

# 大气环流多平衡态的突变

缪 锦 海 张 展

(北京气象学院) (北京大学地球物理系)

## 提 要

本文研究了低阶正压模式的多平衡态和平衡态的突变。在地形强迫下，随着外热力强迫参数的改变，在非线性的低阶正压系统中可以发生平衡态特征或稳定性质的变化，进而引起高低指数平衡态之间的突变。

## 一、引 言

高指数环流与低指数环流的交替出现，是大气环流变化的主要形式。大气环流的变化不仅与大气内部的相互作用有关，而且与地形强迫作用、非绝热加热作用有关。这样复杂的非线性系统的数学处理是非常困难的。近来，Charney 等<sup>[1]</sup>讨论了具有强迫和耗散作用的非线性正压低阶模式的多平衡态，其典型的稳定平衡态是高指数和低指数环流。在这篇具有开创性的文章之后，有了不少关于多平衡态的文章<sup>[2-6]</sup>。研究大气环流的变化，不仅要研究高低指数平衡态的存在，而且更需要研究高低指数环流的相互调整，即高低指数平衡态的相互转换。显然，当模式和参数条件不变时，稳定平衡态本身不会发生向另一稳定平衡态转换。当外参数改变时，平衡态的主要特征及其稳定性可能发生明显的变化，从而出现高低指数环流的调整。在实际大气中，常常表现出环流的持续时间尺度比环流变化的时间尺度为长。这样，我们可以用平衡态的突变理论来研究高低指数的环流调整。本文就是在 Charney 等<sup>[1]</sup>的平衡态文章的基础上，不仅考虑南北不对称加热，而且还考虑东西不对称加热的影响，进一步讨论平衡态的突变，从而得到大气环流高低指数相互调整的机制。

## 二、模 式

我们采用 Charney 等<sup>[1]</sup>的具有地形、热力强迫和耗散作用的正压模式。无量纲的正压位涡方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{\lambda^2} \right) + J(\psi, \nabla^2 \psi + h) + \bar{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \nabla^2 (\psi - \psi^*) = 0 \quad (2.1)$$

式中  $\psi$  为无量纲流函数， $h$  为地形高度， $\lambda = gH/(f_0^2 L^2)$ ， $\bar{\beta} = \frac{L}{a} \operatorname{ctg} \varphi_0$ ， $\varphi_0 = 45^\circ$ ， $K =$

1983年11月4日收到，1984年5月14日收到修改稿。

$D_E/(2H)$ ,  $D_E$  为 Ekman 层厚度,  $H$  为自由面的平均高度,  $\phi^*$  为热力强迫所引起的流函数。取  $\beta$  平面。边界条件为: 在  $y = 0, \pi$  处, 没有垂直于边界的流动。 $x$  方向以  $2\pi$  为周期的周期函数。

选取 Laplace 算子在上述边条件下的特征函数系为基函数, 即

$$1, \sqrt{2} \cos ny, 2 \cos nx \sin ny, 2 \sin nx \sin ny, \dots, n, m = 1, 2, \dots$$

为了简单起见, 仅考虑基本气流与一个超长波相互作用, 选取以下三个基函数:

$$F_1 = F_A = \sqrt{2} \cos y \quad F_2 = F_K = 2 \cos nx \sin y \quad F_3 = F_L = 2 \sin nx \sin y \quad (2.2)$$

则

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_A F_A + \phi_K F_K + \phi_L F_L \\ \phi^* &= \phi_A^* F_A + \phi_K^* F_K + \phi_L^* F_L \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2.3)$$

而且只考虑  $n$  波的大尺度地形, 取  $h = \frac{h_0}{2H} F_K$ 。这样, (2.1) 式的低阶谱方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_A &= -K_{n1}(\phi_A - \phi_A^*) + h_{n1}\phi_L \\ \dot{\phi}_K &= -(\alpha_{n1}\phi_A - \beta_{n1})\phi_L - K_{n1}(\phi_K - \phi_K^*) \\ \dot{\phi}_L &= (\alpha_{n1}\phi_A - \beta_{n1})\phi_K - K_{n1}(\phi_L - \phi_L^*) - h_{n1}\phi_A \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2.4)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{n1} &= \frac{1}{1 + \lambda^{-2}} K \quad K_{n1} = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 1 + \lambda^{-2}} K \\ h_{n1} &= \frac{1}{1 + \lambda^{-2}} \frac{h_0}{2H} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} n \quad h_{n1} = \frac{1}{n^2 + 1 + \lambda^{-2}} \frac{h_0}{2H} \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} n \\ \beta_{n1} &= \frac{n}{n^2 + 1 + \lambda^{-2}} \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} n \quad \alpha_{n1} = n\beta_{n1} \end{aligned}$$

