

背风波形成的非线性数值试验 及其对降水的影响*

李冀 杜行远 刘克武 叶笃正

(中央气象局研究所)

(中国科学院大气物理研究所)

一、问题的提出

众所周知,降水现象是由大、中、小不同尺度的运动造成的。而中、小尺度的降水,往往起着非常重要的作用。引起局地暴雨和阵性降水(包括冰雹)的灾害性天气,都是在适当的大尺度背景下的中小尺度的天气现象。而这种中、小尺度天气现象,又往往与地形有关。例如,背风坡大风及冰雹问题^{[1][2]}在云贵高原横断山脉,有些地方背风坡的年降水量比迎风坡要多。而冰雹现象又往往多数产生在地形的背风面。在云南、甘肃、河南、河北等都发现有上述情况。要抓灾害性天气预报,要作好降水预报,只报出大尺度的天气形势和降水是不够的,还应该把中小尺度的降水预报作好才行。因此根据大形势数值预报得到的大尺度参数,去推断中小尺度地形的影响及其产生的天气现象(降水等),就是值得研究的问题了。

具体的天气问题,其中包括降水预报,受当地特有的复杂地形的影响很大。根据认识过程,总是从特殊到一般这一普遍规律出发的,我们把背风坡天气问题,作为这一研究工作的起点。我们用中小尺度的非线性流体力学和热力学方程组,求出它们在小地形影响下的解。而将大尺度参数作为求解方程组时的侧边界条件。

二、小地形影响的动力模式

如果所讨论的问题其水平特征长度远较山脉的长度为小,这样就可以把一个三维空间的问题,简化为一个二维问题来处理。具体的处理是:我们把一个水平坐标轴 x 轴放在与山脉走向相垂直的地面上,而另一水平坐标轴 y 轴,是沿着山脉走向的, z 轴垂直于地面。由于山脉的长度,远大于我们所研究的水平尺度。故可以不考虑气象要素在 y 方向的变化。也就是认为在研究的尺度范围内, y 方向上的气象要素是均匀的。这样把问题简化成为 $x-z$ 平面上的二维问题。

从时间尺度来讲,可以认为小尺度要素分布,向大尺度背景状况适应的速度是充分快的。我们所关心的不是适应过程的本身,而是适应以后的结果。这样可以把时间微商项略去不计。而在实际计算中引进非常定项,这本质上相当于一种迭代格式。故推导时仍

1978年1月31日收到修改稿。

* 参加这项工作的还有狄新武、王五在、许有丰等同志。1978年1月6日收到。

保留时间微商项,

以 u, w 分别表示沿 x 和 z 轴的风速, ρ 表示空气密度, 则 x 及 z 方向上的运动方程式, 可分别写作

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - lw + K \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + lu - g + K \Delta w\end{aligned}$$

式中 $l = 2\omega \cos \varphi$, 是二倍的地球自转角速度在 y 方向上的投影, φ 是纬度, ω 是地球自转角速度, P 为气压值, Δ 为拉普拉斯算子, K 为乱流交换系数, g 是重力加速度.

再引进热力学方程和连续方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= K \Delta \theta \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

式中 θ 是位温. 令 $p = \bar{p} + p'$; $\theta = \bar{\theta} + \theta'$; $T = \bar{T} + T'$; $w = \bar{w} + w'$, 即把要素值分作两部份. 一部的字母上有一横, 表示某高度上的平均值, 只是 z 的函数, 而右上角有一撇的表示对平均值的偏差, 代入上述四个方程, 在准不可压缩近似下经过整理, 组成一个闭合方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - lw + K \Delta u & (1) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + lu + \lambda \theta' + K \Delta w & (2) \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} + s w = K \Delta \theta & (3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma w & (4) \end{cases}$$

在方程组中引进了 s, λ, σ 三个参数. $s = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma)$, 是大气稳定性参数, 其中 $\gamma = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ 是温度递减率, γ_d 是干绝热温度递减率, 而 $\lambda = \frac{g}{\bar{\theta}}$ 及 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{g - R\gamma}{R\bar{T}} = \sigma$. 另外 $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = 0$,

在上述(1)~(4)方程中, 除了 λ, σ, s 三个大尺度参数而外, 还有 u, w, θ', p' 四个未知数, 另外初始时刻的 \bar{u} , 也是大尺度参数, 应该事先给出. 这样(1)~(4)方程组, 在实际的地形条件下, 就可以描写与大尺度参数相适应的小尺度气象要素分布, 即求出相应的 u, w, θ' 及 p' 在小尺度范围内的分布. 在求解方程组时, 下边界条件是: 风向平行于地形廓线, 而上边界和两侧边界, 认为扰动量是 0.

