

33 模 Lorenz 系统的某些总体特征

杨培才

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文除了用直观的模式阵图方法,简要地分析了二维 Bénard 对流问题的高维截谱模式的构造外,还在 33 模系统求解结果的基础上,计算了系统的平均能量、平均耗散和平均垂直热通量,并根据这些描述系统的总体特征的物理量在一些模式子集上的分布,讨论了高维系统对原始方程的逼近问题。

一、引 言

近些年来,在 Lorenz (1963)^[1] 开创性工作的基础上,已经有大量的工作^[2]详细地分析了三模系统随 Rayleigh 数 r 的增长所经历的分支过程。但是三模系统毕竟是在对原始方程进行了过份剧烈的谱模截断之后得到的,由它求得的结果不可避免地会对原始方程所描写的物理过程造成一些歪曲。因此,研究更高维的谱模系统便引起了人们的兴趣。Curry (1978)^[3] 对二维 Bénard 对流问题建立了一个包括了 Lorenz 所取模态在内的十四个谱模的高维系统,得到了一个完全不同于三模系统的分支次序,这表明谱模的增加将引起解的重大变化。我们 (1984) 对 14 模系统再次进行了扩充,建立了一个三十三个模态的动力系统(结果将另文发表)。为了便于比较起见,我们在对系统进行数值积分时,除了控制参数 r 外,选取了与 Lorenz 和 Curry 相同的参数值和初始值,亦即 $\sigma = 10$, $a = \sqrt{2}/2$ 和初值

$$\begin{aligned}\varphi_{m,n}(0) &= 0 \quad (\text{对所有 } m \text{ 和 } n) \\ \theta_{m,n}(0) &= \begin{cases} 1 & (m = n = 1) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}\end{aligned}$$

数值计算的结果表明,我们的系统与低维系统相比,分支次序包含了更丰富的内容,模态的增加导致了新的相变过程。

最近,Curry 和 Herring 等人 (1984)^[4] 对二维和三维 Bénard 对流问题进行了大规模的数值试验,详尽地研究了随着谱模数目的增加,解的性质的变化。他们指出,就二维对流而言,当截取的谱模增大到一定数目之后,解的性质就不再发生有意义的变化,并认为此时解已经趋于原始方程的解。

Gollub 和 Benson (1980)^[5] 在一个长高比较大的容器内 ($a = 2.4$ 和 3.5), 对 Prandtl

数为 2.5 和 5.0 的流体进行了 Bénard 对流实验, 实验的结果得到了四种不同的分叉路线。这些分支解包含了大部份理论分析得到的运动形态。尽管实验是在与理论计算不同的条件下进行的, 但是它为现有的理论结果在定性比较方面提供了一个良好的依据。

图 1 给出了几个不同维数的 Lorenz 系统以及 Curry 等人最新计算所得到的分支次序示意图。为了比较, 我们同时给出了 Gollub 实验所得到的两条分支路线示意图。由图可以看出, 14 模系统和 33 模系统以及 Curry 等人的更高维系统的分支次序都与实验结果在定性方面有着较好的一致性, 而三模系统则有着显著的差异, 另一方面, 我们也看到, 14 模系统和 33 模系统在相同的参数区间内对应着不同性质的解, 这个差异显然是由于截取模态的多少不同而引起的。

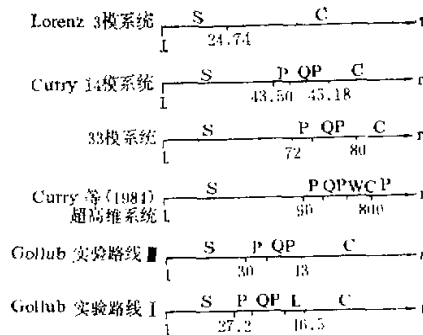


图 1 一些理论计算和实验结果的分支次序示意图。图中

S: 定常解; P: 周期解; QP: 准周期解; L: 锁相;
C: 浑沌解, WC: 弱浑沌解。

Marcus (1981)^[6] 曾对一个球极坐标系中的对流问题, 讨论了截取模态的多少对解的性质的影响。他指出, 一个好的近似谱模式, 应当使得选取的模态对系统在整个空间的总能量, 总耗散量以及总垂直热通量的产生有较大的贡献。或者说, 被截掉的谱模分量对上述那些系统的总体特征量的影响较小。

