第 2 卷 第 1 期　　大 气 科 学　　Vol. 2, No. 1
1978 年 3 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　March, 1978

斜压大气中的特征波动和地转适应过程

曾 庆 存
(中国科学院大气物理研究所)

提　　要

本文对斜压大气的小扰动方程作了严格和全面的数学分析：论证了关于垂直边界条件的正确提法以及初始场一些特殊问题，澄清了迄今不正确的和混乱的提法；给出了解的存在、唯一和稳定性的证明．在这基础上，对大气的特征波动作了分类，并证明内波的能量总是向宇宙空间弥散掉，最终强度趋于零．因此，即使扰动的水平范围为无限，或者严格地考虑到地球表面为球面，也有地转适应过程，这是以往未研究过的机理．

一、引　　言

中高纬度地带大气的大尺度运动的一个最基本特点就是风场和气压场处于准地转平衡状态．大气运动自身包含有不断地调整到准平衡态的机理，即地转适应过程．这种机理的本质就是重力惯性波能量的弥散以至最终地其强度趋于零，而柯氏力的经常作用则使涡旋场和气压场间有能量的转换，于是最终建立起地转平衡状态．但以往的研究[1],[2]大都局限于柯氏参数为常数且初始扰动在水平面上只有有限能量的情况．在[1]中指出，发生在球面上的扰动或在"平面地面"近似下具有无限的初始扰动能量时，重力惯性波的强度一般不会消失，因而不会有狭义的地转适应过程．但实际上地球大气中的更大尺度的运动恰恰是准地转性更强，可见，在实际大气的大规模运动中，必然还具有一些未被以往的研究所发现的自动调整到准平衡态的机理．在[3]中就已指出：在实际的斜压层结大气中，和理想的正压大气不同，波动能量可以向"宇宙空间"弥散，故趋向于平衡态的条件比较容易满足．

在[3]中先用"平面地面"近似，柯氏参数取为常数，但初始扰动的水平区域可以为无限，在这种情况下证明上述论断．至于柯氏参数不为常数的情况，则和严格计及地面为球面的影响一同考虑更为合适，在[3]中也有讨论．为了建立普遍而严格的数学物理理论，在[3]中不得不对边界条件的正确提法、初值问题解的唯一和存在性、大气中特征波动以及将解答按特征波动展开、波动能量的弥散过程等一系列问题进行严格的数学研究，这同时也就澄清了迄今国际上这些问题上的混乱观念．还需指出，这些方法在讨论球面问题时仍将一一用到，但在作了上述近似之下，由于避开了处理球面问题时在枝节上的复杂性，它就较易于剖示过程的物理本质．本文将叙述"平面地面"近似下的结果，球面上的问题将在另文中讨论．

1976 年 12 月 28 日收到．

二、基本方程、边界条件和初始条件

设重力加速度 g 为常数，应用准静力平衡近似，不考虑地形和热源及摩擦等的影响，则在“平面地面”近似下，迭加于静止大气的小扰动方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial \chi}{\partial x}+fv, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial \chi}{\partial y}-fu, \tag{2}$$

$$-\zeta^2\frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta\partial t}=c^2(\zeta)w, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=0, \tag{4}$$

$$RT'=-\zeta\frac{\partial gz'}{\partial\zeta}, \tag{5}$$

$$\chi\equiv gz'+\frac{R\bar{T}(\zeta)}{\bar{p}_s}p_s', \tag{6}$$

$$w\equiv\dot{\zeta}+\left(\frac{\zeta}{\bar{p}_s}\right)\frac{\partial p_s'}{\partial t}, \tag{7}$$

$$c^2(\zeta)\equiv\alpha(\zeta)R\bar{T}(\zeta),\qquad \alpha(\zeta)=\frac{R}{c_p}-\left(\frac{\zeta}{\bar{T}}\right)\frac{d\bar{T}}{d\zeta}=\frac{R}{g}(\gamma_a-\gamma). \tag{8}$$

其中 $\bar{p}_s$, $\bar{T}(\zeta)$ 为基本状态，u, v, T', z', p_s' 为小扰动量;(x, y)为水平坐标，$\zeta=p/p_s$，p 为气压，p_s 为地表面气压，(u, v)为风速分量，$\dot{\zeta}\equiv d\zeta/dt$ 为 ζ 的个别微商，T' 及 gz 分别为温度及重力位势扰动; f 为柯氏参数(取为常数)，R 和 c_p 分别是空气的气体常数及等压比热. 以后我们将把 T', z', p_s' 改记作 T, z, p_s.

垂直边界条件是[3]:

$$\dot{\zeta}=0,\qquad (\zeta=0,1) \tag{9}$$

$$gz=0,\qquad (\zeta=1) \tag{10}$$

$$u, v, T, gz\in L_{\zeta 2}, \tag{11}$$

其中 $F\in L_{\zeta 2}$ 表示F作为ζ的函数在区间 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ 上为平方可积函数.

初条件就是在 $t=0$ 时给定四个函数 $u^{(0)}(x, y, \zeta)$ 等，它们满足(11). (1)—(11)的初值问题就是要求:

$$\lim_{t\to 0}\begin{cases}u(x,y,\zeta,t)=u^{(0)}(x,y,\zeta), & v(x,y,\zeta,t)=v^{(0)}(x,y,\zeta),\\ T(x,y,\zeta,t)=T^{(0)}(x,y,\zeta), & p_s(x,y,t)=p_s^{(0)}(x,y).\end{cases} \tag{12}$$

可从(1)—(4)求得一个只含 χ 的方程如下:

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+\Delta\right\}\frac{\partial\chi}{\partial t}=0, \tag{13}$$

其中 $\Delta\equiv\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$. 关于 χ 的垂直边界条件可由原方程组及(9)—(11)推出，就是:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\alpha_s\right)\frac{\partial\chi}{\partial t}=0,\qquad (\zeta\to 1) \tag{14}$$

$$\left(\zeta\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\partial t},\ \frac{\partial\chi}{\partial t};\ \zeta\frac{\partial\chi}{\partial\zeta},\ \chi\right)\in L_{\zeta 2},\tag{15}$$

其中 $\alpha_s\equiv\alpha(1)$. 关于水平面上的边界条件将于以后按情况而提出. χ 的初条件亦可由(1)—(4)以及(12)推出.