由方程(4), 可以引进流函数, 使满足关系式

$$u = -e^{\sigma z} \frac{\partial \phi}{\partial z}; \quad w = e^{\sigma z} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

于是,在 y 方向上的涡度为

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -e^{\sigma x} \left(\Delta \phi + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (6)$$

将(1)式对 z 微商,再减去将(2)式对 x 微商可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + w \frac{\partial \Omega}{\partial z} = - (l + \Omega) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ - \lambda \frac{\partial \theta'}{\partial x} + K \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

用(6)式代入上式,并用(1)式消去 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} = e^{\sigma x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} - 2\sigma \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ + \lambda e^{-\sigma x} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + K \left(\Delta \Delta \phi + 4\sigma \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

再将方程(3)改写为:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = e^{\sigma x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \theta'}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta'}{\partial z} - s \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + K \Delta \theta \quad (8)$$

联立求解(7)、(8)两式,就可以得到在特定的地形条件下,与大尺度参数 λ 、 σ 、 s 、 \bar{u} 相适应的 ϕ 和 θ' 的分布,再由(5)式就可得到 u 、 w 的分布,又可由(1)式求出 p' 的分布。在实际计算时我们取 $\sigma = 10^{-4}$ 米 $^{-1}$, $\lambda = 0.0327$ 米/秒, $K = 300$ 米 2 /秒, s 和 \bar{u} , 或是根据实况给定,或是由大尺度数值预报的结果给出。

三、迭代公式

令 $\Delta \phi = q$, 这样方程(7)可记为

$$\frac{\partial q}{\partial t} - f_7(q, \theta') = 0 \quad (9)$$

而对应的定常方程,也就是省略其时间微商项后符号形式为

$$f_7(q, \theta') = 0 \quad (10)$$

同样(8)的符号形式与其对应的定常方程的符号形式,可以分别写为

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - f_8(\phi, \theta') = 0 \quad (11)$$

$$f_8(\phi, \theta') = 0 \quad (12)$$

用迭代法联立求解(10)与(12)常定方程中的 ϕ , θ' 时,设在第 n 次迭代时有

$$f_7(q^n, \theta'^n) = \varepsilon^n$$

下一次迭代值取作 $q^{n+1} = q^n + \delta q^n$, 则

$$f_7(q^{n+1}, \theta'^n) = \alpha_7 \varepsilon^n = f_7(q^n, \theta'^n) + \frac{\delta q^n}{1!} f_7'(q^n, \theta'^n)$$

即

$$\alpha_7 \varepsilon^n = \varepsilon^n + (q^{n+1} - q^n) \cdot f_7'(q^n, \theta'^n)$$

就能得到迭代公式为

$$q^{v+1} = q^v - \frac{(1 - \alpha_7)}{f'_7(q^v, \theta^v)} f_7(q^v, \theta^v) \quad (13)$$

同理

$$\theta^{v+1} = \theta^v - \frac{1 - \alpha_8}{f'_8(\phi^{v+1}, \theta^v)} f_8(\phi^{v+1}, \theta^v) \quad (14)$$

若用向前差解(9)、(11)两个非定常方程时, 从第 v 步到第 $v+1$ 步对时间积分的公式是

$$q^{v+1} = q^v + \delta t \cdot f_7(q^v, \theta^v) \quad (15)$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + \delta t \cdot f_8(\phi^{v+1}, \theta^v) \quad (16)$$

比较(13)、(15)和(14)、(16)可知, 定常情况下的迭代系数 $\frac{\alpha-1}{f'}$, 相当于非定常情况下时间向前差的时间步长 δt 。

四、用实际地形计算结果

为了定量地研究地形对中、小尺度天气现象的作用, 我们收集分析了太行山两侧的气象观测资料。结果发现在盛行西风形势下, 山脉两侧的天气现象有明显的不同, 在背风坡有相当活跃的降水出现, 而在迎风坡则有时很少有降水。

在计算时, 铅直方向差分的步长取 300 米, 水平方向的步长取 600 米, 铅直方向共取 51 个格点 15 公里的范围, 水平方向共取 171 个点, 102 公里的范围。在图 1 至 4 左下方的阴影部份是太行山在铅直剖面上的形状, 它的东坡较陡, 而西坡较缓。