本文除了简要地分析一下高维谱模式的构造之外, 将根据 33 模系统的积分结果, 计算系统的平均能量和平均耗散等物理量在它所包含的一些模态子集上的分布, 并在 Marcus 意义下, 讨论 33 模系统对二维对流运动的解的近似程度问题。

二、模态阵图与能量方程

考虑如下无因次形式的二维 Bénard 对流方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} = - \frac{\partial(\phi, \Delta \phi)}{\partial(x, z)} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sigma \Delta^2 \phi \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial(\phi, \theta)}{\partial(x, z)} + R \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(t > 0; \quad 0 < x < \frac{2\pi}{a}, \quad 0 < z < \pi \right)$$

其中 σ 为 Prandtl 数; $R = rR_c$ ($R_c = 6.75$) 为 Rayleigh 数; a 为一个几何参数, 表示对流区域的高度和长度之比. ϕ 和 θ 分别代表流函数和扰动温度; Δ 表示二维 Laplace 算子.

取与 Lorenz 相同的边界条件, 并对 ϕ 和 θ 做如下形式的 Galerkin 展开

$$\begin{cases} \phi(x, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{m,n}(t) \sin(amx) \sin(nz) \\ \theta(x, z, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \theta_{m,n}(t) \cos(amx) \sin(nz) \end{cases} \quad (2)$$

此时问题的边界条件自动满足. 代 (2) 式入 (1) 式之后, 可以得到振幅 $\varphi_{m,n}(t)$ 和 $\theta_{m,n}(t)$ 所满足的非线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{p,q} = -\frac{a}{4(a^2p^2 + q^2)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \varphi_{m,n} \varphi_{k,l} (a^2k^2 + l^2) [mls_1(m, k, p)s_1(l, n, q) - nk s_1(k, m, p)s_1(n, l, q)] \\ \quad - \sigma(a^2p^2 + q^2)\varphi_{p,q} + \sigma \frac{ap}{a^2p^2 + q^2} \theta_{p,q} \\ \dot{\theta}_{p,q} = -\frac{a}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^N \varphi_{m,n} \theta_{k,l} [mls_2(m, k, p)s_1(l, n, q) + nk s_1(p, m, k)s_1(n, l, q)] + apR\varphi_{p,q} - (a^2p^2 + q^2)\theta_{p,q} \\ \quad (p = 0, 1, 2, \dots, M, \quad q = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (3)$$

其中符号函数

$$s_1(m, k, p) = \begin{cases} -1 & \text{当 } m = k + p, \\ 1 & \text{当 } m = |k - p| \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$s_2(m, k, p) = \begin{cases} 1 & \text{当 } m = k + p \text{ 或 } m = |k - p| \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) 式即为我们将要讨论的谱模方程, M 和 N 表示谱模的截断长度, 或称之为模式的空间分辨能力参数.

考虑到流函数的定义, 流体的动能和热能表达式可以写成

$$\begin{cases} e_k = \frac{1}{2} (u^2 + w^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ e_p = \frac{1}{2} \theta^2 \end{cases} \quad (4)$$

当代 (2) 式入 (4) 式后, 并对变量 x 和 z 在整个空间积分时, 流体在空间中的总动能和总热能被表示为

$$\begin{cases} E_k = \int_0^{\pi 2\pi/a} \int_0^{\pi 2\pi/a} c_k dx dz = \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (a^2 m^2 + n^2) \phi_{m,n}^2 \\ E_p = \int_0^{\pi 2\pi/a} \int_0^{\pi 2\pi/a} c_p dx dz = \frac{\pi^2}{4} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta_{m,n}^2 + 2 \sum_{n=1}^N \theta_{0n}^2 \right] \end{cases} \quad (5)$$

