第7卷 第2期 大 气 科 学 Vol. 7, No. 2
1983 年 6 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA June, 1983

短 论

非线性发展方程的计算稳定性对初值的依赖

周 振 中
(湖南计算中心)

提 要

本文指出文献[4]中所举一维平流方程的'蛙跳格式'及'向前差格式'的计算不稳定特例，只要将初值稍加改变就能使计算保持稳定．并改进了文献[2]中的结果．

一

发展方程的计算稳定性问题和计算所用的差分格式、边界条件、初始条件有关[1-4]．文献[4]中指出计算稳定性和差分算子的能量守恒性或差分算子的非负性紧密相关．对不满足差分算子的能量守恒性或差分算子的非负性的计算格式，总可以举出计算不稳定的特例．本文指出文献[4]中所举一维平流方程的'蛙跳格式'及'向前差格式'的计算不稳定特例，只要将初值稍加改变就能使计算保持稳定．从而进一步说明发展方程的计算稳定性对初值的依赖．在实践中如遇到'蛙跳格式'或'向前差格式'计算不稳定时，若将初值作某种处理，对消除计算不稳定将会有所裨益．

二

一维平流方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

在实践中常用的计算格式有多种，我们现仅考虑

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+D_0(u^n)u^n=0 \qquad (向前差格式) \tag{2}$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2\tau}+D_0(u^n)u^n=0 \qquad (蛙跳格式) \tag{3}$$

1982年2月2日收到．

其中

$$[D_\alpha(u^n)u^n]_j=(1-\alpha)u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}+\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{2h}\tag{4}$$

在(2)、(3)式中 $\alpha=0$. τ 为计算所用的时间步长，h 为空间网格步长.

引理一：任给 $\varepsilon_0>0$，格式(2)对初条件

$$\{u_j^0\}=\{\cdots\cdots,0,\varepsilon_0,-\varepsilon_0,0,\varepsilon_0,-\varepsilon_0,0,\cdots\cdots\}\tag{5}$$

是计算不稳定的.

[证]：格式(2)可写为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0$$

令 $\lambda=\dfrac{\tau}{2h}$，$\lambda>0$，则上式可写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda u_j^n(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)\tag{6}$$

为明瞭起见，截取分布(5)中如下一段

$$\begin{array}{lccccccc} & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ n=0\cdots\cdots, & 0, & \varepsilon_0, & -\varepsilon_0, & 0, & \varepsilon_0, & -\varepsilon_0, & 0,\cdots\cdots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

由分布(5)据(6)可算得 $u_{j_0}^n=u_{j_3}^n=u_{j_6}^n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，而

$$u_{j_1}^1=u_{j_1}^0-\lambda u_{j_1}^0(u_{j_2}^0-u_{j_0}^0)=\varepsilon_0-\lambda\cdot\varepsilon_0\cdot(-\varepsilon_0)=\varepsilon_0+\lambda\varepsilon_0^2=\varepsilon_1.$$

显然 $\varepsilon_1>\varepsilon_0$，同理有

$$u_{j_2}^1=-\varepsilon_0-\lambda\cdot(-\varepsilon_0)\cdot(-\varepsilon_0)=-(\varepsilon_0+\lambda\varepsilon_0^2)=-\varepsilon_1$$

$$u_{j_4}^1=\varepsilon_0-\lambda\cdot\varepsilon_0\cdot(-\varepsilon_0)=\varepsilon_1\quad u_{j_5}^1=-\varepsilon_0-\lambda\cdot(-\varepsilon_0)\cdot(-\varepsilon_0)=-\varepsilon_1$$

$$u_{j_1}^2=u_{j_1}^1-\lambda u_{j_1}^1(u_{j_2}^1-u_{j_0}^1)=\varepsilon_1-\lambda\cdot(-\varepsilon_1)\cdot(-\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$$

