

大气湍流的间歇性——Lyapunov 特征指数和分数维的应用

邵庆秋* 陈家宜 刘式达

(北京大学地球物理系)

提 要

大气湍流是间歇性的,具有浑沌的特征。正的特征指数和分数维可以定量表征湍流的间歇性。

Lyapunov 特征指数随参数的变化可以定量表征非线性系统状态的演变。分数维 D 的大小可以表征间歇性, D 愈小,湍流的间歇性愈强。

由于间歇性,均匀湍流的结构函数定律、能谱定律等均要订正。对相对扩散,间歇性的影响很大。

一、引 言

湍流的间歇性质 1949 年首先由 Batchelor 作了研究。后来 Obukhov (1962), Kolmogorov (1962), Monin 和 Yaglom (1971)^[1] 进一步进行讨论,并且论证对于高雷诺数的大气,其湍流是间歇的。同时流体力学近十年来的实验也发现包括间歇现象在内的相干结构 (Coherent structure)。

自从 Lorenz (1963)^[2] 发现确定性的非周期流以来,浑沌 (chaos) 概念愈来愈广泛地用于研究湍流。湍流和浑沌一样都具有敏感初条件的特性,即初始条件稍有变化,最终导致轨道的指数分离。而量度这一特性的量就是正的 Lyapunov 特征指数。唯独浑沌运动该特征指数为正,而其它吸引子 (稳定平衡点,周期和拟周期吸引子) 的特征指数均小于或等于零^[3]。

浑沌的另一量度就是 Mandelbrot^[4] 提出的分数维,即湍流的维数不是整数而是分数 D 。 D 和 Lyapunov 特征指数之间存在一定的关系。

Mandelbrot^[4] 和 Frisch^[5] 把分数维 D 应用到间歇湍流模型中,此时均匀湍流的“结构函数 $2/3$ 方定律”、“能谱的 $-5/3$ 方定律”要订正为

$$D(r) \propto r^{\frac{2}{3} + \frac{a}{3}}, \quad E(k) \propto k^{-\frac{2}{3} - \frac{a}{3}} \quad (1)$$

1986 年 1 月 31 日收到修改稿。

* 现为中国科学院大气物理研究所研究生。

其中

$$\mu = 3 - D \quad (2)$$

称为间歇指数。

Mori^[6] 提出, 由于间歇性, 相对扩散的“湍流扩散系数 K 的 Richardson 4/3 方定律”也要订正为

$$K = \frac{d\sigma^2}{dt} \propto \sigma^{2-\alpha} \quad (3)$$

其中

$$\alpha = \frac{2}{3} (1 - \mu) \quad (4)$$

显然, 在 (1) 式和 (3) 式中若 $D = 3$, 即 $\mu = 0$, 那么就化为均匀湍流的相应规律。 σ 为扩散方差。

本文向大家介绍对研究大气湍流和扩散很有意义的两个新指标——Lyapunov 特征指数和分数维, 并用我们提出的浑沌模型^[7] 定量计算了这两个指标。

二、Lyapunov 特征指数和分数维

浑沌的特征是敏感初条件, 它的量度就是正的 Lyapunov 特征指数 LE 。

设 n 维相空间中, 由初条件 $\vec{x}(0)$ 确定出一条轨线 $\vec{x}(t)$ 。若初条件有一偏差 $\vec{w}(0)$ 即初条件变为 $\vec{x}(0) + \vec{w}(0)$, 那么 t 时刻以后轨线 $\vec{x}(t)$ 就偏离 $\vec{w}(t)$, 则 LE 就定义为

$$\|\vec{w}(t)\| = e^{(LE)t} \cdot \|\vec{w}(0)\| \quad (5)$$

或

$$LE = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\vec{w}(t)\|}{\|\vec{w}(0)\|} \quad (6)$$

其中符号 $\|\cdot\|$ 代表向量的模。若 $\vec{w}$ 的基为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, 那么对 $\vec{w}$ 在基底的每个分量均可按 (6) 式计算 LE , 这样就有 n 个 Lyapunov 特征指数, 按大小排列, 有

$$LE_1 \geq LE_2 \geq LE_3 \geq \dots \geq LE_n \quad (7)$$

例如三维空间中常见的四种运动形态, 即稳定平衡态、极限环(周期态)、二维环面(拟周期态)、浑沌, 它们的三个 Lyapunov 特征指数 LE_1, LE_2, LE_3 分别列在图 1 中。

