第11卷 第1期 大 气 科 学 Vol.11, No.1
1987年3月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Mar., 1987

地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性

刘式适 刘式达
(北京大学地球物理系)

提 要

本文首先导出了地球流体中惯性重力内波的波能密度和波作用量;然后,用 WKB 方法和多尺度方法建立了波作用量方程,并讨论了惯性重力内波的稳定性;最后,定义惯性重力内波的广义波作用量,并在非均匀介质中论证了它的守恒性.

一、引 言

自 Whitham (1965, 1970)[1,2]、Bretherton 和 Garrett (1968)[3]引入波作用量 (wave action) 或波作用量密度 (wave action density) 以来, Andrews 和 McIntyre (1978)[4], Koroly 和 Hoskins (1982)[5], Koroly (1983)[6] 相继讨论了波传播的一些重要性质,并根据变分原理和 Hamilton 原理直接写出了某些波动的波作用量守恒原理,曾庆存(1983)[7-9]、陈英仪和巢纪平[10,11]将波作用量与稳定度问题联系在一起,阐述了 Rossby 波和涡旋运动的稳定性与一些参数间的关系,这就进一步论证了波作用量研究的重要性.

本文讨论地球流体中惯性重力内波的波作用量及其与稳定度的关系,首先给出了波作用量的表达式,然后建立波作用量方程并讨论它与稳定度的关系,最后给出普遍的惯性重力内波的波作用量守恒原理.

二、惯性重力内波的波作用量

应用 Boussinesq 近似滤去声波,在静态的背景下,地球流体中三维 (x, y, z) 惯性重力内波的线性方程组可以写为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-fv=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial z}-g\dfrac{\rho'}{\bar\rho}\end{cases}\tag{1}$$

1985年1月14日收到,7月18日收到修改稿.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t}-\dfrac{N^2}{g}\bar{\rho}w=0 \end{cases}$$

其中 u, v, w 分别为 x, y, z 方向的速度；$\bar{\rho}$ 为静止流体的密度；p',ρ' 分别为扰动压力和扰动密度；g 为重力加速度；N 为 Brunt-Väisälä 频率；f 为 Coriolis 参数，在惯性重力内波中视为常数.

方程组(1)的第一、二两式分别消去 v, u 得:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)u=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)p' \tag{2}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)v=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}-f\frac{\partial}{\partial x}\right)p' \tag{3}$$

方程组(1)的第三、五两式消去 ρ' 得:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)w=-\frac{\partial^2 p'}{\partial t\partial z} \tag{4}$$

(2)式对 x 微商，(3) 式对 y 微商，然后相加，并利用(1)方程组的第四式和(4)式消去 u, v, p' 得:

$$\mathscr{L}w=0 \tag{5}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\nabla_h^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6}$$

这里

$$\nabla_h^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{7}$$

对缓变波列，方程(5)的解可以写为:

$$w=ReAe^{i\theta}=a\cos(\theta+\alpha) \tag{8}$$

其中 A 为复振幅，θ 为位相函数，而

$$a=|A| \qquad \alpha=\arg A \tag{9}$$

对缓变波列，作为第一近似，忽略 a 和 α 的变化.

注意，对缓变波列，局地波数和圆频率分别定义为:

$$k=\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad l=\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad n=\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{10}$$

$$\omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{11}$$

则将(8)式代入(6)式，可得惯性重力内波的圆频率 ω 满足:

$$\omega^2=\frac{K_h^2N^2+n^2f^2}{K^2} \tag{12}$$

其中

$$K_h^2=k^2+l^2 \qquad K^2=k^2+l^2+n^2=K_h^2+n^2 \tag{13}$$

K_h, K 分别为水平波数和总波数.

