

具有圆弧元素的 Arakawa 格式

王 申 林

(山东大学数学系)

提 要

在本文中引进了圆弧元素,使网格区域和南、北半球完全重合,导出了构造 Arakawa 格式的通用方法,并且证明了导出的 Arakawa 格式推广是真正严格满足三个守恒关系式的。本文还证明了此格式在网格结点上具有 $O(h)$ 的局部逼近误差。引进圆弧元素的方法无论对求解原始方程或是过滤方程都具有实际意义。

[2] 中把通常为了克服非线性不稳定所采用的 Arakawa 格式推广到不等距网格情况。在这种情况下,因为不能使网格区域和地球表面的地图投影区域(即通常指的南、北半球)完全重合,因此,三个守恒关系式严格说来并不成立。在本文中引进了圆弧元素,使网格区域和南、北半球完全重合,证明了导出的 Arakawa 格式推广,在这种情况下是真正严格满足三个守恒关系式的。本文还证明了该公式在网格结点上具有 $O(h)$ 的局部逼近误差。引进圆弧元素的方法无论是求解原始方程或是过滤方程都具有实际意义。

一、具有全球严格守恒关系的 Arakawa 格式

地球表面的地图投影是两个圆形区域,我们这里介绍两种网格剖分(图1)、(图2)。图

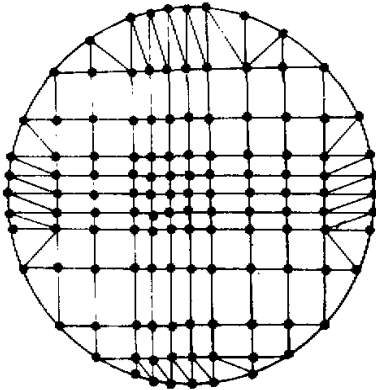


图 1

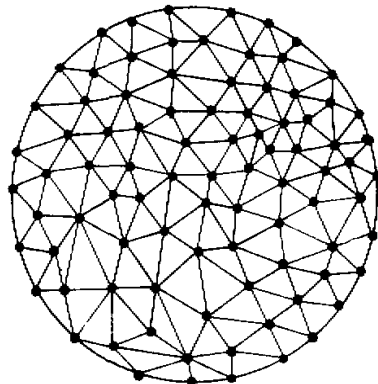


图 2

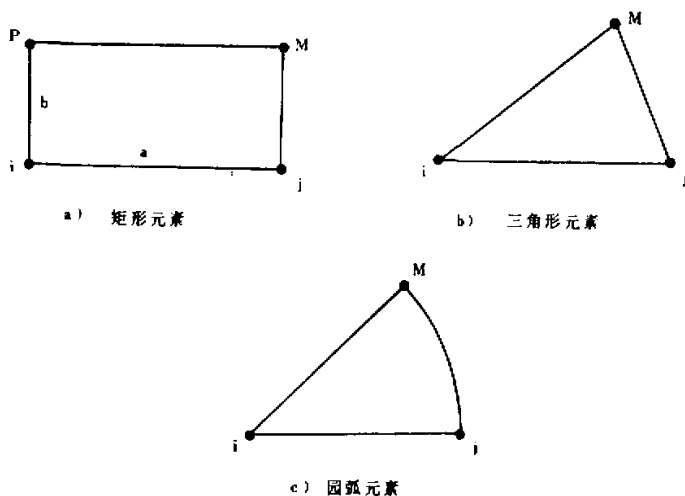


图 3

1 有三种形式的单元如图 3 的 a)~c)。图 2 有两种形式的单元如图 3 的 b)~c)。在图 1 和图 2 中网格结点用 $\cdot$ 表示。

定义

$$J_0 = \frac{\sum_{e'} \iint_{e'} J(\Phi', \zeta') N_{e'} dx dy}{\sum_{e'} \iint_{e'} N_{e'} dx dy} \quad (1)$$