显然 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，$u_{j_2}^2=-\varepsilon_1-\lambda\cdot(-\varepsilon_1)\cdot(-\varepsilon_1)=-(\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_1^2)=-\varepsilon_2$，同理可算得 $u_{j_4}^2=\varepsilon_2$；$u_{j_5}^2=-\varepsilon_2$. 因而 $\{u_j^n\}$ 有如下分布：

$$\begin{array}{lccccccc} & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ n=1\cdots\cdots, & 0, & \varepsilon_1, & -\varepsilon_1, & 0, & \varepsilon_1, & -\varepsilon_1, & 0,\cdots\cdots \\ n=2\cdots\cdots, & 0, & \varepsilon_2, & -\varepsilon_2, & 0, & \varepsilon_2, & -\varepsilon_2, & 0,\cdots\cdots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

ε_1、ε_2 均为常数，且 $\varepsilon_1>\varepsilon_0$，$\varepsilon_2>\varepsilon_1,\cdots$. 如此一步步地算下去，可知当 $n\to\infty$ 时，u_j^n 将增大至无穷. 即格式(2)对初分布(5)计算不稳式. 引理一得证.

定理一：任给 $\varepsilon_0>0$，$a>\varepsilon_0$，且 a 为有界常数，则格式(2)对初分布

$$\{u_j^0\}=\{\cdots,0,a+\varepsilon_0,a-\varepsilon_0,0,a+\varepsilon_0,a-\varepsilon_0,0,\cdots\}\tag{7}$$

是计算稳定的.

[证]：仿引理一的证法，截取分布(7)中的一段

$$\begin{array}{lccccccc} & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ n=0\cdots\cdots, & 0, & a+\varepsilon_0, & a-\varepsilon_0, & 0, & a+\varepsilon_0, & a-\varepsilon_0, & 0,\cdots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

据分布(7)由(6)可算得 $u_{j_0}^n = u_{j_3}^n = u_{j_6}^n = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$，而

$$u_{j_1}^1 = u_{j_1}^0 - \lambda u_{j_1}^0(u_{j_2}^0 - u_{j_0}^0) = a + \varepsilon_0 - \lambda(a + \varepsilon_0)(a - \varepsilon_0) = a + \varepsilon_1,$$

这里令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \lambda(a^2 - \varepsilon_0^2)$，因 $a > \varepsilon_0$，故 $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$．又因 a 有界，故 $|\varepsilon_1|$ 有界．

$$u_{j_2}^1 = a - \varepsilon_0 - \lambda(a - \varepsilon_0)[-(a + \varepsilon_0)] = a - \varepsilon_0 + \lambda(a^2 - \varepsilon_0^2) = a - \varepsilon_1$$

$$u_{j_4}^1 = a + \varepsilon_0 - \lambda(a + \varepsilon_0)(a - \varepsilon_0) = a + \varepsilon_1$$

$$u_{j_5}^1 = a - \varepsilon_0 - \lambda(a - \varepsilon_0)[-(a + \varepsilon_0)] = a - \varepsilon_1$$

还可算得

$$u_{j_1}^2 = a + \varepsilon_1 - \lambda(a + \varepsilon_1)(a - \varepsilon_1) = a + \varepsilon_2$$

其中 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \lambda(a^2 - \varepsilon_1^2)$；因 $a > \varepsilon_0 > \varepsilon_1$，故 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$；又因 $|a|$、$|\varepsilon_1|$ 有界，故 $|\varepsilon_2|$ 有界．

$$u_{j_2}^2 = a - \varepsilon_1 - \lambda(a - \varepsilon_1)[-(a + \varepsilon_1)] = a - \varepsilon_2,\quad u_{j_4}^2 = a + \varepsilon_2,\quad u_{j_5}^2 = a - \varepsilon_2,$$