对 Boussinesq 流体，单位质量的动能和有效位能分别是：

$$Q = \frac{1}{2}\ (u^2 + v^2 + w^2) \tag{14}$$

$$P = \frac{g^2}{2N^2}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)^2 \tag{15}$$

为了求得动能和有效位能，将(8)式代入方程(1)之第五式和(4)式分别求得：

$$\rho' = -\bar{\rho}\,\frac{N^2}{g\omega}\ a\sin(\theta + \alpha) \tag{16}$$

$$p' = -\bar{\rho}\,\frac{-\omega^2 + N^2}{n\omega}\ a\cos(\theta + \alpha) \tag{17}$$

(17)式代入(2)和(3)式分别求得：

$$u = \frac{k(-\omega^2 + N^2)}{n(-\omega^2 + f^2)}\ a\cos(\theta + \alpha) - \frac{lf(-\omega^2 + N^2)}{n\omega(-\omega^2 + f^2)}\ a\sin(\theta + \alpha) \tag{18}$$

$$v = \frac{l(-\omega^2 + N^2)}{n(-\omega^2 + f^2)} a\cos(\theta + \alpha) + \frac{kf(-\omega^2 + N^2)}{n\omega(-\omega^2 + f^2)}\ a\sin(\theta + \alpha) \tag{19}$$

在得到 (16)—(19) 式的过程中，我们取积分常数为零

将(8)、(18)、(19)式代入(14)式；(16)式代入(15)式；并利用(12)式，可求得：

$$Q = \frac{1}{2}\left\{\frac{K^2}{K_h^2}\ a^2\cos^2(\theta + \alpha) + \frac{n^2 f^2}{K_h^2\omega^2}\, a^2\sin^2(\theta + \alpha)\right\} \tag{20}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{N^2}{\omega^2}\, a^2\sin^2(\theta + \alpha) \tag{21}$$

(20) 与 (21) 式相加，求得惯性重力内波的总能量为：

$$E \equiv Q + P = \frac{K^2}{2K_h^2}\, a^2 \tag{22}$$

它在一个周期 τ 内的平均值，即所谓波能密度 (wave energy density) 为：

$$\hat{E} \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E\,dt = E = \frac{K^2}{2K_h^2}\, a^2 \tag{23}$$

注意，我们这里导得的波能密度是以方程(6)和解(8)为前题的，这里 a 为 w 的振幅. 若以别的物理量为基础，波能密度有不同的形式. 例如，在 (x, z) 的二维问题中，若引入流函数 ψ，且设 $\psi = a\cos(\theta + \alpha)$，则导得 $\hat{E} = E = \frac{1}{2}K^2a^2$

为了方便，由(23)式，我们定义 $2K_h^2\hat{E}$ 为惯性重力内波的波作用量，记为$\mathscr{E}$，即

$$\mathscr{E} \equiv 2K_h^2\hat{E} = K^2a^2 \tag{24}$$

由此可知，这里$\mathscr{E}$为二次正定函数，正比于振幅的平方.

同时，为了便于比较，我们还定义下列三种形式的波作用量：

$$\mathscr{E}_1 \equiv \frac{2\hat{E}}{\omega} = \frac{\mathscr{E}}{\omega K_h^2} \tag{25}$$

$$\mathscr{E}_2 \equiv 2\hat{E} = \frac{\mathscr{E}}{K_h^2} \tag{26}$$

$$\mathscr{E}_3 \equiv K_h^2\omega\mathscr{E} \tag{27}$$

其中 $\mathscr{E}_1$ 即是传统的波作用量定义，$\mathscr{E}_2$ 即是波能密度的 2 倍，$\mathscr{E}_3$ 我们称为惯性重力内波的广义波作用量. 之所以如此赘述，是因为传统用 $\mathscr{E}_1$ 或 $\mathscr{E}_2$ 表述波作用量或波能密度，它们仅在均匀介质中才具有守恒性，但 $\mathscr{E}_3$ 即便在非均匀介质中也具有守恒性，其物理意义还不清楚. 又因为，对惯性重力内波，ω 可正也可负，因而，利用 $\mathscr{E}_1$ 说明稳定度是不合适的，下面将论述应用 $\mathscr{E}$ 或 $\mathscr{E}_2$ 的方程说明稳定度较合适. 正如，利用波作用量讨论 Rossby 波的稳定度，通常也不用 $\mathscr{E}_1$，而是采用与 $\mathscr{E}$ 或 $\mathscr{E}_2$ 相当的形式[7].

