

多平衡态的两种数值方案的比较

严邦良 梁幼林

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文用“半解析的非线性迭代格式”(下称 S. A. I 格式)和 Arakawa 格式分别对多平衡态问题求数值解,并把数值解和理论解作比较。对两种模态的计算结果表明:两种格式都有较好的精确度和一定的位相差。

一、引 言

在文献 [1] 中把艾克曼抽吸作用考虑为大气旋转运动的耗散效应,把地形,下垫面加热看作环境系统的强迫作用,上边界取成严格的水平面。用准地转非绝热位涡方程表示行星尺度开放系统,并把这个强迫耗散结构写在 β 平面上,构成纬向渠道模型:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \varphi + J(\varphi, \nabla^2 \varphi + h/H + \bar{\beta}y) = -K \nabla^2 (\varphi - \varphi^*) \quad (1)$$

$$0 < x < 2\pi \quad 0 < y < \pi \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{y=\pi} = 0$$

(1) 是无量纲方程, (1) 式中的符号意义见文献 [1], 已取文献 [1] 中的 $\lambda^{-2} = 0$ 。

在文献 [1] 中用 (1) 式讨论基本气流及 2 波的非线性运动与环境系统强迫作用的关系,得到一类为稳定的平衡态、另一类为不稳定的平衡态的解。稳定性平衡态包括阻塞型低指数环流和波状型高指数环流。不稳定平衡态是上述两种环流型的中间状态。平衡态失稳造成的分叉现象说明长期天气过程对外源响应的多样性,需要用数值方法分析多平衡态演变的全过程。我们用 S. A. I 格式和 Arakawa 格式分别对 (1) 式进行数值解。结果表明:两种格式都可以得到“第一模态”和“混合模态”的数值解。

二、计算格式

在 (1) 式中令

$$\omega = \nabla^2 \varphi + h/H + \bar{\beta}y \quad (2)$$

亦即:

$$\nabla^2 \varphi = \omega - h/H - \bar{\beta}y \quad (2)'$$

于是 (1) 式变成

1983 年 11 月 21 日收到。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\varphi, \omega) = K \nabla^2 \varphi^* - K\omega + K(h/H + \bar{\beta}y) \quad (3)$$

亦即:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\varphi, \omega) + K\omega = K(\nabla^2 \varphi^* + h/H + \bar{\beta}y) \quad (3')$$

两种格式都从(3)式出发构造,在时间和空间区域上布网.令 Δx 、 Δy 、 ΔT 分别为 x 方向、 y 方向和时间方向上的步长.

1) S. A. I 格式

根据文献[3]中所指出的思想,我们把(3)式按算子分解成以下几个方程:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + K\omega = f \quad f = K(\nabla^2 \varphi^* + h/H + \bar{\beta}y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

其中 $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. 显然方程(4)有解析式:

$$\omega_{i,j}^{n+1/3} = \left(\omega_{i,j}^n - \frac{f}{K} \right) e^{-K\Delta T} + \frac{f}{K} \quad (7)$$

对方程(5)、(6)采用 crank-Nicholson 方案^[3]有:

$$\left(E + \frac{\Delta T}{2} \Lambda_x \right) \omega_{i,j}^{n+2/3} = \left(E - \frac{\Delta T}{2} \Lambda_x \right) \omega_{i,j}^{n+1/3} \quad (8)$$

$$\left(E + \frac{\Delta T}{2} \Lambda_y \right) \omega_{i,j}^{n+1} = \left(E - \frac{\Delta T}{2} \Lambda_y \right) \omega_{i,j}^{n+2/3} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_x \omega_{i,j} &= [(u_{i+1,j} + u_{i,j})\omega_{i+1,j} - (u_{i,j} + u_{i-1,j})\omega_{i-1,j}]/4\Delta x \\ \Lambda_y \omega_{i,j} &= [(V_{i,j+1} + V_{i,j})\omega_{i,j+1} - (V_{i,j} + V_{i,j-1})\omega_{i,j-1}]/4\Delta y \\ i &= 1, 2, \dots, M \quad j = 2, 3, \dots, N-2 \\ M * \Delta x &= 2\pi \quad N * \Delta y = \pi \end{aligned}$$