为简单起见, 取  $\lambda^{-2} = 0$ , 则  $K_{n1} = K_{n1} = K$ 。

### 三、地形、热力强迫作用下的平衡态及其稳定性

当运动达到平衡态, 也就是控制方程组(2.4)取定常解时,  $\frac{d\bar{\phi}_A}{dt} = \frac{d\bar{\phi}_K}{dt} = \frac{d\bar{\phi}_L}{dt} = 0$ ,

平衡态  $(\bar{\phi}_A, \bar{\phi}_K, \bar{\phi}_L)$  满足的方程为:

$$\begin{aligned} -K(\bar{\phi}_A - \phi_A^*) + h_{n1}\bar{\phi}_L &= 0 \\ -(\alpha_{n1}\bar{\phi}_A - \beta_{n1})\bar{\phi}_L - K(\bar{\phi}_K - \phi_K^*) &= 0 \\ (\alpha_{n1}\bar{\phi}_A - \beta_{n1})\bar{\phi}_K - K(\bar{\phi}_L - \phi_L^*) - h_{n1}\bar{\phi}_A &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.1)$$

(3.1) 式消去  $\bar{\phi}_K$ 、 $\bar{\phi}_L$ , 可得  $\bar{\phi}_A$  的方程:

$$\begin{aligned} (\bar{\phi}_A - \phi_A^*)[(\alpha_{n1}\bar{\phi}_A - \beta_{n1})^2 + K^2] + h_{n1}h_{n1}\bar{\phi}_A \\ - h_{n1}(\alpha_{n1}\bar{\phi}_A - \beta_{n1})\phi_K^* - Kh_{n1}\phi_L^* = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

或

$$a_1\bar{\phi}_A^3 + a_2\bar{\phi}_A^2 + a_3\bar{\phi}_A + a_4 = 0 \quad (3.2)'$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{n1}^2 \\ a_2 &= -(2\beta_{n1}\alpha_{n1} + \alpha_{n1}^2\phi_A^*) \\ a_3 &= \beta_{n1}^2 + K^2 + 2\beta_{n1}\alpha_{n1}\phi_A^* + h_{01}(h_{n1} - \alpha_{n1}) \\ a_4 &= -(\beta_{n1}^2 + K^2)\phi_A^* + h_{01}\beta_{n1}\phi_K^* - Kh_{01}\phi_L^* \end{aligned}$$

三次方程(3.2)'的判别式为：

$$\Delta = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a_4}{a_1} - \frac{a_3 a_2}{3a_1^2} + \frac{2a_3^3}{27a_1^3} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{3a_1^2} \right) \right]^3 \quad (3.3)$$

当  $\Delta > 0$  时，只有一个实根， $\Delta < 0$  时有三个实根。所以，在不同热力强迫参数条件下，可以只出现一个平衡态，也可以出现三个平衡态。

下面讨论平衡态的稳定性问题。以所求得的平衡态为基态，迭加上小扰动，即令

$$\phi_A = \bar{\phi}_A + \phi'_A$$

$\phi_K, \phi_L$  有类似的表达式，代入(2.4)式，可得线性化方程组：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}'_A &= -K\phi'_A + h_{01}\phi'_L \\ \dot{\phi}'_K &= -b_{n1}\phi'_L - \alpha_{n1}\bar{\phi}_L\phi'_A - K\phi'_K \\ \dot{\phi}'_L &= b_{n1}\phi'_K + \alpha_{n1}\bar{\phi}_K\phi'_A - K\phi'_L - h_{n1}\phi'_A \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中  $b_{n1} = \alpha_{n1}\bar{\phi}_A - \beta_{n1}$ 。令扰动解的形式为：

$$(\phi'_A, \phi'_K, \phi'_L) = (\psi_A, \psi_K, \psi_L)e^{\sigma t}$$

代入(3.4)式，要得到非零解，必须系数行列式为零，可得：

$$(\sigma + K)^3 + [b_{n1}^2 - h_{01}(\alpha_{n1}\bar{\phi}_K - h_{n1})](\sigma + K) + \alpha_{n1}\bar{\phi}_L b_{n1} h_{01} = 0$$