由上式及模态发展方程 (3), 可以建立系统的能量方程, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\sigma \pi^2}{2} \left\{ a(R+1) \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N m \varphi_{m,n} \theta_{m,n} - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(a^2 m^2 + a^2)^2 \phi_{m,n}^2 \right. \\ \left. + (a^2 m^2 + n^2) \theta_{m,n}^2] - 2 \sum_{n=1}^N n^2 \theta_{0n}^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $E = E_k + \sigma E_p$, 它表示系统的总能量. 上式右端的第一项为系统在整个空间的总垂直热通量, 以后用 F 表示, 右端的其余部分为系统在整个空间的总耗散量, 用 D 表示.

从 (6) 式的建立过程, 可以看出, (3) 式中的非线性部份被相互抵销了, 这说明它们对系统的总能量没有影响.

但是, 从对方程 (3) 的分析, 却可以看到, 系统中不同波长之间扰动的传递是通过非线性部分实现的. 受扰的波 (由模态表示) 通过非线性过程把扰动传给其它的波, 使得包含在系统中的不同尺度的运动, 按一定顺序被依次激发起来. 这种传播方式可以通过图 2 的模式阵图来表示. 图 2 说明, 波数为 (m, n) 和 (k, l) 的两个波受扰后, 通过非线性叠加, 可以激发水平波数为 $k-m$ 和 $k+m$ ($k \geq m$)、垂直波数为 $l-n$ 和 $l+n$ ($l \geq n$) 的波. 为了便于说明起见, 对于一个二维波数向量 (m, n) , 我们用 $m+n$ 来定义它的范数, 用范数的大小来表征波数的高低或波长的长短. 在这样的考虑下, 扰动的传播顺序可用一个串激过程来表示. 亦即, 当对应于某一波数的波受到扰动之后, 扰动只能向不低于它的波数的波传播, 而不能激发比受扰波长更长的波. 这个传播过程被表示在图 3 中. 在图 3 里, 我们假定初始扰动是给定在波数向量为 $(1, 1)$ 的波上, 箭头仅表示在这个波参与下的非线性串激过程, 而不包括次级源所参与的串激过程.

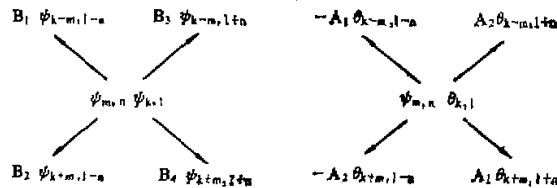


图 2 扰动传播的模式阵图

图中: $B_1 = B/[a^2(k-m)^2 + (l-n)^2]$, $B_2 = B/[a^2(k-m)^2 + (l+n)^2]$
 $B_3 = B/[a^2(k+m)^2 + (l-n)^2]$, $B_4 = B/[a^2(k+m)^2 + (l+n)^2]$

$B = -\frac{a}{4} [a^2(m^2 - k^2) + (n^2 - l^2)]$, $A_1 = -\frac{a}{4} (ml - nk)$

$A_2 = -\frac{a}{4} (ml + nk)$

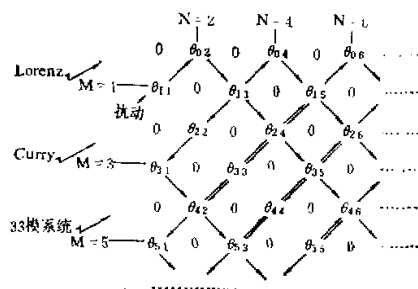


图 3 表示扰动串激过程的模态阵图

上述模态阵图对于构造高维谱模系统是很有用的, 它可以比较直观地表示任何维数的谱模截断所组成的模态集合。实际上, 著名的 Lorenz 三模系统是模态阵图中最小的一个子阵, 即在 (3) 式中取 $M=1$, $N=2$; Curry 的 14 模系统和我们的 33 模系统分别是其第二层和第三层子阵, 相应于模态截断长度 (M, N) 分别取 $(3, 4)$ 和 $(5, 6)$ 的情况 (见图 3)。