J_0 可对一切网格结点定义。 e' 是含有结点 O 的任一单元。

当 e' 是矩形单元时:

$$\begin{cases} x = a\xi + x_i \\ y = b\eta + y_i \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Phi'(x, y) = (1 - \xi)(1 - \eta)\Phi_i + \xi(1 - \eta)\Phi_j + \xi\eta\Phi_M + \eta(1 - \xi)\Phi_P \\ \zeta'(x, y) = (1 - \xi)(1 - \eta)\zeta_i + \xi(1 - \eta)\zeta_j + \xi\eta\zeta_M + \eta(1 - \xi)\zeta_P \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (3)$$

Φ_i 代表 i 点处的位势高度, ζ_i 代表 i 点处的涡度。当 O 点在 e' 中任“ i ”角时 $N_{e'} = N_i = (1 - \xi)(1 - \eta)$; 当 O 点在 e' 中任“ j ”角时 $N_{e'} = N_j = \xi(1 - \eta)$; 当 O 点在 e' 中任“ M ”角时 $N_{e'} = N_M = \xi\eta$; 当 O 点在 e' 中任“ P ”角时 $N_{e'} = N_P = \eta(1 - \xi)$ 。

当 e' 是三角形单元或圆弧元素时:

$$\begin{cases} x = x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_M - x_i)\eta \\ y = y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_M - y_i)\eta \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Phi'(x, y) = (1 - \xi - \eta)\Phi_i + \xi\Phi_j + \eta\Phi_M \\ \zeta'(x, y) = (1 - \xi - \eta)\zeta_i + \xi\zeta_j + \eta\zeta_M \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (5)$$

当 O 点在 e' 中任“ i ”角时 $N_{e'} = N_i = 1 - \xi - \eta$; 当 O 点在 e' 中任“ j ”角时 $N_{e'} =$

$N_i = \xi$; 当 O 点在 e' 中任“ M ”角时 $N_{e'} = N_M = \eta$.

在(1)中

$$J(\Phi', \xi') = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi'}{\partial x} \quad (6)$$

到此, J_0 的含义十分明确. 令(1)中分母为 S_0 .

$$S_0 = \sum_{e'} \iint_{e'} N_{e'} dx dy \quad (7)$$

考虑到单元图 3a 上有:

$$N_i + N_j + N_M + N_P = 1 \quad (8)$$

在单元图 3b—3c 上有:

$$N_i + N_j + N_M = 1 \quad (9)$$

和[2]中方法相同, 可以证明:

$$\sum_0 J_0 S_0 = \iint_G J(\Phi', \xi') dx dy \quad (10)$$

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = \iint_G J(\Phi', \xi') \Phi' dx dy \quad (11)$$

$$\sum_0 \xi_0 J_0 S_0 = \iint_G J(\Phi', \xi') \xi' dx dy \quad (12)$$

这里 G 是地球表面的地图投影区域. 因此, (10)—(12) 的右边都是恒等于零的. 这就严格论证了三个守恒关系式:

$$\sum_0 J_0 S_0 = 0 \quad (13)$$

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = 0 \quad (14)$$

$$\sum_0 \xi_0 J_0 S_0 = 0 \quad (15)$$

当结点 O 属于四个矩形单元(见图 1). 此时 J_0 计算公式较简单, 可由

$$J_0 = \frac{G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}}{3(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$$

给出[2]. 当 O 点所属单元中有圆弧元素或三角形单元时, 此时 J_0 的具体表达式就依赖于 O 点所属单元个数和单元的特定形状了, 需进行各别推算. 下面重点讲一下当 e' 是圆弧元素时

$$I_1 = \iint_{e'} N_{e'} J(\Phi', \xi') dx dy \quad (16)$$

$$I_2 = \iint_{e'} N_{e'} dx dy \quad (17)$$

的计算.

由(4)可将 ξ, η 解出

$$\begin{cases} \xi = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (18)$$

上式中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 都是常数, 可通过结点 i, j, M 三点的坐标计算. 由(6)、(18)得

$$I_1 = H \iint_{e'} N_e dx dy = H I_2 \quad (19)$$

这里 $H = [a_1(\Phi_i - \Phi_j) + a_2(\Phi_M - \Phi_i)][b_1(\zeta_j - \zeta_i) + b_2(\zeta_M - \zeta_i)]$
 $- [a_1(\zeta_j - \zeta_i) + a_2(\zeta_M - \zeta_i)][b_1(\Phi_j - \Phi_i) + b_2(\Phi_M - \Phi_i)].$

是常数. N_e 是 x, y 的一次多项式, 圆弧元素中的圆弧又具有公共圆心, 因此积分值 I_1, I_2 可用[3]中的方法简单而精确地算出. 至于 e' 是矩形单元和三角形单元时, I_1 和 I_2 的计算就更简单了, 不再赘述.