稳定度判据是：特征值实部最大值  $\max\sigma_{real} > 0$  时，平衡态不稳定； $\max\sigma_{real} < 0$  时，平

表 1  $\phi_L^* = 0.2, \phi_K^* = -0.2$  的平衡态及其稳定性

$\phi_A^*$	$\bar{\phi}_A$	$\bar{\phi}_K$	$\bar{\phi}_L$	$\max\sigma_{real}$
0.1	0.05582	-0.19469	-0.00736	-0.00974
	-	-	-	-
	-	-	-	-
0.2	0.05660	-0.17921	-0.02389	-0.00888
	-	-	-	-
	-	-	-	-
0.3	0.27105	0.02870	-0.00482	-0.00868
	0.05778	-0.15569	-0.04035	-0.00728
	0.07530	-0.03295	-0.03744	0.01667
0.4	0.38059	0.00402	-0.00323	-0.00941
	-	-	-	-
	-	-	-	-
0.5	0.48524	0.00457	-0.00246	-0.00966
	-	-	-	-
	-	-	-	-

表 2  $\phi_A^* = 0.2, \phi_L^* = 0$  的平衡态及其稳定性

$\phi_K^*$	$\bar{\phi}_A$	$\bar{\phi}_K$	$\bar{\phi}_L$	$\max \sigma_{\text{Real}}$
-0.2	0.05113	-0.20444	-0.02480	-0.00989
	—	—	—	—
	—	—	—	—
-0.1	0.17155	0.00877	-0.00474	-0.00761
	0.05036	-0.10818	-0.02493	-0.00964
	0.08222	-0.01365	-0.01963	0.02510
0.0	0.19819	0.08470	-0.00030	-0.00988
	0.04642	-0.02777	-0.02559	-0.00610
	0.05953	0.03353	-0.02340	0.04988
0.1	0.27134	0.00831	0.00289	-0.00947
	0.03279	-0.00311	-0.02786	0.00668
	0.05400	0.10903	-0.02430	0.09923
0.2	0.23311	0.00821	0.00552	-0.00908
	0.01796	0.00134	-0.03033	0.00843
	0.05306	0.20469	-0.02443	0.14135

稳态稳定。

表 1, 表 2 给出了一些计算实例。取  $K = 10^{-2}$ ,  $L/a = 1/4$ ,  $n = 2$ ,  $h_0/H = 0.05$ 。

从表 1 和表 2 以及其它计算结果可以看到, 在不同的加热强迫参数下, 模式中的各平衡态及其稳定性有着很大的差异。在所取的模式中, 平衡态可分为单平衡态和多平衡态二类:

**1. 单平衡态** 只有一个稳定的平衡态, 但随着  $\phi_A^*$  取不同值, 环流特征可以有显著的差异。例如, 在表 1 中,  $\phi_A^* = 0.2$  时,  $\phi_A = 0.0566$ , 纬向环流弱,  $\phi_K = -0.1791$ , 二波扰动强, 是典型的低指数环流。而在  $\phi_A^* = 0.4$  时,  $\phi_A = 0.38059$ ,  $\phi_K = 0.00402$ , 纬向环流强, 二波扰动弱, 是典型的高指数环流(图略)。可用  $\phi_A$  数值的大小表示环流指数的高低。当  $\phi_A$  数值为负时, 可称为负指数, 即为东风环流。

**2. 多平衡态** 在所取模式中, 有三个平衡态。可分为(i)一个稳定平衡态和两个不稳定平衡态( $1S2U$ ), 在我们的计算中, 这个稳定平衡态是高指数环流。(ii) 两个稳定平衡态和一个不稳定平衡态( $2S1U$ ), 在两个稳定平衡态中一个高指数, 另一个是低指数; 而不稳定平衡态是中指数。另外有一特殊情况, 即两个稳定平衡态中, 有一高指数和一负指数平衡态。

#### 四、平衡态的突变——高低指数环流的调整

在存在稳定平衡态的多平衡态系统中, 随时间增加, 整个系统将趋于稳定平衡态。当外强迫参数缓慢变化时, 可以把稳定平衡态的改变近似看作系统状态的变化。对于非线性耗散系统, 当外强迫参数出现微小的改变时, 系统从一稳定平衡态不连续跃变到另一稳