构成上述谱模系统的模态集合 $A(M, N)$ 分别为

$$A(1, 2) = \{(1, 1), (0, 2)\}$$

$$A(3, 4) = \{(1, 1), (0, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), (3, 3), (2, 4)\},$$

$$A(5, 6) = \{(1, 1), (0, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6), (5, 5), (4, 6)\}$$

显然, $A(1, 2) \subset A(3, 4) \subset A(5, 6)$, 这表明这三个谱模系统是按图 3 所示的模态阵图逐次扩充而得到的。

三、能量和耗散量的谱分布

我们曾较详细地分析了 33 模系统的解的性质随参数 r 的变化, 结果表明, 与低维 Lorenz 系统相比, 导致定常解失稳和混沌解发生的参数值向高 r 值方向推移了 (见图 1), 这似乎说明随着模态集合的扩大, 新增加的模态对系统解的失稳起着某种阻尼或延缓作用。

在本节, 我们将根据 33 模系统的计算结果, 讨论按模态阵图 3 所表示的那些模态对诸如系统的能量, 耗散和垂直热通量等总体特征量的贡献, 并分析上面所说的“阻尼”作用产生的原因。

为此, 我们回到上面所导出的能量方程 (5) 和 (6), 如果考虑它们在 t 足够大后的某一时段 T 内的平均值, 那么系统在空间中的平均动能 $\bar{E}_k$ 和平均热能 $\bar{E}_p$, 以及平均动能耗散 $\bar{D}_k$ 、平均热能耗散 $\bar{D}_p$ 和平均垂直热通量 $\bar{F}$ 可分别表示为

$$\begin{cases} \bar{E}_k = \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (a^2 m^2 + n^2) \bar{\phi}_{m,n}^2 \\ \bar{E}_p = \frac{\pi^2}{4} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \bar{\theta}_{m,n}^2 + 2 \sum \bar{\theta}_{0n}^2 \right] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{D}_k = \frac{1}{2} \sigma \pi^2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (a^2 m^2 + n^2)^2 \bar{\phi}_{m,n}^2 \\ \bar{D}_p = \frac{1}{2} \sigma \pi^2 \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (a^2 m^2 + n^2) \bar{\theta}_{m,n}^2 + 2 \sum_{n=1}^N n^2 \bar{\theta}_{0n}^2 \right] \end{cases} \quad (8)$$

及

$$\bar{F} = \frac{1}{2} \sigma \pi^2 a (R+1) \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \overline{m \phi_{m,n} \theta_{m,n}} \quad (9)$$

这里 T 是一个特征时间长度。在计算时,对于周期解,它可取做解的周期,对于准周期解,可取 $T = 1/\bar{f}$, 其中 $\bar{f}$ 为独立基频的平均值,对于混沌解则可取 $T = \int_0^\infty R(\tau) d\tau$, 它是表征混沌解平均时间尺度的一个量,其中 $R(\tau)$ 为解的时间相关函数。

根据 33 模系统的积分结果,我们对几个不同的 r 值,按公式 (7)–(9), 分别计算了它们在模态子集 $A(1,2)$ 、 $A(3,4)$ 和 $A' = A(5,6) - A(3,4)$ 上的值,以及它们在总模态集 $A(5,6)$ 中所占的份额(百分比)。这里 A' 表示从 14 模系统到 33 模系统新增加的模态所组的集合,显然它也是 $A(5,6)$ 的一个子集。由于计算量太大,我们没有计算与混沌解相应的结果, r 值的选取及其对应的解的性质见表 1