以 1975 年 10 月 14 日为例, 图 1 为流线图, 从图可看出, 流线的波脊位于山顶, 并随

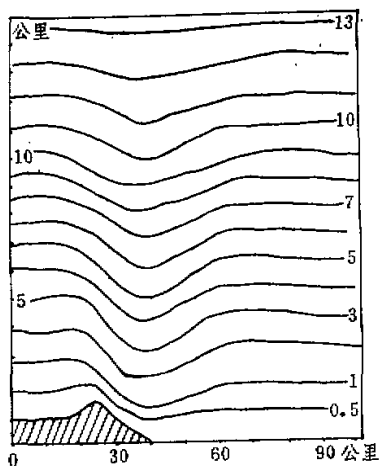


图 1 1975 年 10 月 14 日流线图(单位是 -10^4 米²/秒)。

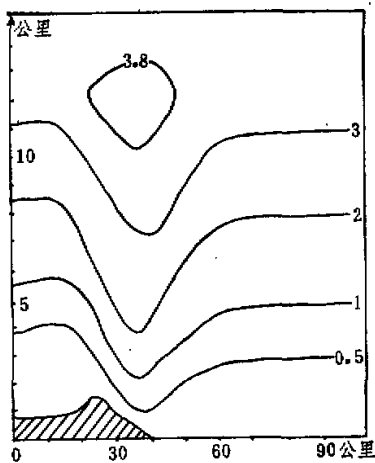


图 2 1974 年 7 月 29 日流线图。(单位: -10^4 米²/秒)。

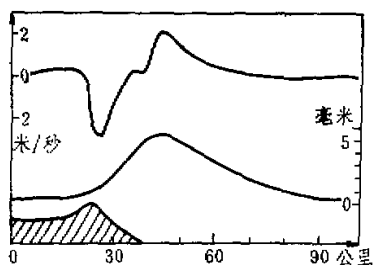


图3 1975年10月14日垂直运动与24小时降水量比较。

上面曲线表示平均垂直速度分布。
下面曲线表示平均降水量的分布。

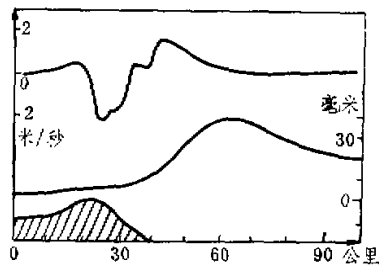


图4 1974年7月29日垂直运动与降水量比较图(说明同图3)。

高度稍向西倾斜,而波谷位于山脚上空即是背风波。图3是把垂直运动 w 与24小时降水量分布作比较。上面的曲线是2~5公里的平均 w ,可见背风坡有一强上升气流带,其值可达2米/秒。这比大尺度算得的 w 要大一个数量级^[11],这是合乎道理的。下一条曲线为观测到的降水量在南北方向(沿山脉方向)的平均值,比较两条曲线可知:降水区位于背风坡的上升气流区,且最大降水与 w 的波脊相吻合。

例二是1974年7月29日,图2为流线图,在对流层顶附近出现一个涡动。背风坡的情况与上例相同。图4为平均 w 与平均降水量的比较。可看出最大降水区偏离最大 w 区东20公里。

是不是有可能从数值预报结果去推断背风坡的存在呢?这正是我们所关心的问题。图5、图6分别是75年10月14日及74年7月29日的36小时850~500mb厚度预报图,(是由原始方程三层预报模式作出来的^[12])。图中等厚度线的间隔是40位势米。根据等厚度形势的分析,可以推断在山脉的上空,存在着一个稳定层结。此外,三个等压面上预报的西风风速(在山脉附近),都与我们在上述计算中所采用的实际情况观测数值相接近。所以,从以上两例可以看出:根据数值预报结果,去推断背风波产生的可能性是存在的。当然,对1975年10月14日的例子说来,作这种推断就较为容易,当时山脉的上空为盛行

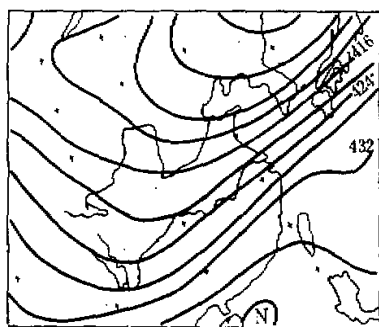


图5 1975年10月14日12时850—500mb36小时厚度预报图。

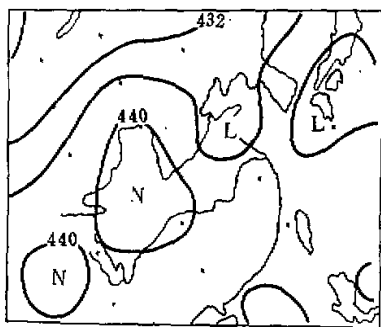


图6 1974年7月29日12时850—500mb36小时厚度预报图。

西风。有一槽将移过山来,这是有利于背风波产生的典型天气形势。但是,对 1974 年 7 月 29 日的例子,相对地就较为困难。虽然不很典型,可是在山的附近仍有一小槽,上空大部仍是偏西风,背风波仍然是有可能发生的。