当 $j=1$ 时, $\Lambda_y \omega_{i,1} = (V_{i,2} + V_{i,1})\omega_{i,2}/4\Delta y$; 当 $j=N-1$ 时, $\Lambda_x \omega_{i,N-1} = -(V_{i,N-1} + V_{i,N-2})\omega_{i,N-2}/4\Delta y$. 若规定记号 $A = \Lambda_x + \Lambda_y$, (a, b) 表示 a, b 的内积,并约定若 a, b 是函数则 (a, b) 是一个积分,若 a, b 是向量,则 (a, b) 表示内积. 通过直接计算并代入边界条件则有下列等式:

$$(A\omega, \omega) = 0 \quad (10)$$

于是算子 A 是半定的. 并有三个守恒性^[4]:

(1) 能量守恒

$$\|\omega^{n+1}\|^2 = \|\omega^n\|^2 \quad (11)$$

(2) 广义能量守恒

$$\|\omega^{n+1}\|^2 + \frac{\Delta T^2}{4} \|A\omega^{n+1}\|^2 = \|\omega^n\|^2 + \frac{\Delta T^2}{4} \|A\omega^n\|^2 \quad (12)$$

(3) 平均尺度守恒

$$\frac{\|\omega^{n+1}\|^2}{\|A\omega^{n+1}\|^2} = \frac{\|\omega^n\|^2}{\|A\omega^n\|^2} \quad (13)$$

2) Arakawa 格式

对 (3) 式中的 $J(\varphi, \omega)$ 采用 Arakawa^[2] 所指出的差分方案: 对时间差分采用向前差、中央差和对 $J(\varphi, \omega)$ 采用中央差, 而对 $k\omega$ 项采用向前差。于是 (3) 式的计算格式是:

$$(\omega^{n+1} - \omega^n)/\Delta T + k\omega^n + J(\varphi^n, \omega^n) = f \quad (14)$$

$$(\omega^{n+1} - \omega^{n-1})/2\Delta T + k\omega^n + J(\varphi^n, \omega^n) = f \quad (14')$$

$$(\omega^{n+1} - \omega^{n-1})/2\Delta T + k\omega^{n-1} + J(\varphi^n, \omega^n) = f \quad (14'')$$

其中

$$J(\varphi^n, \omega^n) = \frac{1}{3} (J_0^{++} + J_0^{+x} + J_0^{x+})$$

$$J^{++} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [(\varphi_1 - \varphi_3)(\omega_2 - \omega_4) - (\varphi_2 - \varphi_4)(\omega_1 - \omega_3)]$$

$$J^{+x} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [\varphi_1(\omega_5 - \omega_8) - \varphi_3(\omega_6 - \omega_7) - \varphi_2(\omega_5 - \omega_8) + \varphi_4(\omega_6 - \omega_7)]$$

$$J^{x+} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [\varphi_5(\omega_2 - \omega_4) - \varphi_7(\omega_3 - \omega_1) - \varphi_6(\omega_3 - \omega_1) + \varphi_8(\omega_2 - \omega_4)]$$