三、波群分析

由波群理论分析知：波群由两部份组成，一部份是高频载波，其随空间、时间变化相对较快；另一部份是低频波包，其随空间、时间变化相对较慢，它就是缓变波列 (slowly varying wavetrains). 因此，波群存在两种空间、时间尺度：一是快空间、时间尺度

$$x = x \quad y = y \quad z = z \quad t = t \tag{28}$$

另一是慢空间、时间尺度

$$X = \epsilon x \quad Y = \epsilon y \quad Z = \epsilon z \quad T = \epsilon t \tag{29}$$

其中 ϵ 是小参数. (28)式表征波列位相的变化，(29)式表征波列振幅的变化.

利用(28)、(29)式，对缓变波列，(8)式表征的 w 可表为：

$$w = A(X, Y, Z, T)e^{i\theta(x,y,z,t)}, \tag{30}$$

由(10)式，我们写出缓变波列的下列诸运动学关系：

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x} \qquad \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial y} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial k}{\partial t} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial l}{\partial t} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\partial n}{\partial t} \tag{32}$$

注意，(31)、(32) 式中的 x、y、z、t 换为 X、Y、Z、T，也照样成立.

(30)式代入(5)式，并设 k、l、n、ω 也是 X、Y、Z、T 的缓变函数，则得：

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[-\omega^2 - \epsilon i\left(2\omega\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial \omega}{\partial T}\right) + \epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right] + N^2\right\} \\
&\times\left\{-K_h^2 A + \epsilon i\left(2k\frac{\partial A}{\partial X} + A\frac{\partial k}{\partial x} + 2l\frac{\partial A}{\partial Y}\right.\right. \\
&\left.\left. + A\frac{\partial l}{\partial Y}\right) + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)\right\} + \left\{\left[-\omega^2 - \epsilon i\left(2\omega\frac{\partial}{\partial T}\right.\right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{\partial \omega}{\partial T}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right] + f^2\right\}\cdot\left\{-n^2 A + \varepsilon i\left(2n\frac{\partial A}{\partial Z}\right.\right. \\
&\left.\left. + A\frac{\partial n}{\partial Z}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 A}{\partial Z^2}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

应用 WKB 方法，将 A 按 ε 的幂次展开，则

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots \tag{34}$$

其中 A_0、A_1、$A_2\cdots$ 分别为 A 的零级、一级、二级……近似.

将(34)代入(33)式，得到零级近似方程为：

$$\{K_h^2(\omega^2 - N^2) + n^2(\omega^2 - f^2)\}A_0 = 0 \tag{35}$$

因 $A_0 \neq 0$，则得：

$$\omega^2 = \frac{K_h^2 N^2 + n^2 f^2}{K^2} \tag{36}$$

这就是三维惯性重力内波的色散关系(12)，由此有

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{K_h^2 N^2 + n^2 f^2}{K^2}} = \Omega(k, l, n; X, Y, Z, T) \tag{37}$$

对缓变波列，它称为局地色散关系．它不仅是 k, l, n 的函数，而且是 X, Y, Z, T 的函数．

由(37)式可以求得缓变波列的群速度在 x, y, z 方向的分量分别为：

$$\begin{cases} c_{gx} \equiv \dfrac{\partial\omega}{\partial k} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\partial\omega^2}{\partial k} = \dfrac{k}{\omega}\cdot\dfrac{n^2(N^2 - f^2)}{K^4} = \dfrac{k(-\omega^2 + N^2)}{\omega K^2} \\ c_{gy} \equiv \dfrac{\partial\omega}{\partial l} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\partial\omega^2}{\partial l} = \dfrac{l}{\omega}\cdot\dfrac{n^2(N^2 - f^2)}{K^4} = \dfrac{l(-\omega^2 + N^2)}{\omega K^2} \\ c_{gz} \equiv \dfrac{\partial\omega}{\partial n} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\partial\omega^2}{\partial n} = \dfrac{n}{\omega}\cdot\dfrac{K_h^2(f^2 - N^2)}{K^4} = \dfrac{n(-\omega^2 + f^2)}{\omega K^2} \end{cases} \tag{38}$$

