

# 湍流大气中光系统接收功率的起伏概率

王俊波 吴 健 冯志超

(成都电讯工程学院)

## 提 要

文章选用简单而合理的模型讨论了湍流大气中直接探测光系统接收功率起伏的概率特性。理论与实验结果的比较表明，两者较好地符合。其结论可用以指导大气中光系统的设计。

## 一、引言

随着激光应用的不断发展，讨论激光束在湍流大气中的传播特性显得愈来愈重要。以前许多学者曾分别讨论了光强起伏特性或其它量的起伏特性，而实际系统反映的起伏特性总是湍流大气光传播效应，诸如光强起伏、光束漂移、到达角起伏等的综合效果。因而在设计系统时，有必要考虑联合效应。

就直接探测系统而言，接收系统中光功率起伏的主要影响来自光强起伏和光束漂移。已有人讨论过系统在这两种效应影响下的概率分布<sup>[1,2]</sup>。但文献[1]没有讨论系统的恒定误差\*；文献[2]没有讨论概率密度函数，在近似处理上也比较复杂，且计算参数的选择比较简单，得到的结果不便与实验进行比较。本文考虑了三种影响，即光强起伏、光束漂移以及系统的恒定误差，从推求接收功率起伏的概率密度着手，得到概率密度函数，概率分布函数及方差。并将结果用准确性很好的近似式来表示。与实验结果进行比较表明，理论与实验较好地符合。

## 二、系统模型

设系统发射一稳定基模高斯光束，水平传播  $L$  米后落在接收平面上。光束中心与接收孔中心有偏离  $\rho_0$  时（如图 1 所示），接收平面上的光强分布为：

$$I(L, x, y) = \frac{I_0 W_0^2}{W^2} \exp \left\{ -\frac{2[(x - \rho_0)^2 + y^2]}{W^2} \right\} \quad (1)$$

式中， $I_0$  为发射端光束中心初始光强； $W_0$  为发射端光束初始半径； $W$  为接收面上光束半径。由于系统的圆对称性，(1)式中  $\rho_0$  的方向选取不影响结论的一般性。

按照(1)式，对任意孔径的接收系统，接收光功率应为：

1984年10月24日收到，1984年12月30日收到修改稿。

\* 这种误差可以是系统的瞄准误差，或由大气温度场周日变化的温度梯度引起的光束偏离。

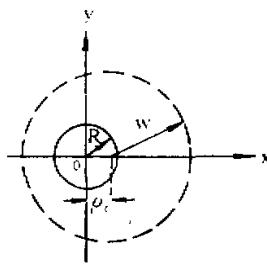


图1 接收面坐标示意图

$$P = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(L, x, y) \phi(x, y) dx dy \quad (2)$$

其中  $\phi(x, y)$  为系统的接收孔径函数。对半径为  $R$  的圆接收孔径,有:

$$\phi(x, y) = \phi_c(\rho, \theta) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

将(1),(3)两式代入(2)式可得:

$$P_c = \frac{2\pi W_0^2}{W^2} I_0 \int_0^R \exp \left[ -2 \frac{\rho^2 + \rho_0^2}{W^2} \right] I_0 \left( \frac{4\rho\rho_0}{W^2} \right) \rho d\rho \quad (4)$$

式中,  $I_0(x)$  为零阶虚宗量 Bessel 函数。继续利用(4)式进行计算是十分复杂的。为了简化计算,我们用 Gauss 权重孔径函数

$$\phi_c(\rho, \theta) = \exp \left[ -2\rho^2/R^2 \right] \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (5)$$

代替实际的圆孔径函数,得接收功率为:

$$P_G = \frac{2\pi W_0^2}{W^2} I_0 \exp \left[ \frac{-2\rho_0^2}{W^2} \right] \int_0^\infty \exp \left[ -2\rho^2 \left( \frac{1}{W^2} + \frac{1}{R^4} \right) \right] I_0 \left( \frac{4\rho\rho_0}{W^2} \right) \rho d\rho \quad (6)$$

将(6)式积分得:

$$P_G = \frac{\pi W_0^2 I_0 R^2}{2(R^2 + W^2)} \exp \left[ -\rho_0^2 / (R^2 + W^2) \right] \quad (7)$$

