

计算稳定性的若干问题

曾庆存

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

偏微分方程的近似解法都是用一个有限个自由度的系统来代替原来的连续介质系统。在步长为有限值(而非无穷小)情况下的计算稳定性、计算紊乱及计算准确度问题是个有实际重要性问题。本文从物理方面入手讨论这些问题,指出计算紊乱现象或计算不稳定现象是由三种机理造成的:频散效应、能谱非线性转移效应及能量增长效应;指出利用能量守恒方程及正交展开法对于克服计算紊乱现象和提高计算准确度来说可能是较好的。还特别讨论了原始方程的计算困难问题,指出非线性项的计算误差常能激发出强烈的短波长的快波,这是造成计算紊乱的最重要方面。

一、引 言

偏微分方程的近似解法中最重要的问题是计算稳定性问题和计算准确度问题,并且计算稳定性问题具有本质重要性。因为不解决它就没有可能作大量的计算,更谈不上准确度了,所以它一直是偏微分方程近似计算法的中心问题。但是现有的绝大部分理论和方法,以网格法为例,却主要是把计算稳定性问题提成当网格距无限缩小时近似解是否有界或者是否逼近真解的问题;从而避开了在有限网格距情况下的实际计算问题。这在许多问题中的确是有效的。例如在空气动力学、其他许多物理和工程问题的计算中,人们就可以按需要来缩短网格距。但它却不能完全解决气象问题,特别是数值预告问题。气象问题有其特殊困难。由于测站密度的限制,也由于计算数据的庞大,人们不可能随意缩小网格距;因而在有限网格距情况下的计算稳定性问题无法避免。实验也表现,在网格距不太小时还往往会出现另外一些计算场量紊乱现象。所有这些计算紊乱现象使得人们不可能作长时间的计算,或者使计算结果毫无意义。实际工作要求我们克服计算紊乱现象,解决这些在有限网格距情况下的计算稳定性和准确度问题。同时,如何最有效地利用初始观测数据的问题,也是一个重要问题。

所有的偏微分方程近似解法都是用一个有限个自由度的物理的或力学的系统来模拟一个连续介质系统;并且用时间上的间歇变化代替时间上的连续变化(如果时间上也用有限差分的话)。因此,从计算的准确度方面看,支配我们所要求的那些量的物理特性和物理规律应在近似方程中保留下来或最少地遭到歪曲;从计算稳定性看,紊乱现象(包括不稳定现象)也正是由于原来系统的物理性质和物理规律遭到破坏的结果。看来,要想解决

实际计算准确度问题和稳定性问题,除了一般的数学逼近考虑之外,考虑具体问题的物理特性可能是很有益处的。

这里我们试图用物理的观点对计算紊乱现象进行分析并提出一些克服它的方法。在一般的情况下,计算紊乱及不稳定现象都表现为小尺度的大振幅振动,并且振幅还可能随时间很快地增长。这在物理上,就是短波振动成分的分出或产生以及能量增长的机理的问题;因而也就是在波动的频散性质、能谱的非线性转移以及能量关系等方面,近似方程不能很好逼近原来的物理过程。底下我们着重讨论初值的计算稳定性问题,不考虑边界条件逼近方法的影响。

二、线性常系数方程

线性常系数方程不会产生新的波长的波动。计算紊乱现象就是由于频散性质或能量关系遭到破坏的结果,以平流变化方程为例可以明显的看到这种机理。取:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中 $U > 0$ 为常数, φ 以相速 U 传播,不变形。

1. 频散效应

格式 I.
$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + U \frac{1}{2\delta s} (\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}) = 0 \quad (2)$$

δs 为网格距, $\varphi_k(t) = \varphi(x_k, t)$ 为网格点 $x_k = k\delta s (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K)$ 的函数。

Обыков^[3] 求出(2)的点源函数型的解答,并举出了在无振动的初值 $\varphi^{(0)}(x)$ 情况下振

乙
九

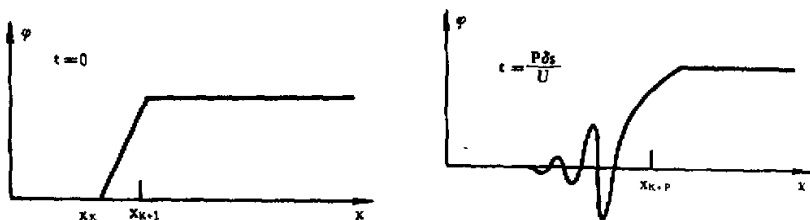


图 1

动性解答 φ_k 的例子——产生了“寄生波”(图 1),以后我们称之为第一类寄生波。用富氏(Fourier)分析法可以更清楚地说明产生这类寄生波的机理。取特解:

$$\varphi_k(t) = \varphi_m e^{im(x_k - C_m t)} \quad (3)$$

$$C_m = U \epsilon_m \quad (4)$$

其中 $\epsilon_m = \sin m\delta s / m\delta s$, $m \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_m = 0$, $m \rightarrow 0$ 时 $\epsilon_m = 1$ 。可见用(2)模拟(1)使波动相速变慢,波长越短相速误差越大;且具有频散性质。当初始场含有短波成分时,这些短波就不可避免地被分离出来。图 1 中的 $\varphi^{(0)}$ 隐含着大振幅的短波,故形成了计算紊乱现象。

叶笃正^[1]用群速概念导出了长波频散的有意义的性质。有趣的是群速概念同样可以应用到“寄生波”的分析上来。由(4)得到群速 $(C_g)_m$ 如下:

$$(C_g)_m = C_m + m \frac{\partial C_m}{\partial m} = U \cdot \cos m\delta s, \quad (5)$$

可见 $|(C_g)_m| \leq U$, 故寄生波相对于基本气流为反方向传播, 上游产生寄生波, 如图 1 所示。

格式 II.
$$\varphi_k^{(n+1)} - \varphi_k^{(n-1)} = \frac{U\delta t}{\delta s} (\varphi_{k+1}^{(n)} - \varphi_{k-1}^{(n)}) \quad (6)$$

其中 δt 为时间步长, $\varphi_k^{(n)} = \varphi(x_k, t_n)$ 是网格点 (x_k, t_n) 的函数. $(x_k = k\delta s, t_n = n\delta t; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K; n = 0, 1, 2, \dots)$.

除了微分方程所要求的初始条件 $\varphi_k^{(0)}$ 之外, 格式 II 还要求补加一个计算条件 $\varphi_k^{(1)}$. 一般由另外格式标出, 问题的解就是:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(n)} &= \varphi_m^{(1)} e^{im(x_k - C_m^{(1)} t_n)} + \varphi_m^{(11)} e^{im(x_k - C_m^{(11)} t_n)} \\ &= \varphi_m^{(1)} e^{im(x_k - C_m^{(1)} t_n)} + (-1)^n \varphi_m^{(11)} e^{im(x_k + C_m^{(11)} t_n)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$m C_m^{(1)} \delta t = \arcsin \left(\frac{U\delta t}{\delta s} \sin m\delta s \right), \quad \left(\left| \frac{U\delta t}{\delta s} \right| \leq 1 \right) \quad (8)$$

于是出现了第二种寄生波现象——同一波长的波分为两部分以不同速度传播. Gates^[4]对这种寄生波作过研究. 这种寄生波现象正是由于前后用了两种物理特性不同的格式去模拟(1)所造成的, 和波动碰到界面会发生反射、折射和双折射等物理现象十分相似. 由于它和频散有密切关系, 我们也不妨把它归入频散效应中来. 当 $\delta t \rightarrow 0$ 时格式 (II) 趋向于格式 (I), 第二种寄生波就消失了.

由(4)及(8)可见, 当 $|m\delta s| \ll 1$ 时, 空间中央差分格式可以给出较准确的 C_m 来; 但当 $|m\delta s|$ 不 $\ll 1$ 时, 却给出很大的误差. 频散效应主要在短波区域. 但若不用 $2K + 1$ 个网格函数, 而改用 $2K + 1$ 个富氏系数来模拟(1), 这时空间微分可以准确地算出, 近似方程就能更接近于连续介质的性质, 克服频散过甚的现象.

格式 III.
$$\frac{1}{\delta t} (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) + \frac{U}{2} \left(\frac{\partial \varphi^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

其中 $\varphi^{(n)} = \varphi(x, n\delta t)$. 令

$$\varphi^{(n)} = \sum_{m=0}^{\pm K} \varphi_m^{(0)} e^{im(x - C_m t_n)}, \quad (10)$$

$$C_m = U \left[\frac{1}{Um\delta t} \arctg \frac{mU\delta t}{1 - \left(\frac{mU}{2} \delta t \right)^2} \right]. \quad (11)$$