显然

$$kc_{gx} + lc_{gy} + nc_{gz} = 0 \tag{39}$$

由(37)和(38)式还可得到

$$\begin{cases} \dfrac{D_g\omega}{DT} = \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{k,l,n,X,Y,Z} = \dfrac{K_h^2}{2\omega K^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial T} \\ \dfrac{D_g k}{DT} = -\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial X}\right)_{k,l,n,Y,Z,T} = -\dfrac{K_h^2}{2\omega K^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial X} \\ \dfrac{D_g l}{DT} = -\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial Y}\right)_{k,l,n,X,Z,T} = -\dfrac{K_h^2}{2\omega K^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial Y} \\ \dfrac{D_g n}{DT} = -\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)_{k,l,n,X,Y,T} = -\dfrac{K_h^2}{2\omega K^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial Z} \end{cases} \tag{40}$$

其中

$$\frac{D_g}{DT} \equiv \frac{\partial}{\partial T} + c_{gx}\frac{\partial}{\partial X} + c_{gy}\frac{\partial}{\partial Y} + c_{gz}\frac{\partial}{\partial Z} \tag{41}$$

四、波作用量与稳定度

对于线性方程(5)，利用标准波型法，可以得到与(12)或(36)式一样的色散关系，并据此，按 ω^2 是正(ω 为实数)或负(ω 是纯虚数)来说明波是稳定或不稳定、如按(12)或(36)式，认为当层结稳定时 ($N^2 > 0$)，惯性重力内波稳定；层结不稳定($N^2 < 0$)，且 $|K_h^2 N^2| > |n^2 f^2|$ 时，惯性重力内波不稳定．这种传统的稳定度分析，认为基本状态是定常和均匀的，没有考虑 N^2 的变化．下面，利用波作用量讨论稳定度，则考虑了 N^2 的时空变化

(33)式的一级近似方程为：

$$\frac{\partial}{\partial T}(K^2A_0)+\frac{K^2}{2\omega}A_0\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{k}{\omega}(-\omega^2+N^2)\frac{\partial A_0}{\partial X}$$
$$+\frac{l}{\omega}(-\omega^2+N^2)\frac{\partial A_0}{\partial Y}+\frac{n}{\omega}(-\omega^2+f^2)\frac{\partial A_0}{\partial Z}$$
$$+\frac{-\omega^2+N^2}{2\omega}A_0\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)+\frac{-\omega^2+f^2}{2\omega}A_0\frac{\partial n}{\partial Z}=0 \tag{42}$$

上式乘以 $2A_0$（若 A_0 为复数，乘以 $2A_0^*$，A_0^* 为 A_0 的复共轭）得到：

$$\frac{\partial}{\partial T}(K^2A_0^2)+A_0^2\frac{\partial K^2}{\partial T}+\frac{K^2A_0^2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{k}{\omega}(-\omega^2+N^2)\frac{\partial A_0^2}{\partial X}$$
$$+\frac{l}{\omega}(-\omega^2+N^2)\frac{\partial A_0^2}{\partial Y}+\frac{n}{\omega}(-\omega^2+f^2)\frac{\partial A_0^2}{\partial Z}$$
$$+\frac{-\omega^2+N^2}{\omega}A_0^2\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)+\frac{-\omega^2+f^2}{\omega}A_0^2\frac{\partial n}{\partial Z}=0 \tag{43}$$