此外,我们还有下列二条件,以后要用到:

$$\lim_{\zeta\to 1} w=\left(\frac{1}{\bar{p}_s}\right)\frac{\partial p_s}{\partial t}=\left(\frac{1}{R\bar{T}_s}\right)\frac{\partial\chi}{\partial t},\tag{16}$$

$$\lim_{\zeta\to 0} w=0.\tag{17}$$

三、整层无辐散近似情况

若略去 $\partial p_s/\partial t$ 项,就有

$$\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\zeta=0.\tag{18}$$

我们将称这种近似为整层无辐散近似. 这时仍可推得(13),上边界条件仍为(15),但下边界条件有改变,因为略去了 $\partial p_s/\partial t$, 故 $w(x,y,1,t)=0$, 代入(3)得:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)=0.\qquad(\zeta\to 1)\tag{19}$$

故可把整层无辐散近似和上节的情况统一起来,只需在(14)取 $\alpha_s=0$ 即可. 不过,这时 α_s 的意义不一定是 $\alpha(1)$, 只是边界条件中的一个参数罢了.

初条件为给出 $u^{(0)}, v^{(0)}$ 和 $T^{(0)}$, 且 $u^{(0)}, v^{(0)}$ 满足(18), 但 $p_s^{(0)}$ 不能独立给出,详见第八节.

四、能量方程

由(1)—(4)容易得出下列能量积分:

$$\iiint_V\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{c}\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\zeta\,dx\,dy=-\oiint_S\chi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS,\tag{20}$$

其中 S 为三维空间 V 的表面, $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外向法线单位向量, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}u+\boldsymbol{j}v+\boldsymbol{k}w$ 为三维速度向量, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿 x,y,ζ 轴的单位向量. $\dfrac{u^2+v^2}{2}$ 为单位质量的动能; $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\zeta}{c}\dfrac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)^2$ 常称为单位质量的有效位能,我们则称之为单位质量的"相对有效位能",理由见后述. 右边一项为压力在边界面作的功.

设 S_s 为 $\zeta=1$ 上的平面区域的一部份, V 为以 S_s 为底的垂直柱体,则由(3)及(14)可知,在 S_s 上有:

$$\iint_{S_s}\chi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_{S_s}\chi w\,dS=\iint_{S_s}\frac{\chi}{c_s^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial\zeta}\right)dS=-\frac{\alpha_s}{c_s^2}\iint_{S_S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi_s^2}{2}\right)dS.\tag{21}$$

其中 $c_s\equiv c(1)$, $\chi_s\equiv\chi(x,y,1,t)$. 此外,在气柱的无穷远上界面 S_∞ 上,由于 $w\to 0$, 且 $0(w)\leqslant 0(\zeta)$, $0(\chi)=0(gz)=0\left(\int\frac{RT}{\zeta}d\zeta\right)$, 再利用(15)可知:

$$\lim_{\zeta\to 0}\iint_{S_\infty}\chi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0. \tag{22}$$

如果再设侧边界面为下述三种情况之一：(一)刚壁，即在其上有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$；(二)扰动在$(x,y)$平面上为周期性分布，$S_s$ 为一个周期的周界；或者沿一个方向(设为 x)为周期性分布，另一方向(y)为刚壁所限，在 x 方向截取一个周期长度。(三) S_s 面积为无穷大，但有有限的总能量且 χ_s^2 沿 S_s 的积分收敛。在这些情况下(20)右边的积分就等于(21)的右端，还可将 $\partial/\partial t$ 号抽出积分号外；而且又由于有条件(11)，于是(20)左边的 $\partial/\partial t$ 号亦可抽出积分号外，故量

$$E\equiv\iiint_V\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{c^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\zeta dxdy+\iint_{S_s}\left(\frac{\alpha_s}{c_s^2}\right)\frac{\chi_s^2}{2}dxdy \tag{23}$$

为有限值，最后得到总能量守恒方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}E=0,\qquad E(t)=E(0)\equiv E^{(0)}. \tag{24}$$

可见，总能量中除总动能和总"相对有效位能"而外，在 $\alpha_s\neq 0$ 的情况下，还有沿 S_s 积分的一项，为由底面气压有起伏所造成，因此我们称之为"表面位能"，它和总"相对有效位能"之和才是可以和动能互换的有效位能。取整层无辐散近似，则表面位能不起作用，因为那时 $w=0$，不作功。

五、解的唯一性

由(24)可直接推出，当 $\alpha_s\neq 0$ 时，对于上述区域 V，第二节所提初值问题的解是唯一的。其实，若有两解，记其差为 u'', v'', T'', p_s'' 以及 χ'', χ_s'' 等等，则它们亦满足相同的方程和边界条件，但 $u''^{(0)}=v''^{(0)}=\chi''^{(0)}=\chi_s''^{(0)}=0$，从而 $E''^{(0)}=0$，故有

$$E''\equiv\iiint_V\left[\frac{u''^2+v''^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{c^2}\left(\frac{\partial\chi''}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\zeta\,dxdy+\iint_{S_s}\frac{\alpha_s}{c_s^2}\frac{(\chi_s'')^2}{2}dxdy=0. \tag{25}$$

可见 u'', v'', $\partial\chi''/\partial\zeta$, χ_s'' 强收敛于 0，即解为唯一的。

由(25)还可推知，当 $\alpha_s=0$ 时，u'', v'', $\partial\chi''/\partial\zeta$ 强收敛于 0。故在所有可能的解中，χ 可相差一任意函数 $C(x,y,t)$，只须满足 $C(x,y,0)=0$ 即可。如果再注意到在运动方程中还有 $\partial\chi/\partial x$, $\partial\chi/\partial y$ 二项，则知必须 $C(x,y,t)=C(t)$，即不依赖于 x, y。不过为确定起见，自然以消去这任意性为好。为此就得引入补加条件，例如可取

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\chi d\zeta dxdy=0, \tag{26}$$

或者在侧边界的刚壁部份取给定的值(详见章八节)。只在沿 x, y 方向有无限的部份且要求在 $r^2=x^2+y^2\to\infty$ 时扰动趋向于 0 的情况下，才由解的正则性要求决定了此函数为 0。但若只要求扰动在全空间的有界性，则 $C(t)$ 甚至是无法确定的。