五、一般山脉影响的数值实验结果

太行山是西侧坡缓而地势高,东侧坡陡地势低,不是对称的。而一般情况下,山的两侧多是对称的。所以除太行山脉的地势之外,我们还作了一般山脉影响的理想情况的实验。

在计算时铅直方向和水平方向的空间步长取作 300 米,铅直方向取 31 个格点,相当于 9 公里的范围,而水平方向取 82 个格点,相当于 24.3 公里的范围。在图 7—11 中,阴影部份是两侧对称形状的山,高为 1.2 公里,山脉放在计算范围内上游的 6 公里处,如图中阴影所示。与山脉相垂直的基本气流自左(西)向右(东)方吹。大尺度参数的给法是:把计算范围分作高、中、低三层。低层是近地面层,一般在地面至山顶附近,中层约至 700 mb 以下,700 mb 以上为高层。在每层中分别给出不同的 \bar{u} 和 γ 值,再算出大尺度参数 s 值。

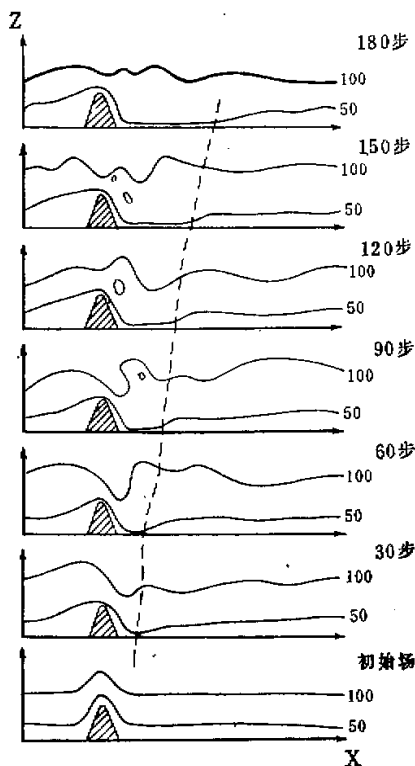


图 7 七张流场特征的简图(单位: $\cdot 10^4$ 米²/秒)。

共实验了二十七种 \bar{u} 和 γ 的不同分布的例子。现在给出以下几个例子说明。

(1) 图 7 给出的是一个迭代到 180 步的例子。每 30 步给出一张简图, 共七张简图。每张简图只给出了两条能够表征基本流场特征的流线。最下面一张图是初始状态, 随着计算的发展, 山后的流线发生了变化。低层的流线 (-50×10^2 米²/秒), 向靠近地面方向发展, 梯度加大, 出现山脚大风(指风速达到或超过初始状态的二倍)。从虚线标明的范围可以看出, 山脚大风区随着计算, 不断向下游延伸。从上面的流线 (-100×10^2 米²/秒) 可以看出波动的发展, 在 60 步时达到振幅最大值。因此一般迭代 60 ~ 80 步就可满足适应的要求。

(2) 图 8 和图 9 中的两个例子, 风速分布相同, 是随高度增加的。图 8 的 $\gamma = 0.75^\circ\text{C}/\text{百米}$, 是比较不稳定的。而图 9 的例子中层给的 $\gamma = 0.3^\circ\text{C}/\text{百米}$, 下层给的 $\gamma = 0.6^\circ\text{C}/\text{百米}$ 。图 9 出现波动, 而图 10 基本是无波动。类似的例子还有, 不一一列举。可得出结论: 当中层大气层结比较稳定时, 有利于背风波动的出现。

(3) 图 10 的例子, 与图 9 例子在风速分布和三层 γ 值都一样。不同的只是: 图 9 中层 $\gamma = 0.3^\circ\text{C}/\text{百米}$ 的稳定层结厚度是 2.7 公里。而图 10 只有 0.3 公里厚。图 9 流场出现了较强的波动, 而图 10 中上层没有任何波动。可得出另一点结论: 在临近山顶存在一稳定层。但其厚度不够大时, 波动并不会出现。

