

旋转大气中运动的多时态特征和时间边界层

伍荣生 巢纪平

(南京大学气象系) (中国科学院地理研究所)

一、引言

众所周知,旋转大气中的运动,存在两个在时间尺度和动力学特征上都有明显差别的过程,即适应过程和发展过程^[1]。最近,叶笃正、李麦村等进一步指出^[2]: 在发展过程中,大气运动还具有迅速变化和缓慢变化的两个阶段,对于这种发展过程中的双时态特征,巢纪平^[3]从物理上作了进一步的解释。因此,联合适应过程与发展过程,运动至少存在三个时态,事实上,这种多时态特征是旋转流体中运动的一种固有现象,在本文中,我们将对此作进一步的分析与讨论。

二、决定运动的特征参数

现在来决定制约旋转地球上流体作大尺度运动时的若干特征参数。

由于地球重力场的作用,流体要向地球固体边界的一层中集中,由于质量的垂直分布造成了压力在垂直方向的变化,其变化由通常的静力方程所决定,即

$$p_z = -\rho g \quad (1)$$

式中下标表示微商,其余符号均同常用。在另一方面,压力随高度的变化应与压力本身具有相同量级,如流体的厚度为 D ,则有

$$p_z \sim \frac{p}{D} \quad (2)$$

利用状态方程,由此两式可估计出

$$D \sim \frac{p}{\rho g} = \frac{R\bar{T}}{g} = H \quad (3)$$

此为均质流体的厚度,对于地球大气来说它约为 10 Km。大气运动的根本能量来自太阳辐射,而地球与太阳的相对位置在宇宙中是固定了的,因此,当组成大气的吸收辐射的介质以及地球表层吸收辐射的物质被确定之后,由辐射能量造成的平衡温度以及它的径向分布因而也是固定了的。由此可见,对于特定的行星大气,它的气体常数 R , 平均温度 $\bar{T}$ 和重力加速度 g 一样,都是确定了的物理量,因之, H 的大小也相应地是固定了的,它并不决定于运动。

发生在重力场和柯里奥利力场中的大尺度运动,地球的旋转作用是不能忽视的,这样由 g, H 以及柯氏参数 $f(f = 2\Omega \sin \varphi, \Omega$ 为地转角速度, φ 为纬度) 可以组成一个具有长度量纲的量 L_0 , 即

$$L_0 = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad (4)$$

它也是旋转地球大气中一个确定了固有的尺度, 同样地也不决定于运动. L_0 通常称 Rossby 变形半径, 对于地球大气来说它约为 3000 Km.

下面对运动的水平特征尺度 V 进行一些分析. 对于柯氏力已经起重要作用的运动, 其压力的水平变化与运动之间应该有地转风的尺度关系, 即

$$p_x \sim p_y \sim \rho f V \quad (5)$$

由状态方程可得

$$\frac{T_y}{T} \sim \frac{p_y}{P} \sim \frac{\rho f V}{P} \sim \frac{f V}{g H} \quad (6)$$

由此得

$$V \sim \frac{g H}{f} \frac{T_y}{T} \sim \frac{\delta T}{T} \frac{g H}{f a} = \frac{\delta T}{T} \frac{L_0}{a} C \quad (7)$$

其中 $C = \sqrt{g H}$ 为重力波波速, δT 为赤道到极地的经向温度差, a 为地球半径. 根据前面分析, $\delta T, T$ 以及 C 都是确定了量, 因此特征速度 V 的大小也相应地被决定了. 按平均情况来看, $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-1}$, $L_0/a \sim 0.5$, $C \sim 300$ m/s, 所以 $V \sim 15$ m/s.

综合以上的分析可以看到: 对于某一特定的行星, 由于它的转动角速度 Ω , 半径 a , 重力 g 是确定的, 而此行星上的大气其吸收辐射的物质也是确定的, 因此, 其辐射平衡温度 T 以及从赤道到极地的温差 δT 也是确定的, 行星大气的厚度 H , 变形半径 L_0 以及运动的特征水平速度 V 也都是相应地被确定了固定的量. 例如对于火星来说, $a = 3400$ Km, $\Omega = 0.71 \times 10^{-4}$ /sec, $g = 3.76$ m/sec², 而组成火星大气的成分主要是 CO_2 , 辐射平衡温度约为 180°K, 赤道到极地温差约为 70°K, 由此算得 $H \approx 9.2$ Km, $L_0 \approx 1800$ Km, 而 $V \approx 35$ m/s, 它很接近于观测值 40 m/s*.