关于 V 无界且 $E^{(0)}$ 亦无界情况下的问题的解的唯一性问题，我们将在第 11 节中讨论。自然，应用那里的方法也可推出 $E^{(0)}$ 有限时解的唯一性，不过不像本节这样简单明了罢了。

六、扰动的常定部分

可从解中分出常定部分，记作 $u^{(\infty)}, v^{(\infty)}, w^{(\infty)}, \chi^{(\infty)}$. 显然常定部分满足地转平衡：

$$-\frac{\partial \chi^{(\infty)}}{\partial x}+fv^{(\infty)}=0,\quad -\frac{\partial \chi^{(\infty)}}{\partial y}-fu^{(\infty)}=0,\quad w^{(\infty)}=0, \tag{27}$$

如果运动趋向于常定的话，则有 $t\to\infty$ 时 $u(x,y,\zeta,t)\to u^{(\infty)}(x,y,\zeta)$ 等等. 可见在平面地面近似下趋向于常定就是趋向于地转平衡.

令

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{28}$$

则可将(1)—(4)化为：

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}=-f\Delta\varphi, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t}=-\Delta\chi+f\Delta\psi, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right)\Bigg]-\Delta\varphi=0. \tag{31}$$

由此可得位涡度守恒方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\psi+f\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right)\right]=0, \tag{32}$$

$$\Delta\psi+f\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right)=\Delta\psi^{(0)}+f\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial \chi^{(0)}}{\partial \zeta}\right)\equiv Q^{(0)}(x,y,\zeta), \tag{33}$$

其中上标(0)为初值. 故若 $Q^{(0)}\neq 0$，则有非零的常定部分，再考虑到常定部分为地转风，即可取 $\psi^{(\infty)}=f^{-1}\chi^{(\infty)}$，故有：

$$\Delta\chi^{(\infty)}+f^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial \chi^{(\infty)}}{\partial \zeta}\right)=fQ^{(0)}. \tag{34}$$

再参照(14)和(15)，可取 $\chi^{(\infty)}$ 满足边界条件：

$$\zeta\frac{\partial \chi^{(\infty)}}{\partial \zeta}\in L_{\zeta 2},\ \chi^{(\infty)}\in L_{\zeta 2}, \tag{35}$$

$$\lim_{\zeta\to 1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}+\alpha_s\right)\chi^{(\infty)}=\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}+\alpha_s\right)\chi^{(0)}. \tag{36}$$

七、坐 标 变 换

$\zeta=0$ 是方程(13)的奇异点，必须先作坐标变换，以便于分析. 引入函数 $\beta(\zeta)$ 和坐标 $\xi(\zeta)$ 如下：

$$\frac{1}{\beta(\zeta)}=\frac{\zeta^2}{c^2}, \tag{37}$$

$$\xi=\int_\zeta^1\sqrt{\beta(\zeta')}\,d\zeta'. \tag{38}$$

因 $c>0$，可见当 $\zeta\to 0$ 时 $\xi\to\infty$，而 $\zeta\to 1$ 时 $\xi\to 0$. 再设 $c(\zeta)$ 及其对 ζ 的一阶微商均连续且有界，且 c 有有界和可积的二阶微商. 引入

$$W(\xi)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}d\xi\right\}=\zeta^{-1/2}\left(\frac{c}{c_s}\right)^{1/2}, \tag{39}$$

$$\begin{cases} u=W\cdot U(x,y,\xi,t),\ v=W\cdot V(x,y,\xi,t),\ \chi=W\cdot H(x,y,\xi,t), \\ \psi=W\Psi(x,y,\xi,t),\ \varphi=W\cdot\Phi(x,y,\xi,t). \end{cases} \tag{40}$$

可得:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)=W\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-Q(\xi)\right)H, \tag{41}$$

$$Q(\xi)\equiv\left(\frac{1}{2}\frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\sqrt{\beta}}{d\xi^2}=W\frac{d^2W^{-1}}{d\xi^2}. \tag{42}$$

于是(31)及(13)分别变为:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-Q(\xi)\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\Delta\Phi, \tag{43}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-Q(\xi)\right)+\Delta\right]\frac{\partial H}{\partial t}=0. \tag{44}$$

注意到 $W^2\beta^{-1/2}=\beta_s^{-1/2}$，其中 $\beta_s\equiv\beta|_{\xi=0}=c_s^2$. 于是边界条件(15)变为:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty\frac{W^2}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{H}{2}\frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}\right)^2d\xi=\frac{1}{\sqrt{\beta_s}}\int_0^\infty\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{H}{2}\frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}\right)^2d\xi<\infty, & (45) \\ \displaystyle\int_0^\infty H^2d\xi<\infty, & (46) \end{cases}$$

简记作 $\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{H}{2}\frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}\right)\in L_{\xi 2}$ 及 $H\in L_{\xi 2}$. 而由(11)前两个条件及(43)即得:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-Q(\xi)\right)\frac{\partial H}{\partial t}\in L_{\xi 2}, \tag{47}$$

或者取作:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-Q(\xi)\right)H\in L_{\xi 2}. \tag{48}$$

(46)和(48)就是关于 H 的上边界条件. 注意到 $Q(\xi)$ 有界，则由(48)及(46)可知 $\partial^2H/\partial\xi^2\in L_{\xi 2}$，$\partial H/\partial\xi\in L_{\xi 2}$，从而(45)自动满足. 至于下边界条件则变为:

$$\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+q_s\right)\frac{\partial H}{\partial t}=0, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} q_s\equiv\frac{1}{2}\frac{d\ln\sqrt{\beta}}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}-\frac{\alpha_s}{\sqrt{\beta_s}}&=\frac{1}{\sqrt{\beta_s}}\left(\frac{1}{2}-\alpha_s-\frac{1}{2\beta_s}\frac{dc}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=1}\right) \\ &=-\left(\frac{\partial W^{-1}}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}+\frac{\alpha_s}{\sqrt{\beta_s}}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