因而 $\{u_j^n\}$ 有如下分布：

$$\begin{array}{lccccccc}
 & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\
n = 1 \cdots, & 0, & a + \varepsilon_1, & a - \varepsilon_1, & 0, & a + \varepsilon_1, & a - \varepsilon_1, & 0, \cdots \\
n = 2 \cdots, & 0, & a + \varepsilon_2, & a - \varepsilon_2, & 0, & a + \varepsilon_2, & a - \varepsilon_2, & 0, \cdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array} \tag{8}$$

设 $n = k$ 时仍有如上分布，即

$u_{j_1}^k = a + \varepsilon_k$，$u_{j_2}^k = a - \varepsilon_k$，且 $\varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}$，$|\varepsilon_k|$ 有界．今证 $n = k + 1$ 时仍有如上的分布，事实上

$$u_{j_1}^{k+1} = u_{j_1}^k - \lambda u_{j_1}^k(u_{j_2}^k - u_{j_0}^k) = a + \varepsilon_k - \lambda(a + \varepsilon_k)(a - \varepsilon_k) = a + \varepsilon_{k+1}$$

其中 $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \lambda(a^2 - \varepsilon_k^2)$，因 $a > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_k$，故 $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$；又因 $|a|$、$|\varepsilon_k|$ 有界，故 $|\varepsilon_{k+1}|$ 有界．又

$$u_{j_2}^{k+1} = u_{j_2}^k - \lambda u_{j_2}^k(u_{j_3}^k - u_{j_1}^k) = a - \varepsilon_k - \lambda(a - \varepsilon_k)[-(a + \varepsilon_k)] = a - \varepsilon_{k+1},$$

同样可算得 $u_{j_4}^{k+1} = a + \varepsilon_{k+1}$，$u_{j_5}^{k+1} = a - \varepsilon_{k+1}$．

因而当 n 为任意正整数时，$\{u_j^n\}$ 有如(8)的分布，其中 $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots\cdots > \varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n > \cdots$，且 $|\varepsilon_n|(n = 1, 2, \cdots)$ 有界，这表明 $n \to \infty$ 时解有界．所以，格式(2)对初分布(7)计算稳定．定理一证毕．

引理二：任给 $\varepsilon_0 > 0$，$\varepsilon_1 > 0$，则'蛙跳格式'(3)对初分布

$$\begin{aligned}\{u_j^0\} &= \{\cdots, 0, \varepsilon_0, -\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0, -\varepsilon_0, \cdots\} \\ \{u_j^1\} &= \{\cdots, 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, \cdots\}\end{aligned} \tag{9}$$

是计算不稳定的．

引理二的证明见文献[4]．

定理二：任给 $\varepsilon_0 > 0$、$\varepsilon_1 > 0$，$a > \mathrm{Max}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$，且 a 为有界常数，则格式(3)对初分布

$$\begin{aligned}\{u_j^0\} &= \{\cdots, 0, a + \varepsilon_0, a - \varepsilon_0, 0, a + \varepsilon_0, a - \varepsilon_0, 0, \cdots\} \\ \{u_j^1\} &= \{\cdots, 0, a + \varepsilon_1, a - \varepsilon_1, 0, a + \varepsilon_1, a - \varepsilon_1, 0, \cdots\}\end{aligned} \tag{10}$$

是计算稳定的．

[证]：格式(3)可写为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+u_j^n\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0$$

令 $\lambda=\frac{\tau}{h}$，显然有 $\lambda>0$，则上式可写为

$$u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-\lambda u_j^n(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n) \tag{11}$$

仍截取分布(10)中的一段

$$\begin{array}{llllllll} & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ n=0\cdots\cdots, & 0, & a+\varepsilon_0, & a-\varepsilon_0, & 0, & a+\varepsilon_0, & a-\varepsilon_0, & 0,\cdots \\ n=1\cdots\cdots, & 0, & a+\varepsilon_1, & a-\varepsilon_1, & 0, & a+\varepsilon_1, & a-\varepsilon_1, & 0,\cdots \end{array}$$