二、Arakawa 格式的局部逼近误差

本文证明了就图 1、图 2 这两类网格划分, (1) 式所定义的 J_0 在一切网格结点上, 对 Jacobi 微分算子具有 $O(h)$ 的局部逼近误差.

[定理一]. 若 e' 是矩形单元, 边长分别为 a, b . Q 是 e' 中任何一点. $u(x, y) \in C^2$, U 是满足 $U(x_i, y_i) = u_i$; $U(x_j, y_j) = u_j$; $U(x_M, y_M) = u_M$; $U(x_P, y_P) = u_P$ (图 4) 的双线性内插函数, 则

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_Q + O(h) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_Q = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_Q + O(h) \end{cases} \quad (20)$$

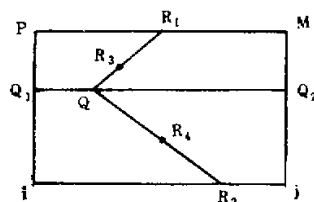


图 4

这里 $h = \max\{a, b\}$.

证明: 不失一般性可以认为, 边 a 平行 x 轴, 边 b 平行 y 轴. 过 e' 中任何一点 Q 作平行于 x 轴的直线, 交线段 Pi 于 Q_1 , 交线段 Mj 于 Q_2 . 令 $\bar{u}(x, y)$ 是在线段 Q_1Q_2 上满足 $\bar{u}(Q_1) = u(Q_1)$, $\bar{u}(Q_2) = u(Q_2)$ 的一维线性内插.

则

$$|u(Q) - \bar{u}(Q)| \leq \frac{(x_Q - x_{Q_1})(x_{Q_2} - x_Q)}{2} M_2 \leq \frac{h^2}{8} M_2 \quad (21)$$

$$\text{这里 } M_2 = \max_{e'} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right\} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \bar{u}(Q) = \alpha_1 u(Q_1) + \alpha_2 u(Q_2) & 0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \\ U(Q) = \alpha_1 U(Q_1) + \alpha_2 U(Q_2) & \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad (23)$$

所以

$$|\bar{u}(Q) - U(Q)| \leq \alpha_1 |u(Q_1) - U(Q_1)| + \alpha_2 |u(Q_2) - U(Q_2)| \quad (24)$$

由于 U 在线段 $\overline{Pi}$ 上的值是以 i 点和 P 点为插值点的 u 的线性内插. U 在线段 $\overline{Mj}$ 上的值是以 M 点和 j 点为插值点的 u 的线性内插.

所以有

$$|u(Q_i) - U(Q_i)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2 \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

由(24)、(25)得

$$|\bar{u}(Q) - U(Q)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2 \quad (26)$$

由(21)、(26)得

$$|u(Q) - U(Q)| \leq \frac{1}{4} M_2 h^2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q &= \frac{U(Q_2) - U(Q_1)}{a} = \bar{\alpha}_1 \frac{u_M - u_P}{a} + \bar{\alpha}_2 \frac{u_i - u_j}{a} \\ &= \bar{\alpha}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R_1} + \bar{\alpha}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R_2} \end{aligned} \quad (28)$$

这里 $0 \leq \bar{\alpha}_1 \leq 1$, $0 \leq \bar{\alpha}_2 \leq 1$, $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 1$. R_1 是线段 PM 上某点, R_2 是线段 ij 上某点.

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_Q \right| &\leq \bar{\alpha}_1 \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_Q - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R_1} \right| + \bar{\alpha}_2 \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_Q - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{R_2} \right| \\ &\leq \bar{\alpha}_1 \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial x} \right)_{R_1} \right| + \bar{\alpha}_2 \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_2 \partial x} \right)_{R_2} \right| \leq \sqrt{2} M_2 h \end{aligned} \quad (29)$$

这里 S_1 是线段 QR_1 方向, S_2 是线段 QR_2 方向, R_1 在线段 QR_1 上, R_2 在线段 QR_2 上.