八、关于 H 的初条件

下面由(12)推出关于H的初条件．利用(5)及(6)有：

$$H^{(0)}=\frac{\chi^{(0)}}{W}=W^{-1}\left(gz^{(0)}+\frac{R\bar{T}}{\bar{p}_s}p_s^{(0)}\right)=W^{-1}\left(\int_\zeta^1\frac{RT^{(0)}(x,y,\zeta')}{\zeta'}d\zeta'+\frac{R\bar{T}}{\bar{p}_s}p_s^{(0)}\right),\quad(51)$$

其中积分及函数W和 $\bar{T}(\zeta)$ 均易化为 ξ 的函数．

由(3)，(4)和(16)可得：

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{(0)}=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^{(0)}=W^{-1}\left\{\left(\frac{\partial\chi_s}{\partial t}\right)^{(0)}+\int_1^\zeta\frac{c^2(\zeta')}{\zeta'^2}d\zeta'\int_0^{\zeta'}\Delta\varphi^{(0)}(x,y,\zeta'')d\zeta''.\quad(52)\right.$$

同法，并利用(30)，便得：

$$\left(\frac{\partial^2H}{\partial t^2}\right)^{(0)}=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)^{(0)}=\frac{1}{W}\left\{+\left(\frac{\partial^2\chi_s}{\partial t^2}\right)^{(0)}+\int_1^\zeta\frac{c^2(\zeta')}{\zeta'^2}d\zeta'\int_0^{\zeta'}(f\Delta\psi^{(0)}-\Delta\chi^{(0)})d\zeta''\right\}.\quad(53)$$

其中 $(\partial\chi_s/\partial t)^{(0)}$ 及 $(\partial^2\chi_s/\partial t^2)^{(0)}$ 可由(3)，(4)和(10)算得：

$$\left(\frac{\partial\chi_s}{\partial t}\right)^{(0)}=\lim_{\zeta\to1}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^{(0)}=\frac{R\bar{T}_s}{\bar{p}_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial t}\right)^{(0)}=-(R\bar{T}_s)\int_0^1\Delta\varphi^{(0)}d\zeta,\quad(54)$$

$$\left(\frac{\partial^2\chi_s}{\partial t^2}\right)^{(0)}=\frac{R\bar{T}_s}{\bar{p}_s}\left(\frac{\partial^2p_s}{\partial t^2}\right)^{(0)}=-(R\bar{T}_s)\int_0^1(f\Delta\psi^{(0)}-\Delta\chi^{(0)})d\zeta',\quad(55)$$

代入(52)和(53)，即得所需的关于H的初条件．

如果V为全空间，则当初始扰动在 $\zeta\doteq0$ 有界，只能要求H同样地有界；而当 $E^{(0)}$ 有限时则要求 $H\in L_{V2}$，这里 $F\in L_{V2}$ 表示

$$\iint\int_V F^2d\zeta dxdy<\infty.\quad(56)$$

此外，我们的目的是要把方法和结果推广到球面地面的实际情况中去，因而我们还要讨论扰动沿 x，y 均为周期分布的情况．

在作了整层无辐散近似的情况下，侧边界条件仍如上述．初条件(52)和(53)仍对，但(51)，(54)和(55)不成立；$\chi^{(0)}$ 不能任给，而需满足另外的限制条件．将(18)对 t 微商，并应用(30)，就有：

$$\Delta\int_0^1gzd\zeta=f\int_0^1\Delta\psi d\zeta.\quad(57)$$

将左边分部积分，则又有：

$$\Delta gz_s=\Delta\left(-\int_0^1RTd\zeta+\int_0^1f\psi d\zeta\right).\quad(58)$$

令 $t=0$ 就有：

$$\Delta gz_s^{(0)}=-\Delta\int_0^1(RT^{(0)}-f\psi^{(0)})d\zeta.\quad(59)$$

当V为全空间而 $E^{(0)}$ 有限且 $z_s\in L_{V2}$ 时，$gz_s^{(0)}$ 可由(59)唯一地确定，就是：

$$gz_s^{(0)}=-\int_0^1(RT^{(0)}-f\psi^{(0)})d\zeta.\quad(60)$$

这就说明，给出满足(18)的 $u^{(0)}$，$v^{(0)}$ 和 $T^{(0)}$ 之后，$gz_s^{(0)}$ 也就由协调关系式唯一地确定了，

不能再给. 在 $E^{(0)}$ 无限而扰动在 $\zeta \neq 0$ 为有界的情况下,则有:

$$gz_t^{(0)} = -\int_0^1 (RT^{(0)} - f\psi^{(0)})d\zeta + C^{(0)}, \tag{61}$$

其中 $C^{(0)}$ 为一常数, 这时要给出 $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $T^{(0)}$ 及 $C^{(0)}$ 而毋需另给 $gz_t^{(0)}$ 场. 在有侧边界的情况下(包括周期分布),则 $gz_t^{(0)}$ 除由(59)确定外, 还依赖于 $gz_t^{(0)}$ 在 S_t 的边界线 l 上的值 $gz_{tl}^{(0)}(x, y)$, $(x, y) \in l$, 因此只须此边界线上的值 $gz_{tl}^{(0)}$ 以及 V 内的 $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $T^{(0)}$ 即可. 自然,在扰动沿 x, y 作周期分布的情况下, $gz_t^{(0)}$ 也应与此周期性要求相符.

必须指出, 在整层无辐散近似下, 由这样的初始场 $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $T^{(0)}$ 及 $gz_t^{(0)}$ 不能唯一地推出 $(\partial\chi/\partial t)^{(0)}$ 及 $(\partial^2\chi/\partial t^2)^{(0)}$ 来,而要补加一些条件. 限于篇幅,从略.

九、特征函数和展开定理

我们先应用把函数按非正则二阶微分算子的特征函数展开的定理[4], 把 $\partial H/\partial t$ 等展开,然后求解. 该定理说: 若 a) $F(\xi)$ 及 $L(F) \equiv \widetilde{Q}(\xi) - d^2F/d\xi^2 \in L_{\xi 2}$, b) $F(0)\cos\beta + \dfrac{dF(0)}{d\xi}\sin\beta = 0$, 且 c) 当 $\xi \to \infty$ 时 $F\partial\Psi(\xi, \tilde{\nu})/\partial\xi - (dF/d\xi)\Psi = 0$, 则 F 可按微分方程 $d^2G/d\xi^2 + (\tilde{\nu} - \widetilde{Q}(\xi))G = 0$ 的特征函数族 $\{G_\nu(\xi)\}$ 展开, 且展式是唯一的. 这里 β 为常数, $\Psi(\xi, \tilde{\nu}) \in L_{\xi 2}$ 是当 $\tilde{\nu}$ 取非实数时方程 $\partial^2\Psi/\partial\xi^2 + (\tilde{\nu} - \widetilde{Q}(\xi))\Psi = 0$ 的两个线性无关解的某一线性组合(见[4]定理 2.7 及定理 3.6).