如果地球表面是均匀平坦的, 驱使大气运动的加热场也是均匀的, 则 L_0 可以作为地球大气中自由振荡的一个内在的特征尺度, 但由于地表在几何上, 物理属性上的不均匀, 使大气产生强迫运动. 显然, 由此产生的强迫运动的水平尺度 L 与 L_0 是独立的.

三、大气运动的多时间尺度特征

为了简单起见, 以正压运动为例来进行分析. 控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.1)$$

* 见 Gierasch, F & R. Goody, 1968., Planet. Space Sci Vol. 16, pp 615—646.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8.b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (8.c)$$

式中 $\phi = gh$, h 为自由表面的高度, $C = \sqrt{gH}$.

将方程组(8)无量纲化, 引进

$$(u, v) = V(u', v'), \quad \phi = f_0 L V \phi', \quad f = f_0 f', \quad (x, y) = L(x', y'), \quad t = T t'$$

于是就得到了无量纲方程(略去撇号):

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (9.a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.b)$$

$$\left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 R_0 \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (9.c)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{1}{f_0 T}, \quad R_0 = \frac{V}{fL}. \quad (10)$$

R_0 称为 Rossby 数. 在上一节中, 已经分析了大气运动的特征速度以及由于地表在几何上, 物理属性上的不均匀而引起的强迫运动的水平尺度, 但对于运动的时间尺度并没有确定. 事实上, 运动的特征时间并不是唯一的, 根据运动本身的特征, 可以区分为多种特征时间.

由参数 f , L , C , V 以及地球球面性的作用即 $\beta = \frac{1}{a} \frac{df}{d\varphi}$, 可以组成四个不同的特征时间, 它们为

$$T_1 = L/C, \quad T_2 = 1/f, \quad T_3 = 1/\beta L, \quad T_4 = L/V$$

其物理意义分别为: T_1 为重力波传播的特征时间, T_2 为惯性振荡的特征周期 (差 2π), T_3 为 Rossby 波的特征周期, T_4 为平流特征时间.

在这四个特征时中, 有

$$T_1/T_2 = L/L_0 \quad (11)$$

所以当 $L \approx L_0$ 时, $T_1 \approx T_2$, 即这两者是很难区分的. 而

$$T_3/T_4 = V/\beta L^2 = (L_c/L)^2$$

$$L_c = \sqrt{V/\beta} \quad (12)$$

同样的, 当 $L = L_c$ 时, T_3 也是很接近于 T_4 , 两者也是难于区分的.

实际大气中, $L_0 = 3 \times 10^3$ Km 由于 $V \approx 10$ m/s, 故 $L_c \approx 10^3$ Km, 即 $L_0 > L_c$. 在一般情况下, $L \approx L_0$, 此时, T_1 与 T_2 不易于区分, 而 T_3 与 T_4 则能够分开来, 而且有 $T_3 < T_4$. 此外,

$$T_3/T_1 = (L_c/L)^2 \cdot (C/V)$$

在 $L \approx L_0$ 时, 有 $T_3 > T_1$, 因此, 在留下来的三个特征时间中, 还有

$$T_1 < T_3 < T_4 \quad (13)$$

最重要的是 T_1 与 T_4 之比, 它为

$$T_1/T_4 = V/C = Fr^{1/2} \quad (14)$$

Fr 为 Froude 数, 其大小为 $0(10^{-1})$, 从 (14) 式可见, T_1/T_4 之值与其余的特征时间比不同, 它不因运动的水平尺度的大小而改变, 而且, 以重力波波速传播的波动过程的特征时间, 远远小于以质点速度为特征的平流过程的特征时间。这就说明这两种过程与两种时间对于任何尺度的运动来说, 都是能够清楚地区分开来, 实际上, 这两种过程就是通常所谓的快过程与慢过程。

由 (13) 式可知, 取 $T = T_4$ 是合宜的, 此时有

$$R_0 = \varepsilon \quad (15)$$

由于 R_0 数还可写成

$$R_0 = Fr^{1/2}(L_0/L) \quad (16)$$

故方程 (9) 式可写成:

$$Fr^{1/2}(L_0/L) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (17.a)$$

$$Fr^{1/2}(L_0/L) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (17.b)$$

$$Fr^{1/2}(L/L_0) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (17.c)$$

在上式中含有二个参数 $Fr^{1/2}(L_0/L)$ 及 $Fr^{1/2}(L/L_0)$, 它们的大小见图 1 (取 $Fr^{1/2} = 0.2$), 由此可见除对于特别小的或特别大的 L_0/L 值外, 它们一般均小于 1, 特别是当 $L = L_0$ 时, 上式可化简为