可见仍然是频散的. 但当 $\delta t \rightarrow 0$ 时(9)趋向于(1), 故若 δt 较小, 则此格式的频散较小. 为了和格式 I 作比较, 今取 $\delta t = \delta s/U$, 其中 δt 为格式 III 所用的时间步长, 而 δs 为格式 I 的空间步长, 则当 $m\delta s \ll 1$, (4)和(11)分别给出

$$C_m \approx U \left(1 - \frac{1}{3!} (m\delta s)^2 + \dots \right), \quad (4)'$$

$$C_m \approx U \left(1 + \frac{(m\delta s)^2}{2} + \dots \right). \quad (11)$$

二者有同一量级的误差,但在格式III中 $\delta t = \delta s/U$ 为有限值,不像格式I那样 $\delta t \rightarrow 0$,由此可见,在克服计算紊乱以及提高计算准确度方面,正交展开法都有优越性。

下面再讨论一种格式:

$$\text{格式 IV. } \frac{1}{\delta t} (\varphi_k^{(n+1)} - \varphi_k^{(n)}) + \frac{U}{4\delta s} [(\varphi_{k+1}^{(n+1)} - \varphi_{k-1}^{(n+1)}) + (\varphi_{k+1}^{(n)} - \varphi_{k-1}^{(n)})] = 0 \quad (12)$$

重复(10)–(11)的演算可得

$$C_m = U \left[\frac{1}{mU\delta t} \arctg \frac{\varepsilon_m m U \delta t}{1 - \left(\frac{\varepsilon_m m U \delta t}{2} \right)^2} \right]. \quad (13)$$

当 $|mU\delta t| \ll 1$ 时, (13) 接近于(4), 而当 $|m\delta s| \ll 1$ 时, (13) 接近于(11). 可见其频散性质介于格式I和格式III之间. 当 δt 过大, 或 $|m\delta s|$ 不小, C_m 的误差较大.

2. 能量增长效应

格式I, III, IV以及当 $|U\delta t/\delta s| \leq 1$ 时的格式II, 都给出常定的振幅, 没有狭义的计算不稳定现象——波幅随时间无限增长. 从能量观点看就更清楚. 其实, 能量守恒律在格式I, III, IV中都保留住了, 因而没有狭义的计算不稳定性. 例如对于格式I, IV, 能量可定义为网格点函数 φ_k^2 之和或 $[\varphi^{(n+1)}]^2$ 的积分. 但对于格式II, 只好变换到富氏系数的平方和, 于是必须应用(8). 当 $|U\delta t/\delta s| > 1$, 则满足 $|\varepsilon_m m U \delta t| > 1$ 的波数 m , C_m 为复数, 其一个的虚部为负, 引起振幅(能量)无限增长. 将格式II应用到非线性涡度方程中去, 甚至可以举出特例, 即在 $\delta t \approx 0$ 时不管 $|U\delta t/\delta s|$ 为何都不稳定^[9]. 可见, 没有明显的能量守恒性的格式含有隐患, 要仔细分析. 为了消除这种计算不稳定性, 以便作长时间的计算, 作出具有明显的能量守恒格式是有效的, 也是完全办得到的. 下面我们再举两种破坏了能量守恒律的格式:

格式V(时间向前差, 能量增长)

$$\frac{\varphi_k^{(n+1)} - \varphi_k^{(n)}}{\delta t} + \frac{U}{2\delta s} (\varphi_{k+1}^{(n)} - \varphi_{k-1}^{(n)}) = 0. \quad (14)$$

格式VI(迎风差, 能量衰减)

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{U}{\delta s} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = 0, \quad (U > 0). \quad (15)$$

三、变系数方程及非线性方程

对于变系数方程和非线性方程来说, 也存在频散性质和能量关系, 因此, 可应用上节的方法和结论进行定性分析. 此外, 在变系数方程和非线性方程中能量还可以沿波长转移, 产生出新波, 甚至能量可以不断地向短波转移——湍流现象. 与之相似, 在近似格式中还可能增进来在原来物理问题中所没有的虚假湍流现象——“计算湍流现象”, 特别是

当格式的总能量增加, 这就有供给“计算湍流”发展的“外源”, 计算紊乱将更加严重. 这是非线性问题中计算紊乱现象的最主要来源之一, 在实例中也是常见的.