但利用(36)式，

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}=\frac{K_h^2}{2\omega^2K^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}+\frac{N^2}{2\omega^2K^2}\frac{\partial K_h^2}{\partial T}$$
$$+\frac{f^2}{2\omega^2K^2}\frac{\partial n^2}{\partial T}-\frac{1}{2K^2}\frac{\partial K^2}{\partial T} \tag{44}$$

又利用(32)和(38)式有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial X}(K^2A_0^2c_{gx})=\dfrac{k}{\omega}(-\omega^2+N^2)\dfrac{\partial A_0^2}{\partial X}+A_0^2\left\{\dfrac{-\omega^2+N^2}{\omega}\dfrac{\partial k}{\partial X}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\partial k^2}{\partial T}+\dfrac{k}{\omega}\dfrac{\partial N^2}{\partial X}+\dfrac{-\omega^2+N^2}{2\omega^2}\dfrac{\partial k^2}{\partial T}\right\}\\ \dfrac{\partial}{\partial Y}(K^2A_0^2c_{gy})=\dfrac{l}{\omega}(-\omega^2+N^2)\dfrac{\partial A_0^2}{\partial Y}+A_0^2\left\{\dfrac{-\omega^2+N^2}{\omega}\dfrac{\partial l}{\partial Y}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\partial l^2}{\partial T}+\dfrac{l}{\omega}\dfrac{\partial N^2}{\partial Y}+\dfrac{-\omega^2+N^2}{2\omega^2}\dfrac{\partial l^2}{\partial T}\right\}\\ \dfrac{\partial}{\partial Z}(K^2A_0^2c_{gz})=\dfrac{n}{\omega}(-\omega^2+N^2)\dfrac{\partial A_0^2}{\partial Z}+A_0^2\left\{\dfrac{-\omega^2+f^2}{\omega}\dfrac{\partial n}{\partial Z}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\partial n^2}{\partial T}+\dfrac{-\omega^2+f^2}{2\omega^2}\dfrac{\partial n^2}{\partial T}\right\}\end{cases} \tag{45}$$

根据(44)和(45)式，(43)式可改写为：

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g=-\frac{K_h^2A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}+\frac{A_0^2}{\omega}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial x}+l\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right) \tag{46}$$

这里

$$\mathscr{E}=K^2A_0^2 \tag{47}$$

就是(24)式中$\mathscr{E}$的零级近似．(46)式与巢纪平(1980)[13]的结果相似，我们称它为波作用量方程．

由(46)式可知，惯性重力内波的波作用量$\mathscr{E}$随时间的变化除依赖于 $-\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g$ 外，主要决定于层结参数 N^2 的非定常性和水平非均匀性．

若层结参数 N^2 是定常的和水平均一的，则(46)式就化为：

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g=0 \tag{48}$$

这就是惯性重力内波的波作用量或波作用密度守恒原理.

在边界 w 为零的条件下,对(46)式取体积分得:

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}\delta V &= -\iiint_V \frac{K_h^2A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}\delta V+\iiint_V \frac{A_0^2}{\omega}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial X}+l\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)\delta V\\ &= -\iiint_V \frac{K_h^2A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}\delta V+\iiint_V \frac{K_h^2A_0^2}{\omega^2}\mathbf{c}_h\cdot\nabla N^2\delta V\end{aligned} \tag{49}$$

其中

$$\mathbf{c}_h\equiv\frac{\omega}{K_h^2}\boldsymbol{K}_h=\frac{\omega}{K_h^2}(k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}) \tag{50}$$

为水平相速度矢量.

下面分别讨论两种简化情况.

1.层结水平均一的流体, $\nabla N^2=0$

此时,(49)式化简为:

$$\iiint_V \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}\delta V=-\iiint_V \frac{K_h^2A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}\delta V \tag{51}$$

1) 对于稳定层结, $N^2>0$

由(36)式知,此时 $\omega^2>0$.