$$Fr^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (18.a)$$

$$Fr^{1/2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (18.b)$$

$$Fr^{1/2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (18.c)$$

在下一节, 我们来进行分析与讨论这些方程组。

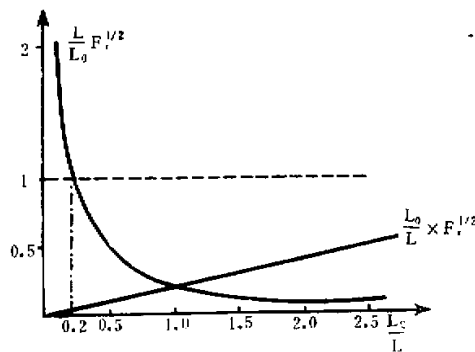


图 1

四、奇异扰动与时间边界层

为了求出方程组 (17) 或 (18) 式的解, 还必需给出边界条件和初始条件. 设初始条件为

$$t = 0; u = u_0(x, y), v = v_0(x, y), \phi = \phi_0(x, y) \quad (19)$$

在一般情况下, u_0 , v_0 和 ϕ_0 之间并不满足地转关系.

由于 $Fr^{\frac{1}{2}}$ 是一个小参数, 按通常的做法, 将 u , v , ϕ 按小参数展开, 即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} (Fr^{\frac{1}{2}})^n \begin{pmatrix} u_s^{(n)} \\ v_s^{(n)} \\ \phi_s^{(n)} \end{pmatrix} + O((Fr^{\frac{1}{2}})^N) \quad (20)$$

$$f = 1 + Fr^{\frac{1}{2}}\beta'y + \dots \quad (21)$$

其中

$$\beta' = \beta \frac{L_0 L}{\bar{u}} \text{ 或 } \beta' = \beta \frac{L^2}{\bar{u}} (L = L_0 \text{ 时}) \quad (22)$$

如此有:

$$(Fr^{\frac{1}{2}})^0: \begin{cases} v_s^{(0)} = \frac{\partial \phi_s^{(0)}}{\partial x} \end{cases} \quad (23.a)$$

$$\begin{cases} u_s^{(0)} = -\frac{\partial \phi_s^{(0)}}{\partial y} \end{cases} \quad (23.b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (23.c)$$

$$(Fr^{\frac{1}{2}})^1: \begin{cases} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial t} + u_s^{(0)} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial x} + v_s^{(0)} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial y} - \beta' y v_s^{(0)} - v_s^{(0)} = -\frac{\partial \phi_s^{(1)}}{\partial x} \end{cases} \quad (24.a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial t} + u_s^{(0)} \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial x} + v_s^{(0)} \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial y} + \beta' y u_s^{(0)} + u_s^{(1)} = -\frac{\partial \phi_s^{(1)}}{\partial y} \end{cases} \quad (24.b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_s^{(0)}}{\partial t} + u_s^{(0)} \frac{\partial \phi_s^{(0)}}{\partial x} + v_s^{(0)} \frac{\partial \phi_s^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (24.c)$$

.....

(23) 式就是通常的地转风关系式, 而 (24) 式描写的就是一般所谓的发展过程.

(23) 与 (24) 式显然是不能满足任意的初始条件 (19) 式, 除非要求在初始时刻风压场到处满足地转关系. 这种情况所以出现, 是由于小参数是位在 (17) 或 (18) 式中对时间微分的最高阶项的前面所引起的. 在一个微分方程式中, 如果最高阶项的前面带有小参数, 这种方程称为奇异的, 因为如将此项当作小项并用按小参数展开的方法来处理时, 将会改变方程的阶数和性质, 以致于不能满足完整的定解条件^[4]. 例如大雷诺数时粘性流体力学方程组就具有这种特点, 因为如略去具有最高阶导数的粘性项, 就使方程的阶数降低变成一般的理想流体方程, 因而不能满足原来的边界条件. 为了克服这一困难, Prandtl 提出了边界层的概念, 将方程的定介区域分成两个部份, 一部份为边界层区 (或称内部区域), 一部份为外部区域. 在边界层中, 粘性力是主要的, 这样就不会改变方程的阶

数,因而满足边界条件,在外部区域中,粘性力是一个小项可以略去,这样既符合于物理过程又可使方程的阶数降低,然后在两个区域之间引进了衔接条件. 这样做既能使问题得合理的简化,同时物理概念也较清楚.