利用(7)式继续进行计算显然比(4)式更方便。这种替换的误差为:

$$\Delta = |P_c - P_G| / P_c \quad (8)$$

分析表明,误差  $\Delta$  仅依赖于相对孔径因子  $R/W$  和相对偏离因子  $\rho_0/W$ 。当  $R/W < 0.3$ ,  $\rho_0/W < 0.2$  时,  $\Delta < 3\%$ 。若不考虑光强起伏在接收面上的统计相关性,则可以不考虑这种替换对整个分析的影响。

光强起伏和光束漂移的随机影响,使系统的接收功率也随机变化。许多理论分析和实验表明,在弱起伏条件下 ( $\sigma_x^2 = 0.307 c_w^2 k^{7/6} L^{11/6} < 0.2 \sim 0.5$ ,  $\sigma_x^2$  表示平面波对数振幅的方差,  $k = 2\pi/\lambda$ ), 光强起伏服从对数正态概率分布<sup>[3]</sup>; 在中等起伏和极强起伏条件

下,也存在对数正态分布<sup>[4]</sup>,因此,当系统的接收孔径不大于光强起伏的空间相关长度时(对平面波,  $r_0 \sim \sqrt{\lambda L}$ ),可以认为系统由光强起伏引起的接收功率起伏  $P_s$  也服从对数正态分布。即有:

$$f_{P_s}(P_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ln P_s}^2 P_s} \exp\left[-\frac{(\ln P_s - \mu)^2}{2\sigma_{\ln P_s}^2}\right] \quad (9)$$

在上述条件下,近似有:

$$\sigma_{\ln P_s}^2 = \sigma_{\ln I}^2 = 4\sigma_{K_B}^2(L, \rho) \quad (10)$$

(10)式中  $\sigma_{K_B}^2(L, \rho)$  为束状波对数振幅方差,由文献[4]给出。

由(9)式可得对应功率起伏的  $K$  阶矩为:

$$\langle P_s^K \rangle = \exp[K\mu + K^2\sigma_{\ln P_s}^2/2] \quad (11-1)^*$$

且有:

$$\begin{aligned} \langle P_s \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \langle I(L, \rho) \rangle \exp[-2\rho^2/R^2] \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi W_b^2 I_0 R^2}{2(R^2 + W_b^2)} \end{aligned} \quad (11-2)$$

$$\mu = \ln \langle P_s \rangle - \frac{\sigma_{\ln P_s}^2}{2} \quad (11-3)$$

在(11-2)式中,  $\langle I(L, \rho) \rangle$  为光强在接收面上的均值分布,由文献[4]给出。 $W_b$  为考虑光束加宽效应后的接收面上光束半径。

光束的漂移服从正态分布,且在垂直于传播方向的平面上,对  $x$  方向和  $y$  方向相互独立,这也已为理论和实验所证实<sup>[4]</sup>。若同时考虑到系统引入的恒定误差  $\rho_0$ ,则光束中心位于接收面上某点的概率密度为:

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \exp\left[-\frac{(x - \rho_0)^2 + y^2}{2\sigma_w^2}\right] \quad -\infty < \frac{x}{y} < +\infty \quad (12)$$

而光束中心位于距原点  $\rho$  的概率密度则为:

$$\begin{aligned} f_\rho(\rho) &= \int_0^{2\pi} f_{x,y}(x, y) d\theta \\ &= \frac{\rho}{\sigma_w^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_0^2}{2\sigma_w^2}\right] I_0\left(\frac{\rho\rho_0}{\sigma_w^2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\sigma_w^2$  为漂移的方差,由文献[6]给出。

由(7)式可知,接收功率是光束中心位置  $\rho$  的单值函数。因此由漂移引起的接收功率起伏  $P_w$  的概率密度应为:

$$\begin{aligned} f_{P_w}(P_w) &= f_\rho[\rho(P_w)] \left| \frac{\partial \rho}{\partial P_w} \right| \\ \rho &= g(P_w) \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $g(P_w)$  为由(7)求得的反函数。

$$\text{引入量: } m_w \triangleq P_w / P_0 \quad 0 \leq m_w \leq 1 \quad (15)$$

\* 符号  $\langle \rangle$  表示集平均。

称为由漂移引起的接收功率调制度, (其中  $P_0$  为自由空间传播时系统的接收功率。) 则有:

$$f_{m_W}(m_W) = f_\rho[\rho(m_W)] \left| \frac{\partial \rho}{\partial m_W} \right| \quad (16)$$

$$\rho = g'(m_W)$$

利用(7),(13),(15),(16)等式, 我们可以求得:

$$\begin{aligned} \langle m_W^2 \rangle &= \int_0^1 m_W^2 f_{m_W}(m_W) dm_W \\ &= \frac{R^2 + W^2}{2K\sigma_W^2 + R^2 + W^2} \exp \left[ -\frac{K\rho_0^2}{(2K\sigma_W^2 + R^2 + W^2)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