在区域中,若 $\frac{\partial N^2}{\partial T}>0$, 即层结稳定度增加,则整个区域波能量减小,波将衰减;若 $\frac{\partial N^2}{\partial T}<0$,即层结稳定度减小,则整个区域波能量增加,波将增长.

2) 对于不稳定层结, $N^2<0$, 但 $\omega^2>0$

由(36)式知,此时 $K_h^2|N^2|<n^2f^2$, 即水平波长相对较长或纬度相对较高的情况.

在区域中,若 $\frac{\partial|N^2|}{\partial T}=-\frac{\partial N^2}{\partial T}<0$, 即层结不稳定度减小,则整个区域波能量减小,波将衰减;若 $\frac{\partial|N^2|}{\partial T}=-\frac{\partial N^2}{\partial T}>0$, 即层结不稳定度增加,则整个区域波能量增加,波将增长.

3) 对于不稳定层结 $N^2<0$, 但 $\omega^2<0$

由(36)式知,此时 $K_h^2|N^2|>n^2f^2$, 即水平波长相对较短或纬度相对较低的情况. 这时的结论与第 2) 种情况相反. 即,在区域中,若 $\frac{\partial|N^2|}{\partial T}=-\frac{\partial N^2}{\partial T}>0$, 层结不稳定度增加,则整个区域波能量减小,波将衰减; 若 $\frac{\partial|N^2|}{\partial T}=-\frac{\partial N^2}{\partial T}<0$,层结不稳定度减小,则整个区域波能量增加,波将增长.

2. 层结定常的流体, $\frac{\partial N^2}{\partial T}=0$

此时,(49)式简化为:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}\, \delta V = \iiint\limits_{V} \frac{K_h^2 A_0^2}{\omega^2} \boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 \delta V \tag{52}$$

1）对于稳定层结，$N^2 > 0$，此时，$\omega^2 > 0$

在区域中，若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 < 0$，即波从 N^2 的高值向低值传播，则整个区域波能量减小，波将衰减，见图 1a；若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 > 0$，即波从 N^2 的低值向高值传播，则整个区域波能量增加，波将增长，见图 1b.

2）对于不稳定层结，$N^2 < 0$，但 $\omega^2 > 0$

在区域中，若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla |N^2| = -\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 > 0$，即波从 $|N^2|$ 的低值向高值传播，则整个区域波能量减小，波将衰减，见图 2 a；若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla |N^2| = -\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 < 0$，即波从 $|N^2|$ 的高值向低值传播，则整个区域波能量增加波将增长，见图 2b.

3）对于不稳定层结，$N^2 < 0$，但 $\omega^2 < 0$

在区域中，若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla |N^2| = -\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 < 0$，即波从 $|N^2|$ 的高值向低值传播，则整个区域波能量减小，波将衰减，见图 3a；若 $\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla |N^2| = -\boldsymbol{c}_h \cdot \nabla N^2 > 0$，即波从 $|N^2|$ 的低值向高值传播，则整个区域波能量增加，波将增长，见图 3b.

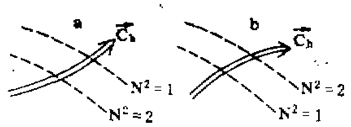

图 1　$N^2>0$，$\omega^2>0$
a：波衰减，b：波增长

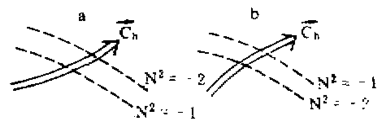

图 2　$N^2<0$，$\omega^2>0$
a：波衰减，b：波增长

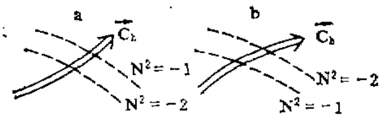

图 3　$N^2<0$，$\omega^2<0$
a：波衰减，b：波增长

上述结论可以给某些中尺度系统（如台风、飑线）的发展提供物理背景，因而对天气预报有一定的参考价值.