定平衡态，我们称为平衡态的突变。也可近似地作为系统状态的突变。下面主要讨论在固定二波地形的强迫作用下，热力强迫参数改变对平衡态突变、环流调整的影响。

### 1. 两类不同特征的突变

从表 1 所列的计算结果可以看到，在南北热力强迫参数  $\phi_A^*$  从 0.1 变到 0.5 的过程中，开始只有一个平衡态，然后增加到三个平衡态，最后又变为一个平衡态。图 1 给出了这个例子的平衡态集合图。可以看到，在  $\phi_A^*$  从 0.1 到 0.24 范围内，只有一个低指数的稳定平衡态。而在  $\phi_A^*$  为 0.25 时，出现了三个平衡态。根据突变论的迟滞 (delay) 规则<sup>[2]</sup>，不会越过不稳定点到另一稳定平衡态，因而，继续保持低指数平衡态。当  $\phi_A^*$  稍大于 0.36 时，低指数平衡态消失，系统状态将向唯一的高指数稳定平衡态趋近。这样，就出现了平衡态的突变，环流发生迅速的调整。值得注意的是，当  $\phi_A^*$  反过来由 0.45 变到 0.36 时，并不发生突变，而是在  $\phi_A^* = 0.25$  附近发生由高指数向低指数的突变。我们把由平衡态个数发生变化引起原来平衡态消失而趋向另一稳定平衡态的突变称为第一类突变。从图 1 可以看到，当热力强迫参数  $\phi_A^*$  不断增加而流场  $\phi_L$  一直保持低值，由于大气的非线性运动使二者不能相互适应，而当  $\phi_A^*$  进一步增加，两者的不适应达到一定程度之后，大气自身的非线性运动又引起平衡态个数发生变化，进而导致了突变现象的发生。

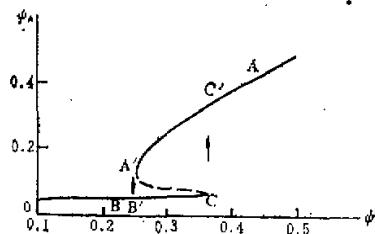


图 1  $\phi_L^* = 0.2, \phi_L = -0.2$  条件下的平衡态集合图(第一类突变)  
实线: 稳定平衡态, 虚线: 不稳定平衡态

表 2 给出了另一类突变的情况，是由平衡态的稳定性发生变化而引起的突变。图 2 给出了这个例子的平衡态集合图。可以看到，在  $\phi_K^*$  由 -0.15 到 0.05 范围内，存在两个稳定平衡态和一个不稳定平衡态。如环流处于低指数稳定平衡态，将继续保持低指数。当

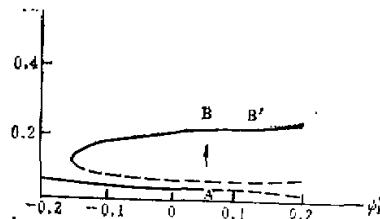


图 2  $\phi_A^* = 0.2, \phi_L^* = 0$  条件下的平衡态集合图(第二类突变)  
实线: 稳定平衡态 虚线: 不稳定平衡态

$\phi_k^*$  超过 0.05 时, 原来稳定的低指数平衡态变为不稳定的平衡态。在这种外参数条件下, 存在一个稳定的高指数平衡态和两个不稳定平衡态。因而, 环流迅速向稳定的高指数平衡态调整。同样, 值得注意, 当  $\phi_k^*$  由 0.1 变到 0.0 时, 不发生突变。这是因为高指数平衡态不发生稳定性质的变化。我们把平衡态稳定性发生变化而引起的平衡态突变称为第二类突变。当东西热力差异  $\phi_k^*$  为负值, 即大陆上为一冷源, 海洋上为一热源时, 加热场加强地形强迫所产生的共振强迫作用, 有利于维持低指数环流。而当东西热力差异  $\phi_k^*$  为正值时, 破坏地形强迫共振作用, 因而出现稳定性质的变化, 从而发生环流的突变。这种不稳定不是一般的基本气流减弱、扰动增长的正压不稳定, 而是在地形和热力强迫共同作用下的基本气流增长、扰动减弱的正压不稳定。