### 三、系统接收功率起伏的概率密度和概率分布

前面已经指出, 光强起伏和光束漂移对系统接收功率的影响表现为对接收功率的随机调制。从而接收功率可表示为:

$$P = P_0 \cdot m_s \cdot m_W \quad (18)$$

(18)式中,

$$m_s \triangleq P_s / P_0 \quad (19)$$

称为由光强起伏引起的接收功率的调制。

由于造成光强起伏的因素主要是尺度小于光束范围的湍流, 造成光束漂移的因素主要是尺度大于光束范围的湍流; 因此两者可视为相互独立的。从而由(18)式和概率论, 得接收功率起伏的概率密度为:

$$f_P(P) = \int_0^1 \frac{1}{|m_W|} f_{m_W} \left( \frac{P}{m_W} \right) f_{m_W}(m_W) dm_W \quad (20)$$

对(20)式作适当的变量替换, 将对应各式代入后可得:

$$\begin{aligned} f_P(P) &= \frac{\exp[-\rho_0^2/2\sigma_W^2]}{(2\pi\sigma_{\ln P_s}^2)^{1/2}\sigma_W^2 P} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln P - \ln \langle P_s \rangle + \frac{\sigma_{\ln P_s}^2}{2} + \frac{2\rho^2}{(R^2 + W^2)} \right]^2}{2\sigma_{\ln P_s}^2} \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2\sigma_W^2} \right] I_0 \left( \frac{\rho\rho_0}{\sigma_W^2} \right) \rho d\rho \end{aligned} \quad (21)$$

在(21)式中, 令

$$A = \exp[-\rho_0^2/2\sigma_W^2]/(2\pi\sigma_{\ln P_s}^2)^{1/2} \quad (21-1)$$

$$B = -\ln \langle P_s \rangle + \sigma_{\ln P_s}^2/2 \quad (21-2)$$

$$C = 4\sigma_W^2/(R^2 + W^2) \quad (21-3)$$

$$D = \sqrt{2}\rho_0/\sigma_W \quad (21-4)$$

$$\varepsilon = \rho^2/2\sigma_W^2 \quad (21-5)$$

代入原式得:

$$f_P(P) = \frac{A}{P} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\ln P + B + Ct)^2}{2\sigma_{\ln P_s}^2} \right] I_0(D\sqrt{\varepsilon}) e^{-\varepsilon} dt \quad (22)$$

完成(22)式积分的方法之一是将  $I_0(D\sqrt{t})$  展为幂级数,这样得到的结果十分复杂。根据被积函数的特性,我们利用 Laguerre 求积公式可得到很好的准确度<sup>[1]</sup>。即有:

$$f_P(P) = \frac{A}{P} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \exp \left[ -\frac{(\ln P + B + C\xi_k^{(n)})^2}{2\sigma_{\ln P_S}^2} \right] I_0[D\sqrt{\xi_k^{(n)}}] \quad (23)$$

其中,  $\lambda_k^{(n)}$  为  $n$  次内插的第  $k$  个求积系数,  $\xi_k^{(n)}$  为  $n$  阶 Laguerre 多项式的第  $k$  个根<sup>[2]</sup>。

由(22)式对  $P$  积分得接收功率起伏的概率分布函数为:

$$F_P(P \leq P_t) = A \int_0^{P_t} \frac{1}{P} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\ln P + B + Ct)^2}{2\sigma_{\ln P_S}^2} \right] I_0(D\sqrt{t}) e^{-t} dt dP \quad (24)$$

交换积分次序,并注意到:

$$\begin{aligned} & \int_0^{P_t} \frac{1}{P} \exp \left[ -\frac{(\ln P + B + Ct)^2}{2\sigma_{\ln P_S}^2} \right] dP \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi\sigma_{\ln P_S}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln P_t + B + Ct}{\sqrt{2\sigma_{\ln P_S}^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (24-1)$$

$$\int_0^\infty I_0(D\sqrt{t}) e^{-t} dt = \exp \left[ \rho_0^2 / 2\sigma_W^2 \right] \quad (24-2)$$