表 1

r	46.00	60.00	72.00	72.76	75.00
解的性质	定常解	定常解	定常解	周期解	三频率准周期解

需要指出的是,对于定常解和周期解,我们总有 $\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial E}{\partial t} dt = 0$ 。而对上面给出的准周期解,计算结果表明,亦有 $\left| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial E}{\partial t} dt \right| \ll |\bar{F}|$ (或 $\bar{D}$)。这说明表 1 中给出的解使得系统的总平均垂直热通量 $\bar{F}$ 和总平均耗散量 $\bar{D}$ 保持着或者近似地保持着平衡关系。

系统的平均动能 $\bar{E}_k$ 和平均热能 $\bar{E}_p$ 在上述几个模态子集上的分布列在表 2 中。从表中可以看到,就系统的平均动能而言,能量主要集中在长波模态子集 $A(1,2)$ 上,它所占的能量份额在 92% 以上。如果模态子集扩大到 $A(3,4)$ 上,则它几乎集中了系统的全部动能。从 14 模系统到 33 模系统所增加的那些模态 (A') 对总的平均动能的贡献可以略而不计。然而系统的平均热能则表现出另外一种分布形式,我们看到子集 $A(1,2)$ 所占有的能量份额并不占绝对优势,它只占了总平均热能的 3/4 左右,但是 $A(3,4)$ 与 A' 相比,能量主要集中在前者,两者之间仍然有数量级的差别。这说明从总能量的意义上而言,33 模 Lorenz 系统是原始方程的一个较好的近似谱模式。

表 2

r	$\bar{E}_k = \sum (u^2 m^2 + n^2) \bar{\psi}_{m,n}^2$					$\bar{E}_p = \sum \bar{\theta}_{m,n}^2 + 2 \sum \bar{\theta}_{m,n}$				
		$\sum_{A(1,2)}$	$\sum_{A(3,4)}$	$\sum_{A'}$	$\sum_{A(3,4)}$		$\sum_{A(1,2)}$	$\sum_{A(3,4)}$	$\sum_{A'}$	$\sum_{A(3,4)}$
46.00	$\bar{E}_k$	3072	3289	9.72	3299	$\bar{E}_p (\times 10^3)$	2066	2572	142.3	2714
	P(%)	93.1	99.7	0.3	100	P(%)	76.1	94.8	5.2	100
60.00	$\bar{E}_k$	4112	4419	17.08	4436	$\bar{E}_p$	3444	4315	275.4	4590
	P	92.7	99.6	0.4	100	P	75.1	94.0	6.0	100
72.00	$\bar{E}_k$	5011	5393	25.01	5418	$\bar{E}_p$	4901	6152	425.9	6578
	P	92.5	99.5	0.5	100	P	74.5	93.5	6.5	100
72.76	$\bar{E}_k$	5069	5450	24.90	5475	$\bar{E}_p$	5006	6291	489.7	6781
	P	92.6	99.6	0.4	100	P	73.8	92.8	7.2	100
75.00	$\bar{E}_k$	5412	5763	30.69	5794	$\bar{E}_p$	5304	6680	531.1	7211
	P	93.4	99.5	0.5	100	P	73.5	92.6	7.4	100

另外,我们还可以看到,随着参数 r 的增长,模态子集 A' 所占有的能量份额有缓慢增长的趋势,这表明有可能在大 r 值情况下,33 模系统的解的逼近程度会变坏。

系统的平均动能耗散 $\bar{D}_k$ 和平均热能耗散 $\bar{D}_p$ 的计算结果列在表 3 内,与表 2 比较可知,高波数模态子集 A' 对总耗散的贡献,远远大于它们对总能量的贡献。特别是平均热能耗散,它们已经占有了总热能耗散的 20%—30%,成为一个不可忽视的部份,这个结果说明,从 14 模系统到 33 模系统,定常解失稳和浑沌解发生的临界参数值之所以向高值方向推移,有可能就是由新增加的模态子集所产生的那部分耗散所引起的。这表明 A' 的耗散对运动的发展仍然起着重要的作用。同时也说明,从耗散的意义来说,33 模系统尽管在对原始方程的逼近程度上比 14 模系统有了改善,但依然是一个空间分辨能力不足的近似谱模式,并可预言,当截取的模态集合进一步扩大之后,导致定常解失稳和浑沌解发生的临界参数值将进一步向高 r 值方向改变。