上面各式的脚标意义见[2]。众所周知, 在周期边界条件下, Arakawa 格式具有三个守恒律。

3) 泊松方程 (2') 的计算格式

泊松方程

$$-\nabla^2\varphi = F \quad F = \omega - h/H - \bar{\beta}y \quad (15)$$

的求解用超松弛迭代法。令 $A = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, 则迭代公式是:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{m+1} = & \varphi_{i,j}^m + A * \rho * [F_{i,j} + (\varphi_{i,j}^m + \varphi_{i,j-1}^m)/\Delta y^2 \\ & + (\varphi_{i+1,j}^m + \varphi_{i-1,j}^m)/\Delta x^2 - \varphi_{i,j}^m/A] \end{aligned} \quad (16)$$

m 为迭代次数, ρ 为迭代参数。边界取理论解的值。

三、两种格式的计算结果与比较

在时间和空时方向上布网。取空间网格为 16×16 。初值为 $\omega^0 = \nabla^2\bar{\varphi} + h/H + \bar{\beta}y$ 。其中 $\bar{\varphi}$ 为理论解。积分至 750 个无量纲时间单位。在 (16) 式中令迭代参数 $\rho = 1.7$, 迭代 60 次。

1) 对第一模态的计算

若地形取 $h/H = 0.4 \cos 2x \sin y$, 加热场取 $\varphi^* = 0.2\sqrt{2} \cos y$, 则 (1) 式存在着“第一模态”的两种稳定平衡态的解^[1]。其中之一称为“低指数型环流”, 它的解析表达式是:

$$\bar{\varphi} = \varphi_A F_A + \varphi_x F_k + \varphi_L F_L \quad (17)$$

其中 $F_A = \sqrt{2} \cos y$, $F_k = 2 \cos 2x \sin y$, $F_L = 2 \sin 2x \sin y$,
 $\varphi_A = 0.0294$, $\varphi_k = -0.0309$, $\varphi_L = -0.0071$.

两种格式对不同的时间步长进行计算,在 S. A. I 格式中时间步长分别取

$$\Delta T = 1, 0.5, 0.3, 0.25, 0.1$$

计算结果表明,它们之间的差别甚微(图1).

在 Arakawa 格式中时间步长分别取

$$a) \Delta T = 0.5, 0.3, 0.25, 0.1, 0.05$$

计算结果表明,当 $\Delta T = 0.5$ 时发生计算不稳定,积分至 1192 步时上溢. 当 $\Delta T = 0.3$ 时,计算稳定,但精度很差. 当 $\Delta T = 0.25$ 时,计算稳定,精度较好(图2). 当 $\Delta T = 0.1$ 、 0.05 时,计算稳定,图形跟 $\Delta T = 0.25$ 时的差不多.

b) 不管 ΔT 如何取,它都是计算不稳定的.事实上,方程 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \zeta = 0$ 的时间中央差格式是绝对不稳定的.

$$c) \Delta T = 0.2$$

计算结果表明:它是计算稳定的.但结果的精度没有 a 格式好(图3).

2) 对混合模态的计算

若地形取 $h/H = 0$, 加热场取 $\varphi^* = 0.06\sqrt{2} \cos y + 0.1 \cos 2x \sin y$, 则(1)式存在着“混和模态”的两种平衡态. 它的一个解析表达式是:

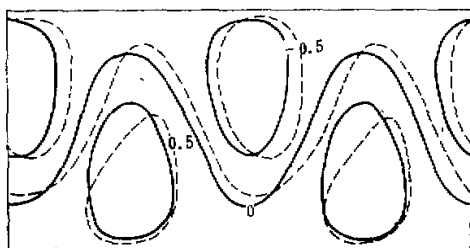


图1 S. A. I 格式在 $\Delta T = 0.5$, 积分至 750 时间单位,虚线为数值解,实线为理论解(下同)