类似地也可以引进时间边界层的概念,即将时间的定义域区分为内部区域(边界层)与外部区域. 在外部区域,时间变化项为小项,即具有缓慢变化的特点的发展过程,如按小参数展开,则得到方程组(23), (24). 在初始时刻附近的边界层内,时间变化项与其余主要项具有相同的量级,但可略去其余的一些小项,这样就可以使方程满足初始条件. 曾庆存^[9]曾经注意到在气象方程中引进时间边界层的概念,但未作进一步的讨论.

在初始时刻附近,引入

$$\xi = \frac{t}{\delta}$$

其中 δ 为时间边界层的厚度,如此(18)式可写成

$$\frac{Fr^{\frac{1}{2}}}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (25.a)$$

$$\frac{Fr^{\frac{1}{2}}}{\delta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (25.b)$$

$$\frac{Fr^{\frac{1}{2}}}{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (25.c)$$

如前述,适应过程和发展过程时间量级之比如(14)式为 $Fr^{\frac{1}{2}}$, 因此,取 $\delta = Fr^{\frac{1}{2}}$ 时,上式中含时间变化项才是不可略的,这时,在以 $Fr^{\frac{1}{2}}$ 为边界层厚度的情况下,(25)式可写成

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (26.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (26.b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Fr^{\frac{1}{2}} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (26.c)$$

此时方程的初始条件(19)式为

$$\xi = 0; u = u_0, v = v_0, \phi = \phi_0 \quad (27)$$

如将上式右端作为小项略去,这就是通常的描写适应问题的方程.

在边界层内,风、压场的时间变化是强烈的,随着时间的推移,当运动进入外部区域之后,这时 $\delta \approx 1$, 取 $Fr^{\frac{1}{2}}$ 的零级和一级近似就得到了(23)式和(24)式. 于是运动就进入了缓慢变化的发展过程. 由此可见,快过程与慢过程不但可以区分,而且是以 $Fr^{\frac{1}{2}}$ 为特征的边界层厚度作为两者区分的界限.

当 L 与 L_0 不等时,对于方程(17)分别引进风场与气压场的时间边界层厚度,它们为

$$\delta_v = Fr^{\frac{1}{2}} \frac{L_0}{L} \quad \delta_\phi = Fr^{\frac{1}{2}} \frac{L}{L_0} \quad (28)$$

当 $L > L_0$ 时, $\delta_\phi > \delta_v$, 由此可见当风场已经结束其快变过程而进入缓变过程的外部区域时,气压场尚未完成其快变过程而仍停留在时间边界层内. 因此,如取同一时段来比较,风场的变化远比气压场的变化为迅速和剧烈. 反之,当 $L < L_0$ 时,当气压场已经进

入缓慢变化过程的外部区域时,而风场仍停留在快变的时间边界层内,因此,对于相同时段,气压场的变化比风场迅速和剧烈。由于对前者而言,风场变化剧烈而气压场变化迟缓,在这个意义上可以认为风场向气压场适应。而对后者,气压场变化剧烈而风场变化迟缓,所以可以认为是气压场向风场适应。这是从另一种物理观点讨论了叶笃正、曾庆存(参见[1])所提出的风压场适应过程对尺度的依赖性。

于此,尚需指出(26)式,(27)式是与原始方程的数值预告模式是相应的,因为在正压原始方程进行数值求解时,实际上是把时间变化项与其它各项看作是同等重要的。因此,我们认为原始方程的预报方程只有在时间边界层内才是合适的,如超过时间边界层而作更长时间的预报时,由于控制方程没有表征出大气运动远离初值后的在外部区域内的缓变过程,所以不能认为是很合适的。

五、发展过程和数值预报方案的讨论

在外部区域中,控制方程为(23)式和(24)式,从此二式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_p + \mathbf{V}_i^{(0)} \cdot \nabla Q_p + \beta' v_i^{(0)} = 0 \quad (29)$$

式中

$$Q_p = \nabla^2 \phi_i^{(0)} - \phi_i^{(0)}$$

回到有量纲的方程,并引进地转流函数 $\psi = \frac{\phi_i^{(0)}}{f_0}$ 则得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) Q_p + \beta v = 0 \quad (30)$$

式中

$$Q_p = \nabla^2 \psi - \frac{1}{L_d^2} \psi \quad (31)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (32)$$

这就是通常所谓的正压准地转的数值预告模式,它描写的是缓变的发展过程。根据以上的讨论,由于它忽略了时间边界层的存在,所以它不能满足任意的、非地转平衡的初值条件,这也是准地转模式在数学上带有的原则性的缺陷。