可得:

$$F_P(P \leq P_t) = \frac{1}{2} + A' \int_0^\infty \operatorname{erf} \left( \frac{\ln P_t + B + Ct}{\sqrt{2\sigma_{\ln P_S}^2}} \right) I_0(D\sqrt{t}) e^{-t} dt \quad (25)$$

其中  $A' = A\sqrt{2\pi\sigma_{\ln P_S}^2}$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  为误差函数。

同样对(25)式利用 Laguerre 求积公式,得到系统接收功率起伏的概率分布函数为:

$$F_P(P \leq P_t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n A' \lambda_k^{(n)} \operatorname{erf} \left[ \frac{\ln P_t + B + C\xi_k^{(n)}}{\sqrt{2\sigma_{\ln P_S}^2}} \right] I_0(D\sqrt{\xi_k^{(n)}}) \quad (26)$$

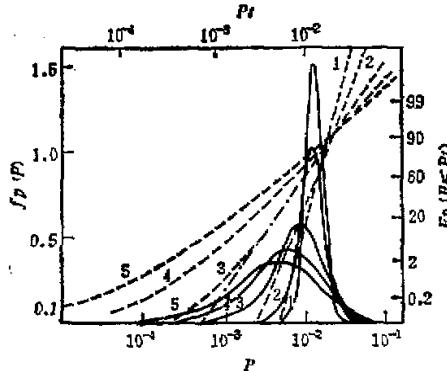


图 2  $f_P(P)$  和  $F_P(P \leq P_t)$  随  $C_n^2$  的变化,计算参数为:  $L = 5\text{km}$ ,

$W_s = 0.028\text{m}$ ,  $R = 0.1\text{m}$ ,  $\rho_s = 0.05\text{m}$   $\lambda = 10.6\mu\text{m}$

- (1)  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{m}^{-2}/\text{s}$  (2)  $C_n^2 = 1 \times 10^{-14}$  (3)  $C_n^2 = 3 \times 10^{-14}$
- (4)  $C_n^2 = 5 \times 10^{-14}$  (5)  $C_n^2 = 7 \times 10^{-14}$

选用不同的参数,以 $n$ 次内插的Laguerre积分分别对(23)式和(26)式进行计算的结果如图(2)一(4)所示。具体的计算参数值请见图中的标注。(计算中以发射功率为1,并略去了 $\sigma_{\ln P_S}^2$ 随接收面坐标的变化关系,取原点上的 $\sigma_{\ln P_S}^2$ 值作近似。)

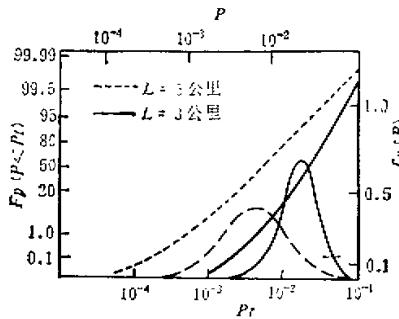


图3  $f_P(P)$  和  $F_P(P \leq P_t)$  随  $L$  的变化,计算参数为:  $C_s^1 = 5 \times 10^{-14} \text{m}^{-1/2}$ ,  
 $R = 0.1 \text{m}$ ,  $W_0 = 0.028 \text{m}$ ,  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ,  $\rho_0 = 0.05 \text{m}$

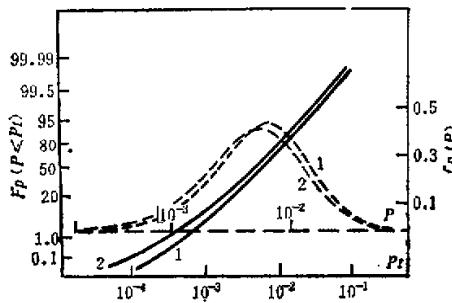


图4  $f_P(P)$  和  $F_P(P \leq P_t)$  随  $\rho_0$  的变化,计算参数:  $L = 5 \text{km}$ ,  $R = 0.1 \text{m}$ ,  
 $W_0 = 0.028 \text{m}$ ,  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ,  $C_s^1 = 5 \times 10^{-14} \text{m}^{-1/2}$ 。  
(1)  $\rho_0 = 0.0 \text{m}$ , (2)  $\rho_0 = 0.25 \text{m}$