空间差分是可能的原因之一, 今以下列方程为例:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (U + \lambda u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

设 U 及 $\lambda \ll 1$ 为常数. (16) 的意义是在比较均匀的气流状况下的平流变化. 设 φ, u 为 x 的周期函数, 周期为 2π , 今取:

$$u = \sum_{m=\pm 1}^{\pm M} u_m e^{imx}, \quad (17)$$

其中 \sum' 代表不包括 $m=0$ 这一项在内的和. 用格式 I 就有:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{1}{2\delta x} (U + \lambda u_k) [\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}] = 0. \quad (18)$$

若取 $K=M$, 这就相当于:

$$\varphi_k(t) = \sum_{m=0}^{\pm M} \varphi_m(t) e^{imx_k}, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M) \quad (19)$$

代入(18)得:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + Uim\varepsilon_m \varphi_m = -\lambda i \sum_{1 \leq |m'| \leq M} \varepsilon_{m-m'} u_{m'} (m-m') \varphi_{m-m'} \quad (20)$$

(20)式左边那二项为平移项, 也是频散效应的主要来源; 右边项则主要代表能谱的转移效应及能量增长效应(若取 $u=\varphi$, 则能量守恒).

定义总能量 $E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx$, 则由(19)有:

$$E = \frac{2\pi}{2} \sum_{m=0}^M \varphi_m \varphi_{-m} = \pi \sum_{m=0}^M \varphi_m \varphi_m^* = \sum_{m=0}^M E_m,$$

其中 φ_m^* 为 φ_m 之共轭复数, $E_m = \left(\frac{1}{2} \varphi_m \varphi_m^*\right) 2\pi$ 即是分波的能量.

用 $\pi \varphi_m^*$ 乘 (20) 式并取实数部分, 就可以得到分波能量变化的公式, 并且只需讨论 $m > 0$ 的情况即可. 这时有:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_m}{\partial t} = \sum_{\substack{m' > 0 \\ m > m-m' > 0}} \phi_{mm'} + \sum_{\substack{m' > 0 \\ 0 > m-m' > -m}} \phi_{mm'} + \sum_{\substack{m' < 0 \\ -m > m-m' > -(M-m)}} \phi_{mm'} + \sum_{\substack{0 > m' > -(M-m) \\ M > m-m' > 0}} \phi_{mm'}, \\ \phi_{mm'} = \text{Re}(-i\pi\lambda\varepsilon_{m-m'}u_{m'}(m-m')\varphi_{m-m'}\varphi_m^*), \end{cases} \quad (21)$$

其中 Re 表实数部分. 假定某一时刻 t_0 右边各项均为正, 此时其前二组就代表长波向短波的能量转移效应, 后二组则代表短波向长波的能量转移效应, 如果 $(m \geq \frac{M}{2})$ 则没有第三组). 如图 2.

若令(20)及(21)中的 $\varepsilon_p = 1$ 并令 $M \rightarrow \infty$, 便得到(16)的准确解的情况. 我们可以很方便的将差分方程的解和它作比较. 因为我们这里有 $|p| \leq K=M$, $\left|p \frac{\pi}{K}\right| \leq \pi$, 又

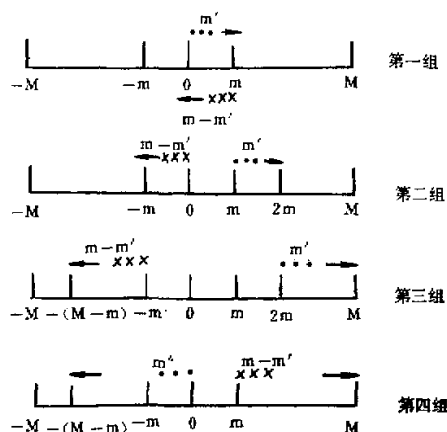


图 2

$\delta s = \pi/K$, 故有 $\varepsilon_p > 0$, 可见在时刻 $t = t_0$ 差分不改变能量转移的方向. 又 $\varepsilon_p \leq 1$, (只有当 $p = 0$ 时才有 $\varepsilon_0 = 1$), 并且 ε_p 随着 $|p|$ 的增大而迅速减小, 可见空间差分的结果使得每组中每一项的值都较实际的小, (如果时间也作差分则不一定小而可能增大), 但相对地高估了第一、二组的贡献; 相对地有利于能量向短波的转移.

可见, 用近似法解非线性问题时, 除了注意克服频散效应之外, 应特别注意能量守恒规律以及非线性项的计算方法, 使能谱转移效应尽可能符合原来的物理模式. 由此看来, 正交展开法可能又是最有效的. 如用有限差分法, 则使非线性项算得光滑些也是合理的和必要的, 尽管这样做有可能使场量的变化较慢, 但可消除相对高估能量向短波转移的效应.