另外,随着参数 r 的增长,与平均能量一样,子集 A' 中的模态所产生的耗散在总耗散

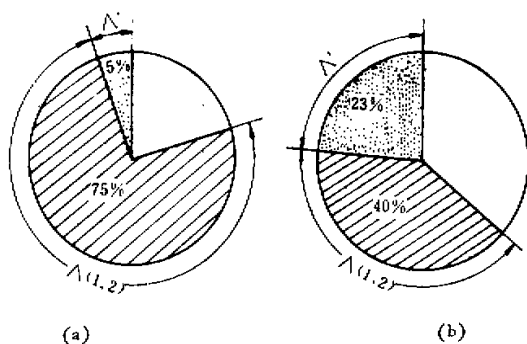


图 4 平均垂直热通量分布 (a) 和平均热能耗散分布 (b) 示意图

表 3

r	$\bar{D}_k = \sum (a^2 m^2 + n^2) \bar{\psi}_{m,n}^2$					$\bar{D}_p = \sum (a^2 m^2 + n^2) \bar{\theta}_{m,n}^2 + 2 \sum n^2 \bar{\theta}_{0,n}$				
		$\sum_{A(1,2)}$	$\sum_{A(3,4)}$	$\sum_{A'}$	$\sum_{A(5,6)}$		$\sum_{A(1,2)}$	$\sum_{A(3,4)}$	$\sum_{A'}$	$\sum_{A(5,6)}$
46.00	$\bar{D}_k$	4609	5840	137.8	5978	$\bar{D}_p (\times 10^2)$	7755	14151	4373	18524
	$P(\%)$	77.1	97.7	2.3	100	$P(\%)$	41.9	76.4	23.6	100
60.00	$\bar{D}_k$	6169	7918	247.2	8165	$\bar{D}_p$	13093	24472	8556	33028
	P	75.6	97.0	3.9	100	P	39.6	74.1	25.9	100
72.00	$\bar{D}_k$	7517	9712	365.0	10077	D_p	18777	35587	13363	48950
	P	74.6	96.4	3.6	100	P	38.4	72.7	27.3	100
72.76	$\bar{D}_k$	7603	9794	360.4	10154	D_p	19186	36515	15137	51652
	P	74.9	96.4	3.6	100	P	37.1	70.7	29.3	100
75.00	$\bar{D}_k$	8118	10177	451.5	10628	D_p	20329	39111	16649	55760
	P	76.4	95.8	4.2	100	P	36.4	70.1	29.9	100

表 4

r	$\bar{F} = \sum m \bar{\varphi}_{m,n} \bar{\theta}_{m,n}$				
		$\sum_{A(1,2)}$	$\sum_{A(3,4)}$	$\sum_{A'}$	$\sum_{A(5,6)}$
46.00	$\bar{F}$	6477	8266	189	8455
	$P(\%)$	76.0	97.8	2.2	100
60.00	$\bar{F}$	8645	11204	340	11544
	$P(\%)$	74.9	97.1	2.9	100
72.00	$\bar{F}$	10520	13742	527	14269
	$P(\%)$	73.7	96.3	3.7	100
72.76	$\bar{F}$	10638	13871	533	14404
	$P(\%)$	73.9	96.3	3.7	100
75.00	$\bar{F}$	10918	13922	632	14554
	$P(\%)$	75.0	95.7	4.3	100