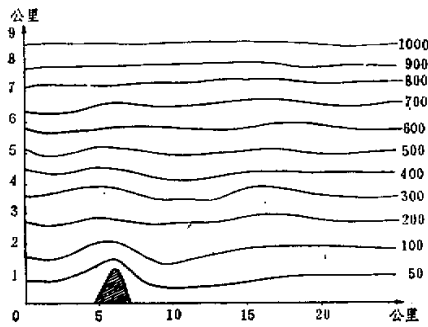


图 8 流场(单位: -10^2 米²/秒)。

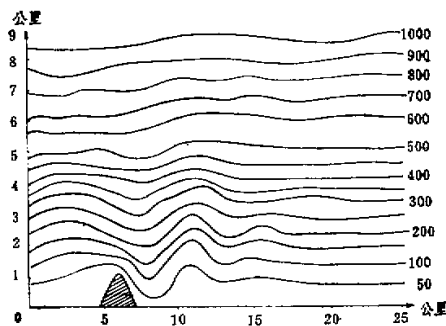


图 9 流场。(单位同上)

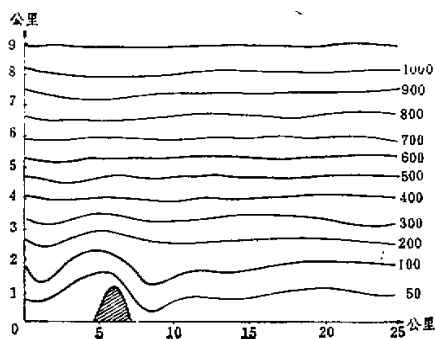


图 10 流场。(单位同上)

(4) 图 11 和图 12 两个例子, 风速分布和层结分布都完全相同。只是山的形状和大小不相同, 这从左下角阴影部分可以看出。波动在两张图上都出现了, 但不同。山的坡度愈陡、背风坡的波动愈强, 甚至出现涡动。山的坡度愈缓, 背风坡的波动愈宽, 也就是地形的尺度与形状和波动的尺度与形状是有一定的正比关系。

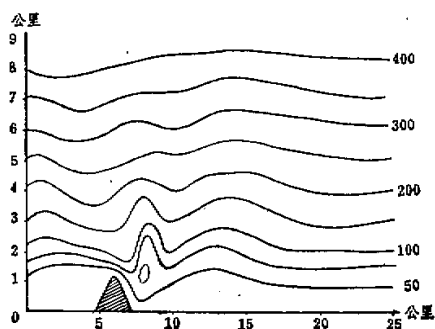


图 11 流场。(单位同上)

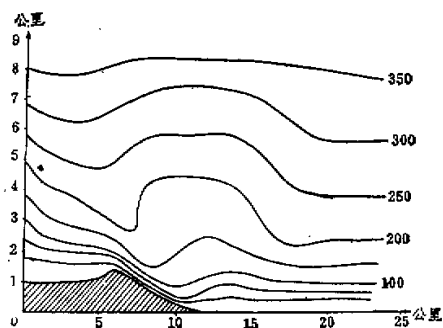


图 12 流场。(单位同上)

参 考 资 料

- [1] 云南省防雹试验小组材料, 1972年10月。
 [2] 叶笃正, 小地形对气流的影响, 科学通报, 1956年9月。
 [3] 杜行远, 关于对流高度, 《气象与水文》1959年, No. 7。
 [4] 古川武彦, 越山气流数值实验, 日本气象集志, 1973年, 51卷, 6期。
 [5] 古特曼, 中尺度气象过程非线性理论引论, 1969年。
 [6] 叶笃正, 小地形对气流的影响, 气象学报, 1956年, 27卷, 3期。
 [7] 叶笃正、李麦村, 大气运动中的适应问题, 1965年。
 [8] WMO, Technical Note No. 127, The airblow over mountains, 1973.
 [9] Tu Hsing-Yuan, Hsu You-feng, Conference of the Local Weather from NWP, WMO, No. 450, 1976, pp. 53—60.
 [10] 廖洞贤、王超, 关于西北三省区地形对天气作用的调查, 气象科技资料, 天气分析、预报附刊, 1977年。
 [11] 垂直速度场和涡度场的分析, 第二次全国数值预报会议材料, 中央气象局研究所二室, 1977年。
 [12] 陈雄山等, 初始方程三层模式, 数值预报和数理统计预报会议论文集, 科学出版社, 1974年。

勘 误 表

1978年第2期《有关付热带高压活动及其预报问题的研究》

页	行	误	正
161	9	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$
161	19	估计出的变化	估计出 $\Delta \bar{u}$ 的变化
162	20	及付高的作用	及对付高的作用
162	36	而	而
164	9	理论	讨论
164	32	$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_H$ 与 $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_T$	$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_H$ 与 $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_T$