今因 $Q(\infty) \equiv Q_\infty$ 有界,令

$$\widetilde{Q}(\xi) = Q(\xi) - Q_\infty, \tag{62}$$

则有:

$$\lim_{\xi\to\infty} \widetilde{Q}(\xi) = 0. \tag{63}$$

可证上述三条件都满足(证明从略).

本问题的特征函数 $G_\nu(\xi)$ 及特征值 $\tilde{\nu}$ 就是下面问题的所有可能的非零解及相应的实数 $\tilde{\nu}$:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d^2}{d\xi^2} + (\tilde{\nu} - \widetilde{Q}(\xi))\right]G_\nu(\xi) = 0, \quad (\tilde{\nu} = \nu - Q_\infty), \\ \lim\limits_{\xi\to\infty} |G_\nu(\xi)| < \infty, \\ \lim\limits_{\xi\to 0} \dfrac{dG_\nu}{d\xi} + q_s G_\nu = 0. \end{cases} \tag{64}$$

由于 $\widetilde{Q}(\xi)$ 连续且 $\widetilde{Q}(\infty) = 0$, 故在半无界区域 $\tilde{\nu} \geq 0$ 有连续谱[4], 相应的标准化特征函数记作 $G_\nu(\xi)$ (所谓标准化的定义见(66)); 而在 $\tilde{\nu} < 0$ 半轴上只有离散谱点 $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{ai}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 在地球上的大气中, 一般有 $q_s > 0$ 及 $Q(\xi) > 0$, 且 $Q(\infty)$ 为 Q 之最小值. 我们可以证明,此时或者是没有离散谱点,或者有一个离散谱点 $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_a < 0$, 记其相应的标准化特征函数为 $G_a(\xi)$.

于是 F 可展成:

$$F(\xi) = F_a G_a(\xi) + \int_0^\infty F_\nu G_\nu(\xi)d\tilde{\nu}, \tag{65}$$

$$\begin{cases} F_a = \int_0^\infty F(\xi')G_a(\xi')d\xi', \\ F_\nu = \int_0^\infty F(\xi')G_\nu(\xi')d\xi'. \end{cases} \tag{66}$$

这里我们把无离散谱点的情况也统一在内，只需取 $G_a(\xi)$ 为零即可.

十、离 散 谱 点 ν_a

当 $\alpha_s = 0$ 时离散谱点 $\nu_a = 0$, $\tilde{\nu} = \nu_a - Q_\infty = -Q_\infty$; 当 $\alpha_s \neq 0$ 且 $q_s > 0$ 时 $\nu_a \neq 0$, $\tilde{\nu}_a \neq -Q_\infty$. 证明如下:

当 $\tilde{\nu}_a = -Q_\infty$ 时，(64)第一式就是:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - Q(\xi)\right]G_a(\xi) = 0. \tag{67}$$

而满足(67)和(64)的上边界条件的解是:

$$G_a(\xi) = CW^{-1}(\xi). \tag{68}$$

其中 C 为任意常数. 将(68)及W和Q的具体公式代人(67)即可证明这点了. 再利用q_s的公式(50)，则可证当 $\alpha_s = 0$ 时(68)满足下边界条件，而当 $\alpha_s \neq 0$ 时则不然，除非 $C=0$. 当 $\alpha_s = 0$ 时 C 由标准化要求定出.

十一、初值问题的解

问题归结为求 $\partial H/\partial t$. 将 $\partial H/\partial t \equiv F(x, y, \xi, t)$, $(\partial H/\partial t)^{(0)} \equiv F^{(0)}(x, y, \xi)$, $(\partial^2 H/\partial t^2)^{(0)} \equiv F^{(1)}(x, y, \xi)$及(44)分别按(65)和(66)展开，得:

$$F(x, y, \xi, t) = F_a(x, y, t)G_a(\xi) + \int_0^\infty F_\nu(x, y, t)G_\nu(\xi)d\tilde{\nu}, \tag{69}$$

$$F^{(0)}(x, y, \xi) = F_a^{(0)}(x, y)G_a(\xi) + \int_0^\infty F_\nu^{(0)}(x, y)G_\nu(\xi)d\tilde{\nu}, \tag{70}$$

$$F^{(1)}(x, y, \xi) = F_a^{(1)}(x, y)G_a(\xi) + \int_0^\infty F_\nu^{(1)}(x, y)G_\nu(\xi)d\tilde{\nu}, \tag{71}$$

$$\left[-\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) + \Delta\right]F_\nu = 0, \tag{72}$$

$$\left[-\nu_a\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) + \Delta\right]F_a = 0. \tag{73}$$

若初始扰动为 x, y 的周期函数，则因 F, $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, 从而 F_ν, $F_\nu^{(0)}$, $F_\nu^{(1)}$ 以及 F_a, $F_a^{(0)}$, $F_a^{(1)}$ 应有同样的周期性，故又可按正则微分算子 $(\Delta - \lambda_{mn}^2)Y_{mn}(x,y) = 0$ 的特征函数族 $\{Y_{mn}\}$ 展开，这里 $\lambda_{mn}^2 = m^2 + n^2 \geqslant 0$, $m = 0, \pm 2\pi/l_x, \pm 2(2\pi/l_x), \pm 3(2\pi/l_x), \cdots$; $n = 0, \pm 2\pi/l_y, \pm 2(2\pi/l_y), \pm 3(2\pi/l_y), \cdots$, l_x 和 l_y 各为 x, y 方向的周期长度. 于是有:

$$\begin{cases} F_\nu(x, y, t) = \sum_m \sum_n F_{\nu mn}(t) Y_{mn}(x, y), \\ F_\nu^{(0)}(x, y) = \sum_n \sum_m F_{\nu mn}^{(0)} Y_{mn}(x, y), \quad F_\nu^{(1)}(x, y) = \sum_m \sum_n F_{\nu mn}^{(1)} Y_{mn}(x, y), \\ \left[-\nu \left(\frac{d^2}{dt^2} + f^2 \right) + \lambda_{mn}^2 \right] F_{\nu mn}(t) = 0, \end{cases} \tag{74}$$