据分布(10)由(11)式可算得 $u_{j_0}^n=u_{j_3}^n=u_{j_6}^n=0$ $(n=2,3,\cdots)$，而

$$u_{j_1}^2=u_{j_1}^0-\lambda u_{j_1}^1(u_{j_2}^1-u_{j_0}^1)=a+\varepsilon_0-\lambda(a+\varepsilon_1)(a-\varepsilon_1)=a+\varepsilon_2,$$

这里 $\varepsilon_2=\varepsilon_0-\lambda(a^2-\varepsilon_1^2)$，因 $a>\varepsilon_1$，故 $\varepsilon_2<\varepsilon_0$。又因$|a|$有界，故$|\varepsilon_2|$有界．又

$$u_{j_2}^2=a-\varepsilon_0-\lambda(a-\varepsilon_1)[-(a+\varepsilon_1)]=a-\varepsilon_0+\lambda(a^2-\varepsilon_1^2)=a-\varepsilon_2$$

$$u_{j_4}^2=a+\varepsilon_0-\lambda(a+\varepsilon_1)(a-\varepsilon_1)=a+\varepsilon_2$$

$$u_{j_5}^2=a-\varepsilon_0-\lambda(a-\varepsilon_1)[-(a+\varepsilon_1)]=a-\varepsilon_2$$

$$u_{j_1}^3=a+\varepsilon_1-\lambda(a+\varepsilon_2)(a-\varepsilon_2)=a+\varepsilon_1-\lambda(a^2-\varepsilon_2^2)=a+\varepsilon_3$$

此处 $\varepsilon_3=\varepsilon_1-\lambda(a^2-\varepsilon_2^2)$，因 $a>\varepsilon_0>\varepsilon_2$，故 $\varepsilon_3<\varepsilon_1$；又因 a 有界、$|\varepsilon_2|$ 有界，故 $|\varepsilon_3|$ 有界．又

$$u_{j_2}^3=a-\varepsilon_1-\lambda(a-\varepsilon_2)[-(a+\varepsilon_2)]=a-\varepsilon_3,\quad u_{j_4}^3=a+\varepsilon_3,\quad u_{j_5}^3=a-\varepsilon_3,$$

因而对 $n=2$，$n=3,\cdots\{u_j^n\}$ 有如下分布：

$$\begin{array}{llllllll} & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ n=2\cdots, & 0, & a+\varepsilon_2, & a-\varepsilon_2, & 0, & a+\varepsilon_2, & a-\varepsilon_2, & 0,\cdots \\ n=3\cdots, & 0, & a+\varepsilon_3, & a-\varepsilon_3, & 0, & a+\varepsilon_3, & a-\varepsilon_3, & 0,\cdots \end{array}$$

且有 $\varepsilon_2<\varepsilon_0$，$\varepsilon_3<\varepsilon_1$，$|\varepsilon_2|$、$|\varepsilon_3|$ 有界…．设 $n=k$ 时仍有如上的分布，即

$$u_{j_1}^k=a+\varepsilon_k\qquad u_{j_2}^k=a-\varepsilon_k\qquad u_{j_4}^k=a+\varepsilon_k\qquad u_{j_5}^k=a-\varepsilon_k$$

$$u_{j_1}^{k-1}=a+\varepsilon_{k-1}\quad u_{j_2}^{k-1}=a-\varepsilon_{k-1}\quad u_{j_4}^{k-1}=a+\varepsilon_{k-1}\quad u_{j_5}^{k-1}=a-\varepsilon_{k-1}$$