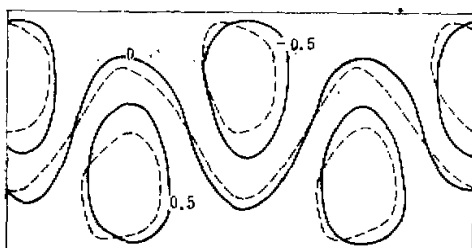


图2 Arakawa 格式 a) 当 $\Delta T = 0.25$ 时积分至 750 时间单位

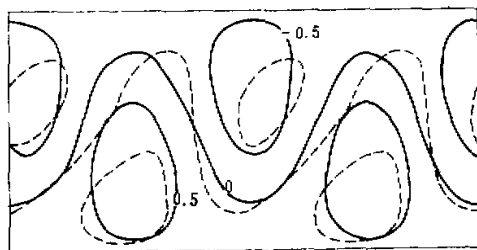


图3 Arakawa 格式 c) $\Delta T = 0.2$ 时,积分至 750 个时间单位

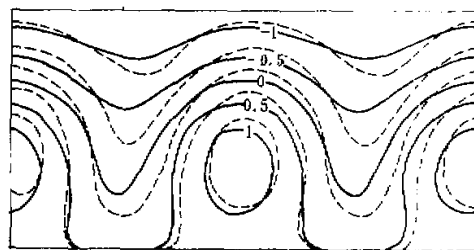


图4 S. A. I 格式 $\Delta T = 0.5$ 时积分至 750 时间单位(混合模态)

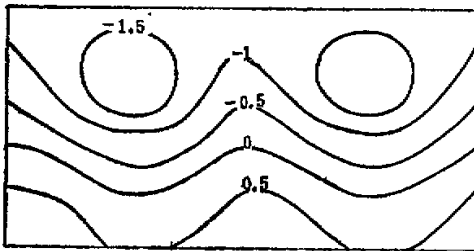


图5 Arakawa 格式 a) $\Delta T = 0.1$ 时积分至 750 时间单位(混合模态)

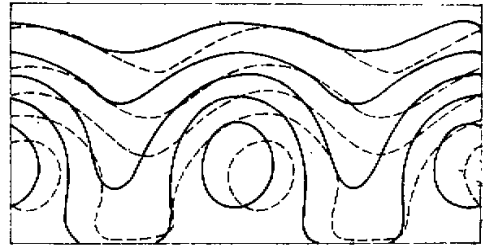


图6 Arakawa 格式 c) $\Delta T = 0.2$ 时积分至 750 时间单位(混合模态)

$$\bar{\varphi} = \varphi_A F_A + \varphi_k F_k + \varphi_L F_L + \varphi_c F_c + \varphi_M F_M + \varphi_N F_N$$

其中 $F_c = \sqrt{2} \cos 2y$, $F_M = 2 \cos 2x \sin 2y$, $F_N = 2 \sin 2x \sin 2y$,
 $\varphi_A = 0.06$, $\varphi_k = 0.0332$, $\varphi_L = -0.00569$,
 $\varphi_c = -0.0222$, $\varphi_M = 0.00825$, $\varphi_N = -0.00374$.

在 S. A. I 格式中 $\Delta T = 0.5$, 计算结果如图 4. 在 Arakawa 格式中对 a) 取 $\Delta T = 0.1$, 结果如图 5; 对 c) 取 $\Delta T = 0.2$, 结果如图 6.

四、比较与讨论

两种计算格式的比较以 S. A. I 格式和 Arakawa 格式 (a) 为例进行.

从以上结果可以看到, 两种格式都是计算稳定的. Arakawa 格式条件稳定, S. A. I 格式绝对稳定. 对“第一模态”的计算结果说明, 两种格式都有较好的精度, 都有一定的相位差, 但比较起来, S. A. I 格式的精度更好一点. 若用 φ_r 表示理论解按绝对值取最大, φ_c 表示数值解按绝对值取最大, 则可定义高度场的相对升降率:

$$c = \frac{\varphi_r - \varphi_c}{\varphi_r} * 100\%$$

Arakawa 格式 (a) 高度场的相对升降率是: 当 $\Delta T = 0.25$ 时, $c = 17.5\%$, 当 $\Delta T = 0.1$ 时, $c = 17.3\%$, 当 $\Delta T = 0.05$ 时 $c = 17.34\%$. S. A. I 格式的高度场相对升降率是: 当 $\Delta T = 1$ 时, $c = 5.6\%$, 当 $\Delta T = 0.5$ 时, $c = 2\%$, 当 $\Delta T = 0.25$ 时, $c = 0.81\%$, 当 $\Delta T = 0.1$ 时, $c = 0.13\%$. 图 1 中 ± 0.5 等值线所围成的面积和理论解差不多, 而图 2 中 ± 0.5 等值线所围成的面积则比理论解要小. 同时, 我们用 Arakawa 格式所得到的结果与文献 [1] 中的结果是不同的.