五、广义波作用量的守恒性

根据关于 $\mathscr{E}$ 的波作用量方程(46)，我们可以得到 $\mathscr{E}_1$，$\mathscr{E}_2$，$\mathscr{E}_3$ 的方程.

由 (25) 式，$\mathscr{E}_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{\omega K_h^2}$，则有：

$$\left\{ \frac{\partial \mathscr{E}_1}{\partial T} = \frac{1}{\omega K_h^2}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T} - \frac{\mathscr{E}}{\omega^2 K_h^2}\frac{\partial \omega}{\partial T} - \frac{\mathscr{E}}{\omega K_h^4}\frac{\partial K_h^2}{\partial T} \right.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathscr{E}_1 c_{gx}}{\partial X}=\dfrac{1}{\omega K_h^2}\dfrac{\partial \mathscr{E} c_{gx}}{\partial X}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gx}}{\omega^2 K_h^2}\dfrac{\partial \omega}{\partial X}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gx}}{\omega K_h^4}\dfrac{\partial K_h^2}{\partial X}\\ \dfrac{\partial \mathscr{E}_1 c_{gy}}{\partial Y}=\dfrac{1}{\omega K_h^2}\dfrac{\partial \mathscr{E} c_{gy}}{\partial Y}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gy}}{\omega^2 K_h^2}\dfrac{\partial \omega}{\partial Y}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gy}}{\omega K_h^4}\dfrac{\partial K_h^2}{\partial Y}\\ \dfrac{\partial \mathscr{E}_1 c_{gz}}{\partial Z}=\dfrac{1}{\omega K_h^2}\dfrac{\partial \mathscr{E} c_{gz}}{\partial Z}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gz}}{\omega^2 K_h^2}\dfrac{\partial \omega}{\partial Z}-\dfrac{\mathscr{E} c_{gz}}{\omega K_h^4}\dfrac{\partial K_h^2}{\partial Z}\end{cases}\tag{53}$$

因而，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{E}_1}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}_1\mathbf{c}_g&=\frac{1}{\omega K_h^2}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g\right)\\&-\frac{\mathscr{E}}{\omega^2 K_h^2}\frac{D_g\omega}{DT}-\frac{\mathscr{E}}{\omega K_h^4}\frac{D_g K_h^2}{DT}\end{aligned}\tag{54}$$

将(40)、(46)式代入上式得到：

$$\frac{\partial \mathscr{E}_1}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}_1\mathbf{c}_g=-\frac{A_0^2}{\omega^3}\frac{\partial N^2}{\partial T}+\frac{2A_0^2}{\omega^2 K_h^2}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial X}+l\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)\tag{55}$$

它在形式上与(46)式相似，因而，通常$\mathscr{E}_1$也不具备守恒性，这与文献[10]的结论有差别.

类似，由(26)式，$\mathscr{E}_2=\dfrac{\mathscr{E}}{K_h^2}$，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{E}_2}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}_2\mathbf{c}_g&=\frac{1}{K_h^2}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g\right)-\frac{\mathscr{E}}{K_h^4}\frac{D_g K_h^2}{DT}\\&=-\frac{A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}+\frac{2A_0^2}{\omega K_h^2}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial X}+l\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)\end{aligned}\tag{56}$$

它在形式上也与(46)式相似，因而，通常$\mathscr{E}_2$也不具备守恒性.

然而，$\mathscr{E}_3$却不同，由(27)式，$\mathscr{E}_3=K_h^2\omega\mathscr{E}$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{E}_3}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}_3\mathbf{c}_g&=K_h^2\omega\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}\mathbf{c}_g\right)\\&+\mathscr{E}K_h^2\frac{D_g\omega}{DT}+\mathscr{E}\omega\frac{D_g K_h^2}{DT}\end{aligned}\tag{57}$$

将(40)、(46)式代入立即有：

$$\frac{\partial \mathscr{E}_3}{\partial T}+\nabla\cdot\mathscr{E}_3\mathbf{c}_g=0\tag{58}$$

上式说明，尽管层结参数N^2可以随空间和时间变化，但$\mathscr{E}_3$具有守恒性. $\mathscr{E}_3$可称为惯性重力内波的广义波作用量.