故有:

$$F_{\nu mn}(t) = F_{\nu mn}^{(0)} \cos \sigma_{\nu mn} t + \frac{F_{\nu mn}^{(1)}}{\sigma_{\nu mn}} \sin \sigma_{\nu mn} t, \tag{75}$$

$$\sigma_{\nu mn} = \left(f^2 + \frac{\lambda_{mn}^2}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(f^2 + \frac{\lambda_{mn}^2}{\tilde{\nu} + Q_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{76}$$

当 m n 中任一不为零时,则由 $\lambda_{mn}^2 > 0$, $\nu > 0$, 故 $\sigma_{\nu mn}$ 和 $F_{\nu mn}$ 唯一确定. 同法可决定当 $\alpha_s \neq 0$ 时的解 $F_{amn}(t)$. 因此时 $\nu_a \neq 0$, 再注意到能量守恒, 还可确知 $\nu_a > 0$, 于是 $\sigma_{amn} > 0$ 为实数,且有:

$$\begin{cases} F_a(x, y, t) = \sum_m \sum_n F_{amn}(t) Y_{mn}(x, y), \\ F_{amn}(t) = F_{amn}^{(0)} \cos \sigma_{amn} t + \frac{F_{amn}^{(1)}}{\sigma_{amn}} \sin \sigma_{amn} t, \\ \sigma_{amn} = \left(f^2 + \frac{\lambda_{mn}^2}{\nu_a} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{77}$$

当 $m = n = 0$ 时,有 $Y_{00}(x, y) = Y_{00}$ 为常数,而 $F_{\nu 00}(t)$ 满足方程:

$$-\nu \left(\frac{d^2}{dt^2} + f^2 \right) F_{\nu mn}(t) = 0, \tag{78}$$

故有:

$$F_{\nu 00}(t) = F_{\nu 00}^{(0)} \cos ft + \frac{F_{\nu 00}^{(1)}}{f} \sin ft. \tag{79}$$

同法可知当 $\alpha_s \neq 0$ 时有:

$$F_{a00}(t) = F_{a00}^{(0)} \cos ft + \frac{F_{a00}^{(0)}}{f} \sin ft. \tag{80}$$

由此亦可见,在 $\alpha_s \neq 0$ 情况下,解答存在且唯一.

当 $\alpha_s = 0$ 时,因 $\nu \neq 0$, (75),(76)和(79)仍成立; 但因 $\nu_a = 0$, (77)及(80)不成立. 这时有:

$$F_{amn}(t) = 0, \quad (m, n \text{ 不同时为 } 0), \tag{81}$$

$$F_{a00}(t) = C_a(t). \tag{82}$$

或即 $F_a(x, y, t) = C_a(t)$. 其中 $C_a(t)$ 为 t 的任意函数. 由(81)可见,必须初始函数满足:

$$F_{amn}^{(0)} = F_{amn}^{(1)} = 0, \quad (m, n \text{ 不同时为 } 0). \tag{83}$$

下面我们对(82)和(83)作些解释. 由 $F_{amn}^{(0)}$ 等的定义, 并注意到此时 $G_a(\xi) = CW^{-1}(\xi)$, 就有 $\Delta F_a^{(0)} = \Delta F_a^{(1)} = 0$, 于是在 $F_a^{(0)}$ 及 $F_a^{(1)}$ 为 x, y 的周期函数情况下即可推出(83),且当 $m = n = 0$ 时又有:

$$F_{a00}^{(0)} = C_1, \quad F_{a00}^{(1)} = C_2, \tag{84}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数. 故为使(82)满足初条件,只需取 $C_a(0) = C_1$, $dC_a(0)/dt = C_2$ 就行了. 要最终确定 $C_a(t)$, 如前几节指出那样,要用到附加条件.

下面再讨论 V 为整空间的情况. 当 $\alpha_s \neq 0$ 时,不论 $E^{(0)}$ 有界与否,都可应用[1]的方法,求得(72)和(73)的解答 F_ν 和 F_a, 从而也就证明了解的存在和唯一性. 当 $\alpha_s = 0$ 时,可用同样方法唯一地确定 F_ν. 但此时 $\nu_a = 0$, 由(73)只能推出:

$$\Delta F_a = 0. \tag{85}$$

它只不过是整层无辐散近似(18)的结果. 注意到拉普拉斯方程在全平面上的有界解乃是常数,于是有:

$$F_a = C_a(t),\ \ C_a(0) = F_a^{(0)},\ \ \frac{dC_a(0)}{dt} = F_a^{(1)}. \tag{86}$$

当 $E^{(0)}$ 有界且 $z_s \in L_{V2}$ 时,则因扰动在 $r^2 = x^2 + y^2 \to \infty$ 时强度为 0, 因此推出 $C_a(t) = F_a^{(0)} = F_a^{(1)} = 0$, 解是唯一的. 但当 $E^{(0)}$ 无界或 $z_s \bar{\in} L_{V2}$, 则解答 χ 就相差一任意时间函数,这里符号 $\bar{\in}$ 读作"不属于".

十二、特征波动

我们将解中对应于每一特征值 ν 或 ν_a 以及特征函数 $G_\nu(\xi)$ 或 $G_a(\xi)$ 的各部分称为特征波动,按此对斜压大气中的小扰动进行分类:

(一) 对应于常定部分的解 $u^{(\infty)}$, $v^{(\infty)}$, 和 $\chi^{(\infty)}$. 由于它们满足地转关系,有涡度而无散度,且若 $\bar{u}$ 为常数而非 0, 则扰动将基本上以等于 $\bar{u}$ 的速度作水平方向的传播, 故可称为涡旋运动或慢波.

(二) 对应于(79)的部分. 所有质点都以惯性频率 $f/2\pi$ 振动着,气压沿 x, y 无起伏,能量不传播,称之为惯性振动,是纯由柯氏力作用的结果. 当 V 为全空间且 $E^{(0)}$ 无界时,惯性振动显然也存在;但 $E^{(0)}$ 有界且 $z_s \in L_{V2}$ 时则消失.