对“混合模态”的数值解说明, S. A. I 格式仍有较高的精度. 而 Arakawa 格式 (a) 的数值解没有获得. 这个结论和文献 [1] 是一样的. 但是, 用 Arakawa 格式 (c) 却获得了比较精确的数值解.

就时间差分而言, S. A. I 采用 crank-Nicholson 方法截断误差具有 $O(\Delta T^3)$ 的精度, 而 Arakawa 格式 (a) 的截断误差具有 $O(\Delta T^2)$ 的精度. 因此在“第一模态”的计算过程中, Arakawa 格式 (a) 当 $\Delta T = 0.25, 0.1, 0.05$ 时, 对结果的改进不大, 而 S. A. I 格式

是随着步长的缩小数值解的精度在不断地提高。在 Arakawa 格式中,若时间采用完全的中央差,亦即采用格式 (b),则可获得高阶的截断误差,可惜的是,它是一个绝对不稳定的计算格式。若把 Arakawa 格式中的 a 和 b 格式结合,即对非线性部分采用时间中央差,对线性部分采用时间向前差。这就是计算格式 c 。实际计算表明,格式 c 是一个计算稳定格式。图 3、图 6 展示了所计算的结果。从图中可以看出,图形有明显的倾斜,这大概是线性部分时间步长较大所引起的。

因为 (4) 式对应着线性过程, (5)、(6) 式对应着非线性过程^[5,6], 又因 (7) 是解析式, 因此, S. A. I 格式不但可以减少运算量,而且不会有由于差分求解时所产生的寄生波,从而可提高解的精度和光滑性。虽然 (8)、(9) 是一个隐式格式,但它是一个恒稳格式,时间步长可适当地加大,例如,在求“第一模态”的数值解时,当 $\Delta T = 1$ 时,数值结果也还有相当高的精度。因此,就总的计算量而言, S. A. I 格式要比 Arakawa 格式节省计算量。

本文得到张学洪等同志的帮助,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Charney J. G, Multiple Flow Equilibria in the Atmosphere and Blocking. *J. A. S.*, Vol. 36, No. 7, p. 1205—1216, 1979.
- [2] Arakawa, A., Computational Design for long-Term Numerical Integrations of the Equations of Atmosphere Motion. *J. computational phys.*, p. 119—143, 1966.
- [3] Marchuk G. I., Numerical Methods in Weather prediction Academic press New York, 1974.
- [4] 曾庆存, 季仲贞, 关于非线性计算稳定性的若干问题, 力学学报, No. 3, p. 209—216, 1981.
- [5] 曾庆存, 袁重光, 求解天气预报方程组的分解算法, 科学通报, Vol. 25, No. 18, p. 842—845, 1980.
- [6] 曾庆存, 大气中的适应过程和发展过程(一), 气象学报, Vol. 33, No. 2, p. 163—173, 1963.

THE COMPARISON BETWEEN THE NUMERICAL SCHEMES ON THE MULTI-EQUILIBRIUM STATES IN THE ATMOSPHERE

Yan Bangliang Liang Youlin

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

Two schemes, semi-analytic nonlinear iterative (SAI) and Arakawa's ones are respectively used to numerically solve the problem of multi-equilibrium states in the atmosphere. Their numerical solutions are compared with Charney's theoretical solution. Results computed from two modes in Charney's model show that there exist better accuracy and phase difference in the numerical solutions of both schemes.