引入摩擦耗散来克服计算紊乱也是一法^[2], 而且还可自动消除偶然误差. 但要注意不要因此而使长波能量过于衰减, 降低了计算准确度.

四、原始方程式组

原始方程中除包含有平流过程之外, 还包含有可压缩流体中的波动过程(快波), 使计算紊乱问题更为严重、更为复杂. 下面分析一个最简单的模式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - l v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} + l u = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + g^{-1} \mu^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

其中 U, g, l, μ^2 均为常数.

1. 频散性质

取波动解 $e^{im(x-Ct)}$, 得三相速:

$$C_m^{(1)} = U, \quad C_m^{(11,111)} = U \pm \mu \sqrt{1 + \left(\frac{l}{\mu}\right)^2 m^{-2}}. \quad (23)$$

慢波($C^{(1)}$)不频散, 而在 $l \neq 0$ 时快波($C^{(11,111)}$)是频散的. 故若初始场中含有或隐含有大振幅的短波长的快波, 它将很快地分离出来, 形成在时间和空间上急剧振动现象, 但这为真实物理过程所有, 要消去这种紊乱现象, 就得在初始场中预先消去它.

定义特征波长 $L_0 = 2\pi\mu/l$, 波长 $L_m = 2\pi m^{-1}$, 依次称 $(L_m/L_0)^2 \ll 1$, ≈ 1 , $\gg 1$ 为短波、中波和长波. 由(23)可见, 对于短波 $C_m^{(11,111)} \approx U \pm \mu$, 几乎不频散; 频散只在中、长波区才显著. 在实际大气中, $L_0/2\pi \approx 3$ 千公里(正压大气)或 800 公里(斜压大气); $L_m/L_0 \approx 1$, 则 $L_m/2 \approx 9$ 千公里(正压大气)或 2400 公里(斜压大气). 如取 $\delta s = 300$ 公里, 则半波长为 $(1-2)\delta s$ 的波为短波. 故即使有单个偶然误差性质的初始扰动或图 1 的扰动, 实有的物理过程(22)不会形成严重的寄生波现象.

其次, 若在初始时刻快波只集中于局部地区, 则由于快波能量的弥散过程, 将会使得快波振幅很快变得不明显. 当扰动只局限于 (x, y) 中的局部区域时更是如此.

今用下列近似格式代替(22), 并取扰动不依赖于 y :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{U}{2\delta s} (u_{k+1} - u_{k-1}) + \frac{g}{2\delta s} (h_{k+1} - h_{k-1}) - l v_k = 0, \\ \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{U}{2\delta s} (v_{k+1} - v_{k-1}) + l u_k = 0, \\ \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{U}{2\delta s} (h_{k+1} - h_{k-1}) + \frac{\mu^2}{2\delta s g} (u_{k+1} - u_{k-1}) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

由此得到三个相速:

$$C_m^{(1)} = \varepsilon_m U, \quad C_m^{(11,111)} = \varepsilon_m \left[U \pm \mu \sqrt{1 + \left(\frac{l}{\mu}\right)^2 (\varepsilon_m m)^{-2}} \right] \quad (25)$$

慢波和快波都频散, 而且与物理上真实的频散现象相反, 短波频散严重, 故快波和慢波都会出现寄生波, 特别是快波中寄生波的传递较快, 将使得全场很快就紊乱起来.

其次, 可证明(24)有总能量 $\frac{1}{2} \sum_k \delta s (u_k^2 + v_k^2 + g h_k^2 / \mu^2)$ 守恒, 因此亦可定性地模拟(22)的地转适应过程, 即局地扰动所造成的快波将由于能量沿空间的弥散而强度衰减. 但由于在短波区域, 由(25)算得的 $|C_m^{(11,111)}|$ 比由(23)算得的要小得多, 这就使得当有点源或在很小区域内有强的非地转扰动时, 由(24)给出的适应过程完成得很慢, 在较长时段内都可以看到比较显著的慢波型和快波型寄生波.

由此可见, 对初始场作合适的处理, 预先消去波长很短的部分(尤其是快波)是完全必要的.

若用类似于格式 II—VI 的格式来模拟(22), 也得到和第二节以及上段相应的结果, 今从略. 若取较小的 δs , 用空间差分, 则各格式给出 $C_m^{(1)} \approx \varepsilon_m U$, 慢波传递过慢.