(三) 对应于 $H_{\nu mn}(t)G_\nu(\xi)Y_{mn}(x, y)$ 且 m, n 不同时为零的部分. 它使能量沿三维空间(x, y, ξ)传播,称为重力惯性内波,是由于重力的作用加上惯性力的影响,使动能和位能之间可以互相转换而形成的. 其存在还需地转偏差不为零.

(四) 对应于$H_{amn}(t)G_a(\xi)Y_{mn}(x, y)$ 且 m, n 不同时为零的部分. 当 c^2 为常数时 $G_a(\xi)$ 为 ξ 的单调减函数,能量只沿 x, y 方向传播,且当 $\alpha_s = 0$即系统无表面位能时它消失,可见它是由于有表面位能或表面气压有起伏所引起,可称为表面波. 必须指出,如果我们求垂直速度为零的那类运动,则此时静力平衡自动满足,所求得的解就是这类表面波. 可见它的形成既有重力和柯氏力的作用,也有大气的三维可压缩性的作用,单纯地称为重力惯性波或二维声波都是不合适的.

此外,当 $\alpha_s = 0$ 时,还有无关紧要的解(82),它不影响 u, v 和 T 的变化, 只不过是 z_s 的零点有漂移罢了.

十三、内波的弥散

若 F 可展成(65)—(66),则有封闭性方程:

$$\int_0^\infty F^2(\xi)d\xi = F_s^2 + \int_0^\infty F_\nu^2 d\tilde{\nu}. \tag{87}$$

先讨论扰动为 x, y 的周期函数的情况。抽去 $m=n=0$ 一项(即惯性振动),于是有 $\lambda_{mn}^2 \neq 0$。给定 $\lambda_{mn}^2 \neq 0$,由(76)可知,内波的 $\sigma_{\nu mn}$ 与 $\tilde{\nu}$ 一一对应,且有

$$\frac{1}{2\sqrt{\tilde{\nu}}} C_{\zeta g} \equiv \frac{\partial \sigma_{\nu mn}}{\partial \tilde{\nu}} = -\left(\frac{\lambda_{mn}^2}{\sigma_{\nu mn}}\right) \frac{1}{(\tilde{\nu}+Q_\infty)^2}. \tag{88}$$

故当 $0 < \tilde{\nu}_1 \leqslant \tilde{\nu} \leqslant \tilde{\nu}_2 < \infty$,有 $\partial\sigma_{\nu mn}/\partial\tilde{\nu} \neq 0$。

设 $F^{(1)} = 0$。将解(69)—(71)的内波部分 F_b 分为三项:

$$F_b = F_I + F_{II} + F_{III}, \tag{89}$$

$$F_I = \sum_{|m|>M,}\sum_{|n|>N} Y_{mn}(x,y)\int_0^\infty F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi)\cos\sigma_{\nu mn}t\, d\tilde{\nu}, \tag{90}$$

$$F_{II} = \sum_{1\leqslant|m|\leqslant M}\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N} Y_{mn}(x,y)\left(\int_0^{\tilde{\nu}_1} + \int_{\tilde{\nu}_2}^\infty\right) F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi)\cos\sigma_{\nu mn}t\, d\tilde{\nu}, \tag{91}$$

$$F_{III} = \sum_{1\leqslant|m|\leqslant M}\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N} Y_{mn}(x,y)\int_{\tilde{\nu}_2}^{\tilde{\nu}_1} F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi)\cos\sigma_{\nu mn}t\, d\tilde{\nu}. \tag{92}$$

任给 $\varepsilon > 0$,可选取足够大的M和 N,使得

$$\iint_{S_s}\int_0^\infty F_I^2 d\xi dx dy = c_1 \sum_{|m|>M}\sum_{|n|>N}\int_0^\infty (F_{\nu mn}^{(0)}\cos\sigma_{\nu mn}t)^2 d\tilde{\nu}$$

$$\leqslant c_1 \sum_{|m|>M}\sum_{|n|>N}\int_0^\infty (F_{\nu mn}^{(0)})^2 d\tilde{\nu} < \varepsilon/2, \tag{94}$$

于是对于任给的足够大的 ξ^* 和对于所有的 t 都有:

$$\iint_{S_s}\int_0^{\xi^*} F_I^2 d\xi dx dy \leqslant \iint_{S_s}\int_0^\infty F_I^2 d\xi dx dy < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{95}$$

固定这样选好的M和N,可选 $\tilde{\nu}_1$ 和 $\tilde{\nu}_2$,使得对于所有的 $1 \leqslant |m| \leqslant, 1 \leqslant |n| \leqslant N$,都有:

$$\left(\int_0^{\tilde{\nu}_1} + \int_{\tilde{\nu}_2}^\infty\right)[F_{\nu mn}^{(0)}\cos\sigma_{\nu mn}t]^2 d\tilde{\nu} \leqslant \left(\int_0^{\tilde{\nu}_1} + \int_{\tilde{\nu}_2}^\infty\right)[F_{\nu mn}^{(0)}]^2 d\tilde{\nu} < (c_1 4MN)^{-1}\frac{\varepsilon}{8}. \tag{97}$$

我们再来讨论 F_{III} 的性质。按照(88),我们可将积分自变量由 $\tilde{\nu}$ 换为 $\sigma_{\nu mn}$。设当 $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ 时 $\sigma_{\nu mn} = \sigma_{1mn}, \sigma_{2mn}$,就有

$$F_{IIImn}(\xi,t) = \int_{\sigma_{1mn}}^{\sigma_{2mn}} F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi)\left(\frac{\partial\sigma_{\nu mn}}{\partial\tilde{\nu}}\right)^{-1}\cos\sigma_{\nu mn}t\, d\sigma_{\nu mn}. \tag{98}$$