因此,一个合理的预报方案应该是把满足初始条件的边界层方程和准地转模式的预报方程结合起来,先用边界层的方程预报一合适的时段,然后再改用准地转方程,两者之间加以适当的衔接条件。这样的处理方案既克服了原始方程不能表征外部区域慢变过程,也克服了准地转模式忽略了边界层的存在以及不能满足非地转平衡初值条件的缺陷。同时,在物理上也分清了适应过程和发展过程的不同,并反映了它们之间的特征,在数学上又能满足任意的初值,而使问题适定。但是,还有一些问题需作进一步研究,例如时间边界层厚度的确切的数值以及会不会因初始场非地转的分布不均匀而不能采用同一个数值等等。

六、第二时间边界层

如上所述,就适应过程与发展过程而言,可以把整个演变过程分成为边界层区域与外部区域,但叶笃正等曾指出在发展过程中又存在着两个发展速度不同的时态^[2],巢纪平指出这两种时态分别反映了两种不同的物理过程^[3],相似地,也可以用边界层的概念来加以阐述.

前面已经指出,在一般情况下, $L \approx L_0$, 此时有 $T_1 < T_3 < T_4$, 我们认为当结束快过程而进入慢过程时,开始时运动先进入一个以波动为特征的过程,然后再进入以平流为特征的过程,而且以波动为特征的过程时段要短于以平流为特征的过程时段. 类似于上面的讨论,把波动过程所在的时段看成是发展过程中的一个时间边界层,我们称为整个演变过程中的第二时间边界层.

引进:

$$\begin{aligned}(x, y) &= L(x', y'), \quad t = \frac{L}{V} t', \quad \phi = \Psi \phi' \\ (u, v) &= V(u', v') = \Psi/L(u', v')\end{aligned}\quad (33)$$

将此代入(30)式,即得到无量纲方程(略去撇号)

$$(L_c/L)^2 \frac{\partial Q_p}{\partial t} + v = -(L_c/L)^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla Q_p) \quad (34)$$

类似于前面的处理方法,引入

$$\xi_2 = t/\delta_2 \quad (35)$$

则(34)式化为

$$(L_c/L)^2 \frac{1}{\delta_2} \frac{\partial Q_p}{\partial \xi_2} + v = -(L_c/L)^2 \mathbf{V} \cdot \nabla Q_p \quad (36)$$

因之,当 $\delta_2 = (L_c/L)^2$ 时,含有时间变化项是不可忽略的,此时 δ_2 即为边界层的厚度. 在此边界层内有方程

$$\frac{\partial Q_p}{\partial \xi_2} + v = -(L_c/L)^2 \mathbf{V} \cdot \nabla Q_p \quad (37)$$

令

$$\phi = \sum_{n=0}^{N-1} (L_c/L)^{2n} \phi^{(n)} + O((L_c/L)^{2N}) \quad (38)$$

以此代入(37)式并按 $(L_c/L)^2$ 的幂次整理,得到

$$\begin{aligned}(L_c/L)^0: \quad & \frac{\partial Q_p^{(0)}}{\partial \xi_2} + v^{(0)} = 0 \\ (L_c/L)^2: \quad & \frac{\partial Q_p^{(1)}}{\partial \xi_2} + v^{(1)} = -\mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla Q_p^{(0)} \\ & \dots\dots\dots\end{aligned}\quad (39)$$

此时,各级 ϕ 均为线性 Rossby 波动过程,这是边界层内的主要特征.

在此边界层之外,从(34)式可得:

$$v^{(0)} = 0 \quad (40)$$

$$v^{(1)} = \frac{\partial Q_p^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla Q_p^{(0)} \quad (41)$$

如果 $v^{(1)}$ 很小, 则有

$$\frac{\partial Q_p^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} Q_p^{(0)} = 0 \quad (42)$$

这是一类沿 x 方向的平流过程。

从以上的分析可见, 在外部层即发展的过程中, 也存在着一个边界层, 在边界层内以线性的 Rossby 波动过程为特征, 而在边界层外, 是以沿纬向的缓慢的平流过程为特征。

最后要指出, 本工作着重讨论了 $L = L_0$ 的情况, 至于其他的例子, 将另行予以讨论。

参 考 资 料

- [1] 叶笃正, 李麦村, 大气运动中的适应问题, 科学出版社, 1964.
- [1] 叶笃正, 李麦村, 大气运动的多时间尺度特征, (即将发表), 1978.
- [3] 巢纪平, 关于大气运动多时态特征的物理解释, (即将发表), 1978.
- [4] Nayfeh, A. H., Perturbation method, John Wiley & Sons, Inc. 1973.
- [5] 曾庆存, 大气中的适应过程与发展过程, 气象学报, 33卷, 第2期, 1963.