#### 四、接收功率起伏的方差

由于光强起伏和光束漂移引起的起伏可以视为相互独立的,因而功率起伏的 $K$ 阶矩应为:

$$\langle P^K \rangle = \langle P_S^K \rangle \langle m_B^K \rangle \quad (27)$$

将(11-1)和(17)式代入(27)式得:

$$\langle P^K \rangle = \frac{R^2 + W^2}{2K\sigma_B^2 + R^2 + W^2} \langle P_S^K \rangle \exp \left[ K(K-1) \frac{\sigma_{\ln P_S}^2}{2} - \frac{K\rho_0^2}{2K\sigma_B^2 + R^2 + W^2} \right] \quad (28)$$

从而,功率起伏的方差为:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &\triangleq \frac{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}{\langle P \rangle^2} \\
 &= \frac{(2\sigma_W^2 + R^2 + W^2)^2}{(4\sigma_W^2 + R^2 + W^2)(R^2 + W^2)} \exp(\sigma_{\ln P_S}^2) \\
 &\times \exp\left[\frac{4\rho_0^2\sigma_W^2}{(2\sigma_W^2 + R^2 + W^2)(4\sigma_W^2 + R^2 + W^2)}\right] - 1
 \end{aligned} \quad (29)$$

## 五、结果的讨论和与实验的比较

从计算结果的图示中可以清楚地看到,由于漂移的影响,接收功率的起伏一般不再为对数正态分布。明显的差异表现在小值段上概率值增大,这与实际情况中各因素起作用的大小一致。对准直式发散光束而言,漂移一般只造成微小的起伏。另外,从图(2)中的虚线(1)和虚线(2)还看出,当湍流极弱时,接收功率的起伏仍然十分接近对数正态分布;图(4)表明,系统恒定误差的大小,对概率分布来说影响并不显著。从而我们认为,决定功率起伏的主要因素是光强的起伏。

值得指出的是,漂移对接收功率起伏分布的影响程度不能用  $\sigma_k^2$  值的大小来衡量。对 5km 光程,当  $C_s^2$  值为  $5 \times 10^{-15} \text{m}^{-2/3}$  时,  $\sigma_k^2$  为 0.0501, 其分布已非常接近于对数正态分布,[见图(2)中虚线(1)];而在 800m 光程上,当  $C_s^2$  为  $5 \times 10^{-14}$  时,  $\sigma_k^2$  仅为 0.01771, 是前者的约三分之一。但后者的分布已明显地偏离对数正态分布。(见图(5)中曲线(1))。

我们于 1984 年 4 月在腾格里沙漠地区作了 800m 光程的  $10.6 \mu\text{m}$   $\text{CO}_2$  激光束大气传播实验。整个实验系统的光学部份是沿用成都电讯工程学院三路  $\text{CO}_2$  激光大气通信机系统。实验中使用的激光器输出功率 10 瓦。发射天线口径为 100 mm, 光束发散角为 0.2 mrad, 发射端距地面 1.3m, 发射光束水平俯角  $2^\circ$ , 整个光程下垫面起伏较大, 如沙石地面。接收端采用光敏面直径为 1mm 的两个热释电探测器接收, 两探测器相对距离为 8cm, 分别记录其起伏信号。同时还在接收端用一个双点温度脉动仪检测了湍流强度。全部数据的处理在 PDP-11/24 小型机上完成。

由于光程下垫面起伏较大,仅在一个点上检测  $C_s^2$  值一般是不够的。我们下面给出的  $C_s^2$  值是用一路记录信号求  $\sigma_k^2$ , 再由(30)式反推得到的路程平均值。将这样求得的  $C_s^2$  值与温度脉动仪测得的值比较,两者基本一致。

图(5)是实验值与理论值的比较。它表明理论分析的结果与实验结果是符合的。图(5)中由曲线(3)和(4)给出的实验分布值非常接近对数正态分布。(图中曲线(3)和(4)在横坐标上有平移)。它验证了在极弱湍流条件下,系统的功率起伏主要决定于光强起伏的结论。

由于直径为 1mm 的探测器光敏面在实验条件下完全可视为点探测,因而可推知,由于漂移的影响,系统接收平面上某固定点的光强起伏也不再服从对数正态分布。

实验的方差值与理论计算的方差值由图(6)给出。图中的实线表示的是  $\sigma_p^2$  的理论值,虚线表示  $\sigma_{\ln P_S}^2$  的理论值。两者是不相等的。这可以从(29)式得以解释。当  $\sigma_W^2 \ll W^2, \sigma_{\ln P_S}^2 \ll 1$  时,由(29)式近似有:

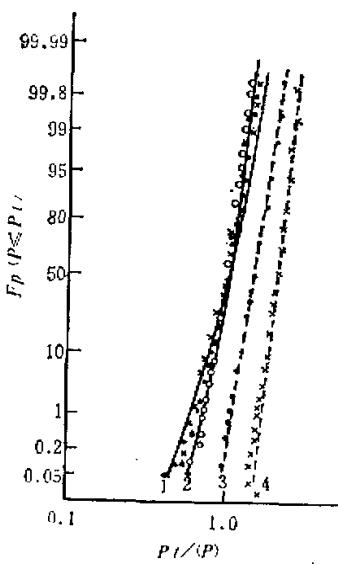


图5 实验值与理论值的比较,实线1和2分别表示 $C_0^2$ 为 $5 \times 10^{-14}$ 和 $3 \times 10^{-14}$ 时的理论曲线,取 $\rho_0 = 0.04\text{m}$ ,其它参数与实验条件相同,3,4两实验曲线表明在湍流极弱时存在对数正态分布。

●  $C_0^2 4.2 \times 10^{-14}$  ▲  $C_0^2 3.6 \times 10^{-14} \times C_0^2 2.7 \times 10^{-14}$ , ○  $C_0^2 5.5 \times 10^{-14}$ ,  $3C_0^2 1.3 \times 10^{-14}$ ,  
 $4C_0^2 8.7 \times 10^{-15}$

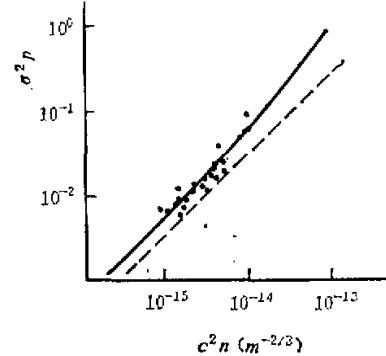


图6 实验方差值与理论值的比较

从而得知,漂移和恒定偏离使得 $\sigma_P^2$ 值增大.

## 六、结 论

选用光强起伏的对数正态分布和光束漂移的正态分布,讨论了湍流大气中直接探测光系统接收功率在同时考虑光强起伏、光束漂移以及系统恒定偏离情况下的起伏概率特性。并与实验结果作了比较。结果表明,漂移的影响使得系统接收功率的起伏以及接收平面上某固定点的光强起伏都不再是对数正态分布。仅在湍流极弱时,存在对数正态分布。

本文的有关实验得到成都电讯工程学院应用物理研究所一室沙漠实验组全体同志的协助,并得到中国科学院兰州沙漠研究所沙坡头沙漠观测站同志的大力支持,特此表示感谢。

$$\sigma_P^2 = \sigma_{\ln P_S}^2 + 4\rho_0^2\sigma_W^2/(R^2 + W^2)^2 \quad (30)$$

本课题得到中国科学院(82)科基金技准字第364号的资助。

### 参 考 文 献

- [1] Takalaya A. A., 1978, *Sov. J. Quan. Ele.* No. 8, 85.
- [2] Halavee U., et al, 1982, *Appl. Opt.*, Vol. 21, No. 13, 2432.
- [3] Tatarskii V. I. 著, 温景嵩等译, 1978, 湍流大气中波的传播理论, 科学出版社.
- [4] Ishimur A., 1978, in "Laser beam propagation in the atmosphere", Vol. 25, of Topics in Applied Physics, Springer-Verlag, New York, 129.
- [5] 宋正整理, 1976, 激光大气传输专集, 第三集, 安徽光机所, 29.
- [6] Chiba T., 1971, *Appl. Opt.*, Vol. 10, 2456.
- [7] Horbeck R. W. 著, 1982, 刘元久等译, 数值方法, 中国铁道出版社.
- [8] 数学手册编写组, 1979, 数学手册, 人民教育出版社.

## PROBABILITY OF RECEIVED-POWER FLUCTUATION OF AN OPTICAL SYSTEM IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

Wang Junbo Wu Jian Feng Zhichao  
(Chengdu Institute of Radio Engineering)

### Abstract

The probability of received-power fluctuation in the turbulent atmosphere is discussed with a simple and yet reasonable model for a direct-detection optical system. Good agreement was found between the theoretical results and our field experiment. Thus our analysis may be taken as a guide for the design of atmospheric optical system.