因为 $G_\nu(\xi)(\partial\sigma_{\nu mn}/\partial\tilde{\nu})^{-1}$ 有界,而 $F_{\nu mn}^{(0)} \in L\tilde{\nu}_2$,故 $F_{mn}^{(0)} G_\nu(\xi)(\partial\sigma_{\nu mn}/\partial\tilde{\nu})^{-1} \in L\tilde{u}_1(\sigma_1, \sigma_2)$。应用福氏级数理论中的黎曼-勒贝格引理,就可找到足够大的数 t^*,使得当 $t \geqslant t^*$ 时,便有

$$\left|\int_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_2} F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi)\cos\sigma_{\nu mn}t\, d\tilde{\nu}\right| < \left[(c_1 4MN)^{-1}\frac{\varepsilon}{8\xi^*}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (t \geqslant t^*), \tag{99}$$

于是有

$$\int_0^{\xi^*} F_{IIImn}^2 d\xi = \int_0^{\xi^*} \left| \int_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_2} F_{\nu mn}^{(0)} G_\nu(\xi) \cos\sigma_{\nu mn} t \, d\tilde{\nu} \right|^2 d\xi < (c_1 4MN)^{-1} \frac{\varepsilon}{8}, \ (t \geqslant t^*)$$

$$\int_0^{\xi^*} (F_{IImn} + F_{IIImn})^2 d\xi \leqslant 2 \int_0^{\xi^*} (F_{IImn}^2 + F_{IIImn}^2) d\xi$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^{\infty} F_{IImn}^2 d\xi + \int_0^{\xi^*} F_{IIImn}^2 d\xi \right)$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^{\tilde{\nu}_1} + \int_{\tilde{\nu}_2}^{\infty} \right) [F_{mn}^{(0)}]^2 d\tilde{\nu} + 2(c_1 4MN)^{-1} \frac{\varepsilon}{8} < (c_1 4MN)^{-1} \frac{\varepsilon}{2}. \quad (t \geqslant t^*) \tag{100}$$

故得:

$$\iint_{S_t} \int_0^{\xi^*} (F_{II} + F_{III})^2 d\xi dx dy = c_1 \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant M} \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \int_0^{\xi^*} (F_{IImn} + F_{IIImn})^2 d\xi < \varepsilon/2. \quad (t \geqslant t^*) \tag{101}$$

综合起来，就有

$$\iint_{S_t} \int_0^{\xi^*} (F_I + F_{II} + F_{III})^2 d\xi dx dy \leqslant 2 \iint_{S_t} \int_0^{\xi^*} (F_I^2 + [F_{II} + F_{III}]^2) d\xi dx dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (t \geqslant t^*) \tag{102}$$

由于 ε 和 ξ^* 的任意性，这就证明了当 $F^{(1)} = 0$ 时解 $\partial H/\partial t$ 的内波部分当 $t \to \infty$ 时趋于零.

同法可证当 $F^{(0)} = 0$ 而 $F^{(1)} \neq 0$ 时解的内波部分当 $t \to \infty$ 时亦趋于零. 应用解的可加性，就证明了当 $t \to \infty$ 时内波能量向宇宙空间弥散掉，剩下的非常定部分由表面波及 $m = n = 0$ 一项(即惯性振动)所组成.

若 V 为全空间且 $E^{(0)}$ 有限，则沿 x, y 方向可用福氏积分来表示解答，于是仿照上述的步骤，还可证明内波和表面波的能量都向无穷远水平面区域弥散掉，解答趋于常定.

若 V 为全空间且 $E^{(0)}$ 无界，则因此时内波与惯性振动混在一起，在一般情况下当 $t \to \infty$ 时不会有 $\partial H_\nu/\partial t \to 0$，例如设 $(\partial H/\partial t)^{(0)} = A(\zeta)$ 且满足垂直边界条件，$(\partial^2 H/\partial t^2)^{(0)} = 0$，则显然有解 $\partial H/\partial t = A(\zeta)\cos ft$.

十四、地转适应过程

上节证明了，若 $E^{(0)}$ 有界(包括沿 x, y 为周期函数情况)，则内波强度当 $t \to \infty$ 时趋向于零. 如 V 为全空间且 $E^{(0)}$ 有界，则表面强度当 $t \to \infty$ 时亦趋于零，且惯性振动不存在，最终是解趋向于常定的地转运动.

当初始扰动为 x, y 的周期函数时，必须初条件使惯性振动及表面波不存在，方有完全的地转适应过程.

当 $\alpha_s = 0$ 时，因无表面波，故若不计惯性振动的话，亦有地转适应过程.

至于在一般的 $E^{(0)}$ 有界的情况下，虽然无完全的地转适应过程，但若注意到表面波能量随高度很快递减，故随着时间的流逝，高空的风场和气压场总近于地转平衡，如不计惯

性振动的话. 表面波的能量主要集中在大气低层，那里由于地形、摩擦及对流等的作用，使得非地转扰动是经常存在的，但除大地形作用外，它们的水平尺度都很小，可把它们当作无限空间的局地扰动问题；且由于摩擦作用将使波动能量更快地消失，剩下常定部分. 此外，还可证明，当计及地面为球面时，纯粹惯性振动不存在，而转为惯性波，它移动缓慢，且亦可区分为内波和表面波，和重力-惯性波有相同的垂直结构. 惯性内波的能量亦向宇宙空间弥散掉. 这些问题我们将在另文中详细讨论. 可见，如不计大气潮汐等这类由外源激发起来的运动的话，在自由大气中的小扰动总是自动调整到准地转平衡状态.

地转适应过程的理论有着多方面的实际应用，这些问题在[1]、[2]和[5]中有较多的讨论. 特别是在近代，由于原始方程组已大规模应用到日常数值天气预报中来，初始场资料的分析问题就成为一个很重要的研究课题；此外，由应用气象卫星观测资料而兴起的四维分析问题的研究中，各种场在时间和空间的相互协调性显得十分重要. 地转适应过程的理论研究，在解决这些新问题中也有重要意义.

本文承叶笃正同志提供宝贵意见，谨此致谢.

参 考 资 料

[1] 曾庆存，大气中的适应过程和发展过程(一)、(二)，气象学报，1963，33 卷，2—3 期.

[2] 叶笃正、李麦村，大气运动的适应过程. 科学出版社，1965.

[3] 曾庆存，斜压大气中的小扰动和地转适应过程. 1964 (未发表).

[4] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. 1946, Oxford.

[5] 曾庆存，扰动特性对大气适应过程的影响和测风资料的使用问题，气象学报，1963，33 卷，1 期.