proc. R. Soc. London, Ser. A211: 564-587

Pedlosky J. 1987. Geophysical Fluid Dynamics [M]. New York: Springer-Verlag.

Vallis G K. 2017. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.

王赟, 谈哲敏. 2007. 旋转流体中的二维惯性重力波- 涡相互作用 [J]. 地球物理学报, 50(4):1040-1052. Wang Y, Tan Z M. 2007. Inertia gravity-waves vortex interaction in two dimensional rotating fluid[J]. Chinese J. Geophys. 50(4):1040-1052.

叶笃正，李麦村. 1965. 大气中的适应问题 [M]. 北京：科学出版社. Yeh T C, Li M C. 1965. Problem of Geostrophic Adjustment at Atmosphere (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.

曾庆存. 1963a. 大气中的适应过程和发展过程 (一)——物理分析和线性理论 [J]. 气象学报, 33(2): 163-174.Zeng Q C. 1963a. The process of adaption and process of evolution at atmospheric movements, 1, Physical analysis and linear theory, Acta Meteorol. Sinica, 33(2), 163-173.

曾庆存. 1963b. 大气中的适应过程和发展过程 (二)——非线性问题 [J]. 气象学报, 33(3): 281-289. Zeng Q C. 1963b. The process of adaption and process of evolution of atmospheric movements, 2, Nonlinear subjects, Acta Meteorol. Sinica, 33(3), 281-288.

曾庆存. 1979. 数值天气预报的数学物理基础 [M]. 北京：科学出版社. Zeng Q C. 1979. The Physical-mathematical Basis of Numerical Weather Prediction (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.