类似地可证

$$\left| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_Q - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_Q \right| \leq \sqrt{2} M_2 h \quad (30)$$

[定理二]. 若 $\Phi, \zeta \in C^2(G)$, G 的网格剖分为图 1 或图 2.

则由(1)、(3)、(5)表示的 J_0 有

$$J_0 = J(\Phi_0, \zeta_0) + O(h) \quad (31)$$

O 可以是网格的任一结点. h 为网格的最大步长. (当单元 e' 是三角形单元或圆弧元素时, 三个结点中任何两个结点的距离, 称为它的步长.)

证明:

当 e' 是矩形单元时, 由定理一得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + O(h) \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + O(h) \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (32)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + O(h) \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + O(h) \end{cases} \quad (x, y) \in e' \quad (33)$$

当 e' 是另外两种单元时, (32)、(33) 同样成立[3]. 由此, 无论 e' 是何种单元

$$\begin{cases} J(\Phi', \zeta') = J(\Phi, \zeta) + O(h) & (x, y) \in e' \\ J(\Phi, \zeta) = J(\Phi_0, \zeta_0) + O(h) & (x_0, y_0) \in e' \end{cases} \quad (34)$$

所以

$$J(\Phi_0, \zeta_0) - J_0 = \frac{\sum_{\sigma'} \iint_{\sigma'} N_{\sigma'} [J(\Phi_0, \zeta_0) - J(\Phi', \zeta')] dx dy}{\sum_{\sigma'} \iint_{\sigma'} N_{\sigma'} dx dy} \quad (35)$$

由(34)、(35)得(31)成立.

三、后 记

1) 三个守恒关系(13)–(15), 显然只有在网格剖分区域 $\hat{G}$ 与全地球的地图投影 G 重合时, 才具有反映大气运动规律的价值. 这就使公式(1)具有理论意义. 利用公式(1)可以在全球范围内同时计算任何地点的平流项的值, 这使(1)具有实践意义.

当需在全球范围内计算(10)–(12)三个积分时, 要用到位于赤道上的网格结点处的 ϕ 值 (至于 ζ 值可以通过 ϕ 值用类似于公式(1)或 Spline 数值微分方法求得). 这就对资料工作有一定要求.

下面举一例说明本文的思想. 为简单起见,

$$\text{设 } J(\phi, \zeta) = \begin{cases} J_1(r) = \frac{3}{2}r & 0 \leq r \leq a & 0 \leq \theta \leq 2\pi, (x, y) \in G_1 \\ J_2(r) = -4r & 0 \leq r \leq \frac{a}{2} & 0 \leq \theta \leq 2\pi, (x, y) \in G_2 \\ J_3(r) = 4(r - a) & \frac{a}{2} \leq r \leq a & 0 \leq \theta \leq 2\pi, (x, y) \in G_3 \end{cases} \quad (36)$$

这里 a 是地球半径(图 5、图 6), G_1, G_2 分别是北半球和南半球地图投影. r 为 $x-y$ 平面上的向径, θ 为幅角.

利用极座标很容易计算:

$$\iint_{\hat{G}} J(\phi, \zeta) dx dy = \iint_{G_1} J(\phi, \zeta) dx dy + \iint_{G_2} J(\phi, \zeta) dx dy = \pi a^2 - \pi a^2 = 0 \quad (37)$$

而在别的网格区域, 例如取 $\hat{G}$ 为 G 的两个最大的内接正方形. (图 7、图 8)