2. 快波的非线性激发

造成计算紊乱现象的最严重根源在于非线性项激发出波长很短的快波来。

非线性问题的近似计算方法都在一定时段 δt 内把非线性项作为常定的, 因此可讨论下列方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - l v = a_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l u = a_2, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\mu^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = a_3, \end{cases} \quad (26)$$

其中 a_1, a_2, a_3 不依赖于 t . 只讨论非线性项作用, 可取 $u^{(0)} = v^{(0)} = h^{(0)} = 0$. 再设

$$\begin{cases} a_i = (A_i)_m e^{imx}, & (A_i)_m = \text{常数}, \quad i = 1, 2, 3. \\ gh = gH_m(t) e^{imx}, \end{cases} \quad (27)$$

就有

$$\begin{aligned} gH_m = & \left[\frac{(A_3)_m - \mu^2 l^{-1} m (A_2)_m}{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1} \right] t + \left[\frac{(A_3)_m}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1}} - \frac{(A_3)_m - \mu^2 l^{-1} m (A_2)_m}{\left(\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1\right)^{3/2}} \right] \\ & \cdot t^{-1} \sin lt \sqrt{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (28)$$

其中右边第一项为激发出来的慢波, 第二项为快波. 可证这慢波部分与按准地转模式算得的相一致. 如计及快波, 则当 $lt \sqrt{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1} \ll 1$ 时, (28) 给出:

$$\begin{aligned} gH_m \approx & \left[\frac{(A_3)_m - \mu^2 l^{-1} m (A_2)_m}{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1} \right] t + \left[(A_3)_m - \frac{(A_3)_m - \mu^2 l^{-1} m (A_2)_m}{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1} \right] t \\ = & (A_3)_m t, \end{aligned} \quad (29)$$

而慢波部分(或即由准地转模式算得)则是

$$(gH_m)_s = \left[\frac{(A_3)_m - \mu^2 l^{-1} m (A_2)_m}{\left(\frac{\mu}{l} m\right)^2 + 1} \right] t. \quad (30)$$

对于 $\mu^2 l^{-1} m^2 \ll 1$ 的长波而言, 两者量级相同. 但对 $\mu^2 l^{-1} m^2 > 1$ 的短波而言, $(A_3)_m$ 的贡献在(29)中远大于(30)(图3). u, v 也类似. 故若非线性项的短波部分计算有误差, 将在短时间内激发出虚假的快波来, 其振幅远大于慢波部分的演变. 所谓原始方程对误差特别敏感, 即在于此; 而这种敏感性主要表现在短波部分. 非线性项的计算误差很快就引起 u, v, h 场紊乱. 如此反复下去, 在中、短波部分只能算得一些虚假的快波来, 真正的中、短波甚至长波的快波部分都可能被掩盖了. 所以, 较正确地计算非线性项或者适当地抑制其快波部分, 这是十分必要的.

如果用(24)那样的格式, 只需用 $\varepsilon_m m$ 代替(28)–(30)中 m 的即可。可见这样做使得短波长的快波振幅以及慢波发展率都比真解大为增加, 对计算稳定性都是不利的。又若时间微商改用差分, 则当 δt 足够小时, 结果和结论亦无大异。

按照上述分析可见, 慢波演变部分要在较长时段内才能显示出来, 而快波则表现为时间上的高频振动, 如图4所示。为了算得慢波演变部分, 必须取足够小的 δt 或者足够大的 δt 。前者可较准确地算出慢波和快波, 而后者则是充分显示快波演变。

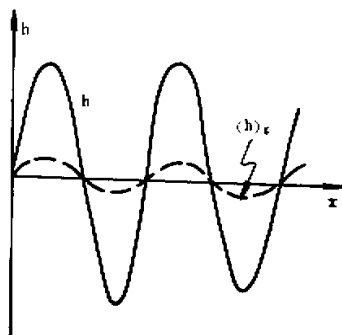


图 3

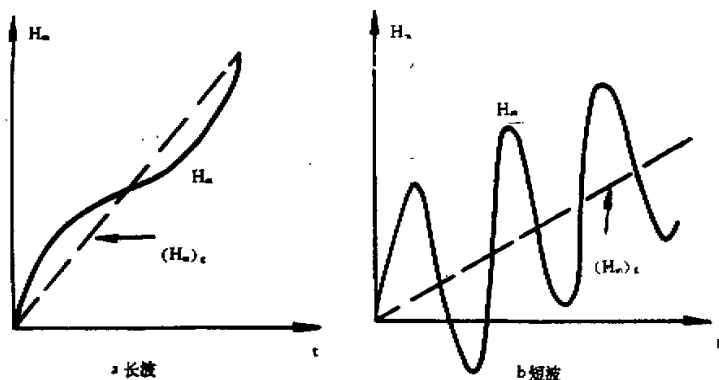


图 4

3. 抑制快波格式

今将[6]和[7]的格式统一起来, 写成:

$$\begin{cases} \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t} + \theta \left(g \frac{\partial h^{(n+1)}}{\partial x} - l v^{(n+1)} \right) = -(1-\theta) \left(g \frac{\partial h^{(n)}}{\partial x} - l v^{(n)} \right) + a_1^{(n+1, n)}, \\ \frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\delta t} + \theta \left(g \frac{\partial h^{(n+1)}}{\partial y} + l u^{(n+1)} \right) = -(1-\theta) \left(g \frac{\partial h^{(n)}}{\partial y} + l u^{(n)} \right) + a_2^{(n+1, n)}, \\ \frac{h^{(n+1)} - h^{(n)}}{\delta t} + \theta \frac{\mu^2}{g} \left(\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(n+1)}}{\partial y} \right) = -(1-\theta) \frac{\mu^2}{g} \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(n)}}{\partial y} \right) + a_3^{(n+1, n)}. \end{cases} \quad (31)$$

取 $\theta = 1$ (“时间向后差”格式)即为[6]的格式; 取 $\theta = 1/2$ (“时间准中央差”格式)即为[7]的格式。

由(31)可化为一个只含有 h 的方程, 当 $\delta t \rightarrow \infty$ 时它是:

$$\left(\frac{\mu^2}{l^2} \Delta - 1 \right) (gh - gh^{(0)}) = \frac{\mu^2}{\theta l} \left(Q^{(0)} - \frac{g}{l} \Delta h^{(0)} \right) + \left[\delta t \left(\frac{\mu^2}{l} a_2 - a_3 \right) \right]. \quad (32)$$

除右端第一项外,这就是准地转模式,而右边第一项给出初始地转偏差对适应了的影响。可见取足够大的 δt 能充分显示慢波演变,至于如何计算 a_1 , a_2 和 a_3 才能有较准确的结果则是另外的问题,这里不拟讨论。在(32)中 $a_D \equiv (\partial a_2 / \partial x - \partial a_1 / \partial y)$, $Q \equiv \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ 。

当 δt 不很大时,若取 $\theta = 1$ 仍可抑制快波,但取 $\theta = 1/2$, 则快波波幅不衰减。下面我们给出前者的证明。为此只需要讨论线性问题即可。在(33)中取 $\theta = 1$, 推出关于散度 $D^{(n)}$ 的方程,并设 $D^{(n)} = d_m^{(n)} e^{imx}$, 就有

$$d_m^{(n)} = \left\{ \frac{1}{1 + (\delta t)^2 (\mu^2 m^2 + l^2)} \right\}^{n/2} (C_1 e^{i\alpha n} + C_2 e^{-i\alpha n}), \quad (33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \delta t \sqrt{l^2 + m^2 \mu^2}.$$

故得: $n\delta t \rightarrow \infty$ 时, $d_m^{(n)} \rightarrow 0$, 快波被抑制。

由 $n \rightarrow \infty$ 时 $d_m^{(n)} \rightarrow 0$, 可知取 $\theta = 1$ 时能量是衰减的,但可证只有快波能量被消灭,涡旋场以及与之处于平衡状态的 gh 的能量则保留了下来。注意到在非线性问题中,快波和慢波有相互作用,非线性不断激发出快波,因此,通过快波能量的衰减过程必将引起慢波能量衰减,慢波演变受到歪曲。可见,取 $\theta = 1$, 虽有明显地抑制快波之利,也有歪曲慢波之弊,宜于取较大的 δt 和作不太长时效的预报。反之,取 $\theta = 1/2$, 虽无绝对抑制快波之利,但可保持能量守恒,宜于作长时间的计算。

五、计算稳定性和准确度、计算稳定和不紊乱格式的设计

上面几节的结果表明:计算紊乱的主因在于计算不准确,产生寄生波;而计算不稳定的主因在于破坏了能量关系。当然,在一般情况下这二者相辅互成。能量关系的破坏也是由于计算不准确所致,而计算不稳定的格式必导致计算紊乱。计算稳定度(包括紊乱程度)是和准确度密切相关的。有很高计算准确度的格式必有较好的计算稳定度(当然,在差分格式中,空间差分和时间差分要协调),至于准确度本身当然又是计算中最核心的问题。因此,计算准确度问题非常值得研究。