中所占有的份额也在增加,这也表明,在大 r 值情况下求解方程,需要截取更多的模态。

系统的平均垂直热通量的计算结果列在表 4 中。由表可知,平均垂直热通量的百分比分布与表 3 中的动能耗散分布有着十分相似的形式。这说明,由浮力提供的平均垂直热通量与动能耗散在各个模态子集上保持着很好的平衡关系,也就是说低波数子集的波和高波数子集的波各自维持着自身的平均动能收支。但是同动能耗散分布相比,两者之间却有着显著的差异,从表 3、表 4 和图 4 可以看到,低波数子集 $A(1, 2)$ 的波提供了系统总平均垂直热通量的大部份,它们占了 75% 左右,但是它所耗散的热能却只占了平均热能耗散的 40% 左右。相反,在高波数子集 A' 中的波提供的平均垂直热通量不超过总量

的 5%, 而相应的热能耗散却占了 23% 以上, 最大可接近 30%。这表明短波的热能耗散“吃掉”了相当大一部份长波所输送的能量, 或者说, 短波的热能耗散要靠长波能量的补偿。

比较表 2——表 4 可知, 在子集 Λ' 上, 动能和动能耗散同热能和热能耗散相比, 后者在总量中所占的份额大得多, 这显然是由于 Prandtl 数取值 ($\sigma = 10$) 较大所致。另一方面, 热能同热能耗散相比, 后者又比前者大得多, 这与公式 (7) 和 (9) 中, 有关波数的系数因子较大有关。这表明, 在大 Prandtl 数的情况下, 高波数谱模分量的热能耗散对判别解的逼近程度的好坏有更重要的指示意义。

四、结 论

根据以上的计算和分析结果, 可以得到如下几点结论:

1. 在高维 Lorenz 系统中, 扰动在不同波分量之间的传播是通过非线性过程实现的。这个过程可以用图 3 所示的串激过程来表示。它所表现出的传播次序, 不仅有助于构造高维系统, 而且直观地表明了在不同维数的相空间中运动行为的不变性, 即在低维相空间中运动的性质在扩充后的高维相空间中依然保持着。

2. 在 Marcus 提出的判别逼近好坏的标准下, 相对于原始对流方程而言, 33 模系统仍然是一个空间分辨率不足的截谱模式。

3. 控制参数 r 不仅影响着系统的运动状态, 而且也影响着截谱模式的解对原始方程解的收敛过程。对同样的空间分辨率 M 和 N , 当 r 增大时, 系统中高波数模态对总能量输送和总耗散的贡献也随之增加, 这表明解的逼近程度在变坏。

4. 就上面所讨论的几个 33 模系统的解而言, 高波数模态子集较好的维持着自身的动能收支平衡; 而对热能耗散则需要吸收长波输送的能量来补偿自己的消耗, 从而维持整个系统的平衡。

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., 1963, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141.
- [2] Sparrow, C., The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos, and Strange attractors.
- [3] Curry, J. H., 1978, Generalized Lorenz System. *Commun. Math. Phys.*, **60**, 193—204.
- [4] Curry, J. H., Herring, J. R., Loncarci, J., and Orszag, S. A., 1984, Order and disorder in two-and three-dimensional Bénard Convection. *J. Fluid Mech.*, **147**, 1—38.
- [5] Gollub, J. P., and Benson, S. V., 1980, Many routes to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, **100**, 443—470.
- [6] Marcus, P. S., 1981, Effects of truncation in model representations of thermal convection. *J. Fluid Mech.*, **103**, 241—255.

SOME GROSS FEATURES OF 33-MODE LORENZ SYSTEM

Yang Peicai

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the structures of the high-dimensional truncated model on the two dimensional B'enard convective equations are analysed briefly by means of the mode array, and the averaged energy, dissipation and vertical heat flux of the 33-mode Lorenz system are calculated. According to the distributions of the above gross characteristics on some mode subsets, the approximation of the solutions of 33-mode Lorenz system to the full convective equations is also discussed.