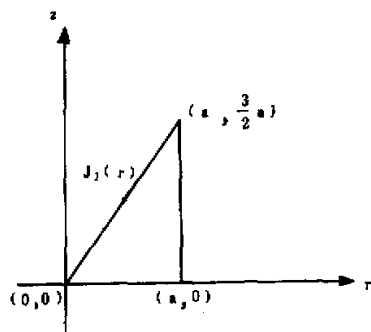


图 5

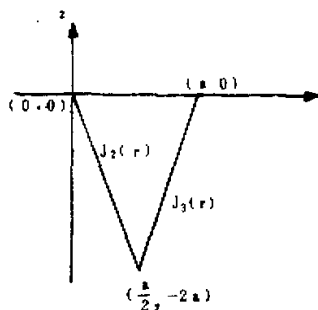


图 6

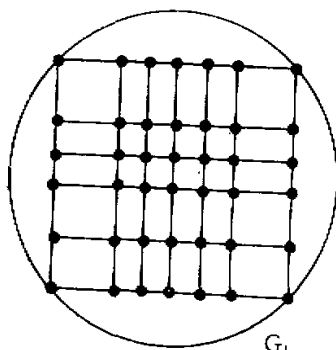


图 7

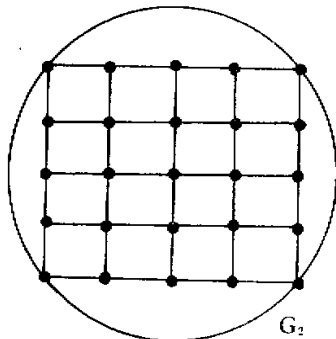


图 8

则有

$$\iint_{\mathcal{G}} J(\phi, \zeta) dx dy = -1.010 a^3 \quad (38)$$

当采用等距或不等距矩形网格 ‘Arakawa’ 格式, 且网格步长 h 充分小时有 $\zeta' = \zeta$, $\phi' = \phi$. 及

$$\iint_{\mathcal{G}} J(\phi', \zeta') dx dy = -1.010 a^3 \quad (39)$$

(38)表明, 某一时刻平流项在区域 $\mathcal{G}$ 上的总量取值为 $-1.010 a^3$. 在实际大气中这个总量应当随着时间改变而变化. 所以(38)式不是一个守恒关系式, 因此, (39)式无明确的物理意义. 但如果在 $G - \mathcal{G}$ 区域上引进包含圆弧元素的 Arakawa 格式(网格剖分见图 1、图 2).

此时有

$$\iint_{\mathcal{G}} J(\phi', \zeta') dx dy = \iint_{\mathcal{G}} J(\phi, \zeta) dx dy = 0 \quad (40)$$

因此, (40)就有明确的物理意义.

2) 用有限元方法作数值预报, 要归结到求泛函的极小问题. 计算过程中要在区域 G 上求二重积分及求函数在 G 的圆周边界上的法向导数(第二第三边值问题)的曲线积分.

用折线所围成区域 $\mathcal{G}$ 替代 G 时, 不仅积分区域存在差异, 而相应边界上的法向导数差别就更大了. 因此, 严格说来, 只有用包含曲线元素的有限元方法, 才能归结为对等价变分问题进行数值计算. 而这种计算就不必考虑普通有限元方法应当考虑的解对边界扰动的稳定性.

叶笃正教授和审稿同志提出了重要而宝贵的指导性意见, 特此, 向他们致谢.

参 考 资 料

- [1] 冯康, 有限元方法, 数学认识与实践, 1975, 1.
- [2] 孙敬犹, 王申林, 沈长泗, 陈士杰, 有限元法在数值天气预报中的应用, 科学通报, 1977, 6.
- [3] 蒋尔雄, 关于有限元法中的圆弧元素, 复旦学报, 1977, 2.
- [4] Miloš Zlamal, Curved elements in the finite element method. I. SIAM. J. Numer. Anal., Vol.

10, No. 1, 1973.

- [5] P. G. Ciarlet and C. Wagschal, Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element method, *Numer. Math.*, 17 (1971).

THE ARAKAWA SCHEME OF THE TRIANGULAR ELEMENTS WITH A CIRCULAR SIDE

Wang Shen-lin

(The University of Shantung Department of Mathematics)

ABSTRACT

The triangular elements with a circular side are used to coincide the mesh region with the Northern and Southern Hemisphere, and derived a general method of construction of the Arakawa scheme. We have proved that the generalized Arakawa scheme which we derived here really satisfies the three conservative relations strictly. We have also proved that this scheme has local approximation error $O(h)$ at every grid point of the mesh. The method of triangular elements with circular side is meaningful in practice for solving both primitive equations and filtered equations.