六、基本气流的作用

前面的讨论都是以静态为背景的，没有考虑到基本气流的作用，若计入基本气流$\bar{u}$的作用，则算子(b)变为

$$\mathscr{L}\equiv\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+N^2\right]\nabla_h^2+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+l^2\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{59}$$

其中

$$I^2 \equiv f\left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \tag{60}$$

为惯性稳定度参数。

若仍采用形如(47)式的波作用量，则通过类似推导可得：

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T} + \nabla \cdot \mathscr{E} \boldsymbol{c}_g = -\frac{K_h^2 A_0^2}{2\omega_r^2}\frac{\partial N^2}{\partial T} - \frac{n^2 A_0^2}{2\omega_r^2}\frac{\partial I^2}{\partial T} + \frac{A_0^2}{\omega_r^2}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial X} + l\frac{\partial N^2}{\partial Y} + n\frac{\partial I^2}{\partial Z}\right) \tag{61}$$

其中

$$\omega_r = \omega - k\bar{u} \tag{62}$$

为 Doppler 频率.

显然，当 $\bar{u} = 0$ 时，(61)式退化为(46)式，而且由(61)式可知，除层结稳定度参数 N^2 的变化影响 $\mathscr{E}$ 外，惯性稳定度参数 I^2 的变化也影响 $\mathscr{E}$，但与 I^2 有关的部份在形式上与 N^2 有关的部份相似，我们不再在这里详细分析了.

七、结　　论

与 Rossby 波一样，地球流体中的许多波动都可以应用多尺度方法和 WKB 方法建立波作用量方程，从而可分析一些波的稳定度与特定参数间的关系，这比应用标准波型法，求出频率 ω，在一定条件下说明 ω 是实数或复数来判别稳定度大大进了一步. 本文仅就惯性重力内波的传播作了讨论，指出其稳定性由惯性稳定度参数和层结稳定度参数两者的时空变化综合决定.

参　考　文　献

[1] Whitham, G. B., (1965), *J. Fluid. Mech.*, **22**, 273—283.
[2] Whitham, G. B., (1970), *J. Fluid Mech.*, **44**, 373—395.
[3] Bretherton, F. P. and C. J. R. Garrett, 1968, *Proc. Roy. Soc.* London. Ser. A 302, 529—554.
[4] Andrews, D. G. McIntyre, M. E., 1978, *J. Fluid Mech.* **89**, 647—664.
[5] Koroly, D. J., 1983, *Atmos and Oceans*, **7**, 2, 111—125.
[6] Koroly, D. J. and Hoskins, B. J., 1982, *J. Met. Soc.* of Japan, **60**, 109—123.
[7] Zeng. Q. C. (曾庆存), 1982, *J. Met. Soc.* Japan, **60**, 24—30.
[8] Zeng. Q. C. (曾庆存), 1983, *J. Atmos Sci.*, **40**, 73—84.
[9] Zeng. Q. C. (曾庆存) 1983 *Tellus*, 35A, 5, 337—349.
[10] 陈英仪. 巢纪平，1983，中国科学 B 辑，7，663—672.
[11] 陈英仪，1984，中国科学，B 辑，5，476—483.
[12] Bretherton, F. P., (Ed. Reid. W. H.), 1971, Mathematical Problems in the Geophysical Sciences, 61—102.
[13] 巢纪平，1980，大气科学，4，230—237.

WAVE ACTION AND STABILITY OF INTERNAL INERTIAL GRAVITY WAVES IN GEOPHYSICAL FLUID

Liu Shikuo Liu Shida

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

In this paper, the wave action density or the wave action of the internal inertial gravity waves in the geophysical fluid is derived, the equation of the wave action is established by the multi-scale and WKB methods while the generalized wave action is defined and its conservation is proved unconditionally.