且 $\varepsilon_k<\varepsilon_{k-2}$，$\varepsilon_{k-1}<\varepsilon_{k-3}$，$|\varepsilon_{k-1}|$、$|\varepsilon_k|$ 有界，今证 $n=k+1$ 时仍有如上分布，事实上

$$u_{j_1}^{k+1}=u_{j_1}^{k-1}-\lambda u_{j_1}^k(u_{j_2}^k-u_{j_0}^k)=a+\varepsilon_{k-1}-\lambda(a+\varepsilon_k)(a-\varepsilon_k)=a+\varepsilon_{k+1}$$

此处 $\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{k-1}-\lambda(a^2-\varepsilon_k^2)$，由于 $\varepsilon_k<\varepsilon_{k-2}<\cdots<\varepsilon_0<a$，且$|\varepsilon_n|$ $(n=0,1,\cdots,K-1,K)$ 有界．故 $\varepsilon_{k+1}<\varepsilon_{k-1}$，$|\varepsilon_{k+1}|$ 有界．又 $u_{j_2}^{k+1}=a-\varepsilon_{k-1}-\lambda(a-\varepsilon_k)[-(a+\varepsilon_k)]=a-\varepsilon_{k+1}$，同理可得 $u_{j_4}^{k+1}=a+\varepsilon_{k+1}$，$u_{j_5}^{k+1}=a-\varepsilon_{k+1}$．这表明 n 为任意正整数时，$\{u_j^n\}$ 有如(10)的分布，其中 $\varepsilon_{k+1}<\varepsilon_{k-1}<\cdots<\varepsilon_1$，$\varepsilon_k<\varepsilon_{k-2}<\cdots<\varepsilon_0$，且各 $|\varepsilon_k|$ 均有界．这表明 $n\to\infty$ 时解保持有界．故格式(3)在初分布为(10)时计算稳定．定理二证毕．用同样的办法还可证明．

定理三： 任给 $\varepsilon_0>0$，$a<-\varepsilon_0$，且 $|a|$ 为有界常数，则格式(2)对初分布(7)是计算

稳定的.

定理四：任给 $\varepsilon_0>0$，$\varepsilon_1>0$，$a<-\mathrm{Max}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$，且 $|a|$ 为有界常数．则格式 (3) 对初分布 (10) 是计算稳定的.

三

文献 [2] 中指出，当差分解(包括初值即 $t=0$ 时)在零附近时，计算易出现不稳定．解决办法就是对自变量作一变换，使解'远离'零值．文献 [1] 和 [3] 中都有例子说明差分解(包括初值)中的常数项对计算稳定性有较大的影响.

本文的结果可作一形象说明：从引理一、引理二得知，当初分布 u_j^0 在 x 轴附近摆动时，用格式 (2)、(3) 计算就出现计算不稳定．由定理一到定理四得知，当初值 u_j^0 在 x 轴一侧时，用格式 (2)、(3) 就能稳定计算．这就改进了文献 [2] 中的结果，即不需将初值整个平移使其'远离'零值，而只需使其在 x 轴一侧分布即可.

参　考　文　献

[1] Richtmyer R. D. & Morton, K. W., Difference Methods for initial-Value problems. 2'nd. ed. Interscience. 1967.

[2] Fornberg B., On the instability of leapfrog and crank-Nicolson approximation of a nonlinear partial Differential equation, *Math. Comp.* Vol. 27. No, 121, 45—57, 1973.

[3] 季仲贞，非线性计算稳定性的比较分析，大气科学 4 卷 4 期，344—354，1980.

[4] 曾庆存、季仲贞，发展方程的计算稳定性问题，计算数学 3 卷 1 期，79—86，1981.

THE DEPENDENCE OF COMPUTATIONAL STABILITY OF NON-LINEAR EVOLUTIVE EQUATION ON THE INITIAL-VALUE

Zhou Zhengzhong

(*Hunan Computing Center*)

Abstract

This note has pointed out: When the initial-value is slightly changed, some computational instabilities for the 'leap-frog' scheme and 'time-forward' scheme in one dimensional non-linear advective equation, which is enumerated by (4), will turn into stable. Thus, the results of (2) are improved.