## 2. 不同热力差异对突变的影响

我们详细计算了不同热力参数条件下的平衡态及其稳定性。有关的其他参数与以上两个例子相同。图 3 给出了当  $\phi_L^* = 0$  时, 在  $\phi_k^* - \phi_A^*$  平面上的各类平衡态分布图。图中的实线是一个平衡态与三个平衡态的分界线, 虚线是两个稳定平衡态、一个不稳定平衡态 ( $2S1U$ ) 与一个稳定平衡态、两个不稳定平衡态 ( $1S2U$ ) 的分界线。 $(H)$  表示高指数稳定平衡态,  $(D)$  表示低指数稳定平衡态,  $(N)$  表示负指数稳定平衡态。从图 3 可以较全面地看到这两类突变发生的条件。在  $\phi_k^* \leq 0$ , 同时  $\phi_A^*$  比较小的条件下, 利于维持低指数环流, 形成和维持阻塞高压。也就是说南北热力差异小于一定范围, 同时东西热力差异  $\phi_k^* \leq 0$  时, 加热场加强了地形强迫的共振作用, 更有利于带有阻塞高压的低指数环流的维持。图 3 中的实线是倾斜的, 说明  $\phi_k^*$  的负值愈大, 对低指数阻塞形势的维持作用愈明显。当南北热力差异  $\phi_k^*$  大到一定程度就会使阻塞形势崩溃, 变为与  $\phi_k^*$  相适应的高指数环流。当  $\phi_k^*$  为稍大的正值, 即大陆为一热源、海洋为一冷源时, 加热场会起破坏地形强迫共振的作用, 使流场转变为高指数环流, 阻塞高压崩溃。可见不同的加热与地形的相互作用可以影响阻塞形势维持或破坏。

图 4 是  $\phi_k^* = 0$ ,  $\phi_L^* - \phi_A^*$  平面上的平衡态分布图。 $\phi_L^*$  与  $\phi_A^*$  在  $x$  方向位相差为

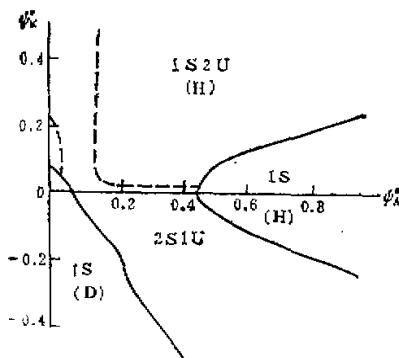


图 3  $\phi_k^* = 0$ ,  $\phi_L^* - \phi_A^*$  平面上的平衡态分布图

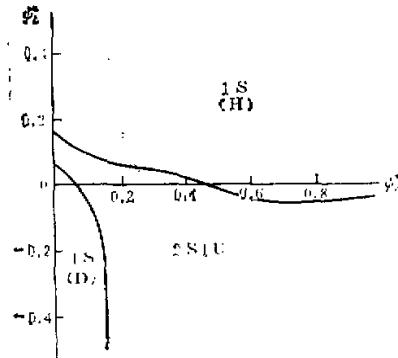


图 4  $\phi_k^* = 0$ ,  $\phi_L^* - \phi_A^*$  平面上的平衡态分布图

$\pi/2$ 。从图 4 可以看到，只有第一类突变，而没有第二类突变。 $\phi_A^*$  愈大，愈有利于高指数环流的维持； $\phi_L^*$  正值愈大也愈有利于高指数环流的维持。

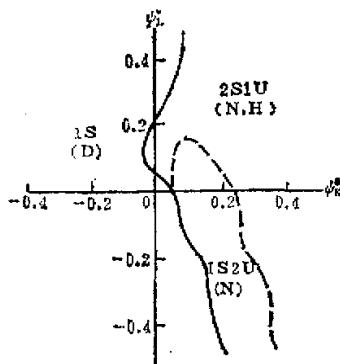


图 5  $\phi_A^* = 0$ ,  $\phi_L^*-\phi_K^*$  平面上的平衡态分布图

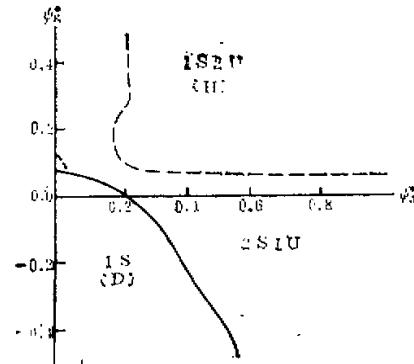


图 6  $\phi_L^* = 0$ ,  $\phi_K^*-\phi_A^*$  平面上的平衡态分布图  
( $h_0/H = 0.2$ )

图 5 是在  $\phi_A^* = 0$  条件下， $\phi_L^*-\phi_K^*$  平面上的平衡态分布图。可以看到，在  $\phi_K^* < 0$  的区域基本上为低指数平衡态区；在  $\phi_K^* > 0$  的区域主要为负指数区。当  $\phi_K^*$  由负变正时，越过临界线后将成为负指数，不发生突变。这说明没有南北热力差异，不发生环流调整。另外，图 5 还说明  $\phi_K^*$  对低指数平衡态的影响比  $\phi_L^*$  的影响要大得多。