若初始场较光滑,特征尺度远大于 δs , 这时差分法有一定精确度,不引起严重的寄生波,需要关心的是不使有狭义的计算不稳定。为此,设计能量守恒的格式是合适的。对于正压大气、斜压大气以及准地转模式和原始方程组,我们都设计出了具有能量守恒的时间和空间都用差分法的格式^[8,9]。限于篇幅,我们这里以正压大气为例,而且由于 $\delta t \approx 0$ 无法避免,时间差分也有特殊性,只讲时间差分,仍保留空间微商形式。

引入记号

$$\frac{\delta_t^+ f}{\delta t} = \frac{f^{(n+1)} - f^{(n)}}{\delta t}, \quad \bar{f} = \frac{1}{2} [f^{(n+1)} + f^{(n)}], \quad (34)$$

将(31)进行改写,并取 $\theta = 1/2$, 就是:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t^+ u}{\delta t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + l \bar{v}, \\ \frac{\delta_t^+ v}{\delta t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} - l \bar{u}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{\delta_t^+ \bar{h}}{\delta t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = -\bar{h} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right).$$

设区域为 $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$; 在边界上法向速度为零, 或解有周期性, 则由(35)可得“广义总能量守恒”:

$$\iint_{00}^{L_y L_x} \left\{ \bar{h} \frac{\delta_t^+}{\delta t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{\delta_t^+}{\delta t} \left(\frac{g}{2} h^2 \right) + \left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} \right) \frac{\delta_t^+ \bar{h}}{\delta t} \right\} dx dy = 0. \quad (36)$$

由此可见能量不可能有较大的增长或减小, 也不可能单调增长或减小, 保证有狭义的计算稳定性. 设计出本来意义上的能量守恒格式也是可能的, 因公式较繁, 从略.

我们已多次指出, 无论从计算准确度还是克服计算紊乱来说, 正交展开法都有优越性. 只要不取时间向前差那样使能量单增的格式, 正交展开法能有较好的计算稳定度. 但设计出具有能量守恒性的格式也是办得到的, 我们也一一设计了出来. 其实, 如再对(35)应用 Галёркин 方法, 注意到三角函数的正交性, 即可得稍加变形了的(36):

$$\iint_{00}^{L_y L_x} \left\{ \bar{h}_N \frac{\delta_t^+}{\delta t} \left(\frac{u_N^2 + v_N^2}{2} \right) + \left(\frac{g}{2} \right) \frac{\delta_t^+}{\delta t} (h_N^2) + \left(\frac{\bar{u}_N^2 + \bar{v}_N^2}{2} \right) \frac{\delta_t^+}{\delta t} ({}^{(N)}\bar{h}) \right\} dx dy = 0, \quad (37)$$

其中 f_N 表示函数 f 的展开式中前 N 项之和, 且取

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t^+ \bar{h}_N}{\delta t} + \left(\frac{\partial \bar{u}_N \bar{h}_N}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_N \bar{h}_N}{\partial y} \right)_N &= 0, \\ \frac{\delta_t^+ ({}^{(N)}\bar{h})}{\delta t} + \frac{\partial \bar{u}_N \bar{h}_N}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_N \bar{h}_N}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

应用正交展开法的不便之处在于计算量增大, 为此应研究简化和快速的计算方法.

后记: 本文写成于 1964 年, 1965 年 2 月在中国科学院地球物理研究所作过学术报告. 文中所讨论的问题现仍有现实的意义. 这次发表时, 限于篇幅, 原文第二、四、五节只删存一小部分.

参 考 资 料

- [1] Yeh, T. C. (叶笃正), *Journ. Met.*, 1949, 6, pp. 1—6.
- [2] 顾震潮, 气象学报, 1957, 28 (4).
- [3] A. M. Обуков, *Изв. АН СССР, сер. Геофиз.*, 1957, 9.
- [4] W. L. Gates, *Journ. Met.*, 1959, 16 (5).
- [5] N. A. Phillips, *The Rossby Memorial Volume*, 1959.
- [6] И. А. Кибель, *ДАН СССР*, 1960, 132 (2).
- [7] Цзэн Цян-цунь (曾庆存), *ДАН СССР*, 1961, 137 (1).
- [8] 曾庆存、李仲贞, 能量守恒定律在差分格式构造中的应用, (1965 年 2 月在中国科学院地球物理所的学术报告, 未刊).
- [9] 曾庆存, 论原始方程差分格式的构造, 1965, (未刊).