### 3. 地形高度对平衡态突变的影响

如果不考虑地形强迫作用，即在(3.2)式中令  $h_0 = 0$ ，即  $h_m = h_{m1} = 0$ ，则(3.2)式成为

$$(\bar{\phi}_A - \phi_A^*)[(\alpha_{m1}\bar{\phi}_A - \beta_{m1})^2 + K^2] = 0 \quad (4.1)$$

因为

$$(\alpha_{m1}\bar{\phi}_A - \beta_{m1})^2 + K^2 > 0,$$

所以

$$\bar{\phi}_A = \phi_A^* \quad (4.2)$$

(4.2)式说明，在我们所取的模式中，不考虑地形强迫作用时，环流形势的调整不会随热力参数的改变发生不连续的突变。

在前几节的讨论中，我们取地形高度  $h_0/H = 0.05$ 。如果我们加高地形，取  $h_0/H = 0.2$ ，在  $\phi_L^* = 0$ ,  $\phi_K^*-\phi_A^*$  平面上的平衡态分布如图 6。比较图 6 与图 3，可以看到，地形加高以后，第一类突变不存在了，而且  $\Delta = 0$  的分界线即图中的实线向  $\phi_A^*$  增加的方向移动。这些说明，由于地形加高，热力强迫对平衡态突变的影响减弱了，突出了地形的强迫作用。但是，当  $\phi_A^*$  与  $\phi_K^*$  同时改变时，仍然可以发生高低指数环流的突变调整，其基本性质与  $h_0/H = 0.05$  时相似。

## 五、结语

通过以上分析,可以得到以下的初步结论:

(1) 模式中存在单平衡态和多平衡态,其典型的流型是高指数稳定平衡态和低指数稳定平衡态。

(2) 在固定地形强迫作用的情况下,当南北热力参数和东西热力参数改变时,环流形势有可能出现突变调整。有两类突变:第一类突变是当平衡态个数发生变化引起原来平衡态消失而趋向另一稳定平衡态的突变;第二类突变是由平衡态的稳定性质发生变化而引起平衡态突变。

(3) 南北热力差异  $\beta_x^*$  的加强有利于高指数环流的维持、阻塞形势的破坏;东西热力差异  $\beta_y^*$  值的增加,即大陆冷却、海洋加热,有利于低指数和阻塞形势的维持。

总之,在地形强迫下,随着经向和纬向热力参数的改变,非线性低阶正压系统可以发生平衡态特征或稳定性质的变化,进而引起高低指数平衡态之间的突变。

在实际大气中,流场对加热场是有反馈作用的。因此,当南北热力差异增加,使流场由低指数向高指数调整;流场对加热场的反馈作用,将使南北热力差异减少,会引起流场由高指数向低指数调整。这正与缪锦海、刘翔鹤<sup>1)</sup>从观测事实诊断研究所得到的指数循环的物理机制相一致。由于我们的模式没有考虑流场对加热场的反馈影响,所以不能全面地认识指数循环。

致谢:感谢仇永炎教授和陈秋士、廖可人副教授的热情支持和帮助。

## 参 考 文 献

- [1] Charney, J. G. and Devore, J. G., 1979, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1205—1216.
- [2] Charney, J. G. and Straus, D. M., 1980, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1157—1176.
- [3] 朱正心、朱抱真, 1982, 中国科学B辑, 第4期, 361—371.
- [4] Källén, E., 1981, *J. Atmos. Sci.*, **38**, 2105—2163.
- [5] Källén, E., 1982, *Tellus*, **34**, 255—265.
- [6] Egger, J., 1981, *J. Atmos. Sci.*, **38**, 2606—2618.
- [7] Zeeman, E. C., 1976, *Sci. Amer.*, **234**, 65—83.

1) 缪锦海、刘翔鹤,纬向平均动能和平均有效位能振动的机制,1982年寒潮中期预报会议。

## THE CATASTROPHE OF MULTIPLE EQUILIBRIA OF GENERAL CIRCULATION<sup>1</sup>

Miao Jinhai

(Beijing Institute of Meteorology)

Zhang Zhan

(Department of Geophysics, Peking University)

### Abstract

The multiple equilibria and their catastrophe of the low-order barotropic model are studied. With the change of the external thermal forcing parameters, the variations in the equilibrium character or the stability properties may occur in the nonlinear low-order barotropic system under the action of topographical forcing, resulting in the catastrophe between high-index and low-index.