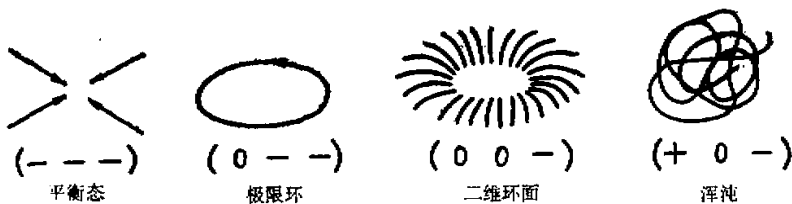


图 1 四种运动形态分别对应的 Lyapunov 特征指数

从图 1 看出, 只有浑沌形态的 $LE_1 > 0$, 其它运动形态 LE_1 均 ≤ 0 。

前面我们度量了初条件“长度”的偏离。显然, 若相空间中初始面积的偏离为 $A(0)$, 则 t 时刻以后面积偏离 $A(t)$ 就为

$$A(t) = A(0)e^{(LE_1 + LE_2)t} \quad (8)$$

一般对 k 维多面体体积 $V_k(t)$ 有

$$V_k(t) = V_k(0)e^{\left(\sum_{i=1}^k LE_i\right)t} \quad (9)$$

这样 k 个 Lyapunov 特征指数之和为

$$\sum_{i=1}^k LE_i = \frac{1}{t} \ln \frac{V_k(t)}{V_k(0)} \quad (10)$$

浑沌运动又是不规则的, 它的维数应是分数 D 。规则几何中的点、线、面、体, 它们的维数分别为 0, 1, 2, 3。例如对于单位长度的线段和边长为单位长的正方形, 若用 $s = \frac{1}{10}$ 的线段和边长为 $s = \frac{1}{10}$ 的小正方形分别去覆盖它们, 则量得数目分别为 $N = \left(\frac{1}{s}\right)^1 = 10$ 和 $N = \left(\frac{1}{s}\right)^2 = 100$, 这里的指数 1 和 2 就定义为维数 D , 即

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{s}\right)} \quad (11)$$

将定义 (11) 推广用于不规则的几何图象, D 就可能是分数。例如在边长为 1 的正三角形上添加长度为 $\frac{1}{3}$ 的小三角形而形成的 Koch 雪花^[6] (见图 2), 若用 $s = \frac{1}{3}$ 的边去量得出 $N = 6$, 故按 (11) 式算出

$$D = \frac{\ln 4}{\ln \left(1/\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619 \quad (12)$$

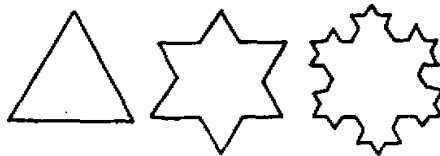


图 2 Koch 雪花

像图 2 那种不规则图形, 却有很好的自相似结构, 即比例尺缩小, 但其结构和原来相似。所以 s 也可以叫自相似比或收缩比。

据 Kaplan 和 Yarle^[9] 分析, D 和 LE 的关系为

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j LE_i}{|LE_{j+1}|} \quad (13)$$

其中 j 为使 $\sum_{i=1}^j LE_i > 0$ 的最大整数。例如对三维耗散系统中的混沌有 $LE_1 > 0$, $LE_2 = 0$, $LE_3 < 0$, 故有

$$D = 2 + \frac{LE_1}{LE_3} \quad (14)$$

三、 LE 和 D 的计算例子

现在已经论证, 像 Navier-Stokes 方程描述的湍流, 可以用有限维动力系统来描述。现在还没有完善的湍流模型, 为了说明 LE 和 D 的计算, 我们用加大阻尼以后的 Lorenz 系统^[7]

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\sigma + s)x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (15)$$

来说明。其中 σ 是 Prandtl 数取为 0.7, b 取 8/3。我们在出现混沌的临界曲线(见图 3)

$$r_c = \frac{(\sigma + s)^2(\sigma + b + 3 + s)}{\sigma(\sigma + s - b - 1)} \quad (16)$$

的上部取不同的 s 值和 r 值, 对 (15) 采用 Runge-Kutta 法计算出混沌的时间序列 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$, 按 Shimada 建议的方法沿轨线算出 LE_1 , LE_2 和 LE_3 。

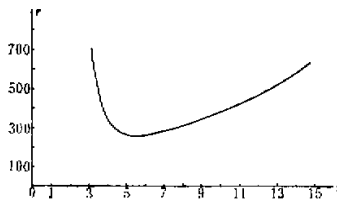


图 3 系统 (15) 出现混沌的临界曲线

又因为系统 (15) 是耗散系统, $LE_1 + LE_2 + LE_3$ 由 (10) 式应为体积的变化率

$$\begin{aligned} LE_1 + LE_2 + LE_3 &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div} \vec{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ &= -(\sigma + s + b + 1) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 是相空间中的速度向量。这样算出的 LE_1 , LE_2 , LE_3 用 (17) 式加以检验, 并用 (14) 式算出分数维 D 。

四、 LE 随 r 的演变显示湍流的发生

我们取 $s = 10$ 和 $s = 13.5$ 两种情况, 对不同的 r 值算出的 LE (单位是 bit/s) 和 D 值见表 1 和表 2。

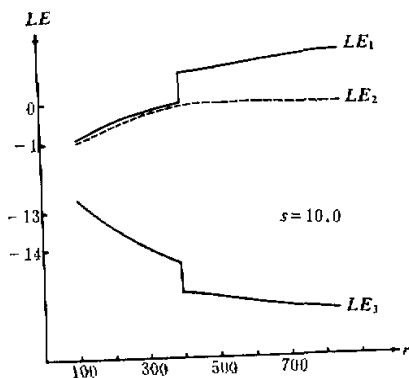
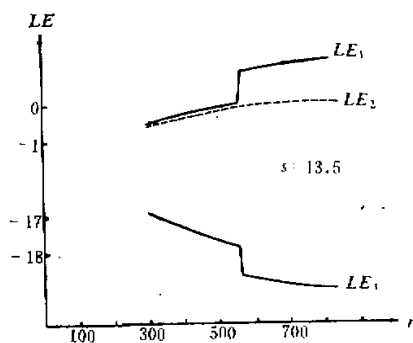
表 1 $s = 10$

r	100	200	300	350	400	500	550	600	650	700	800
LE_1	-0.83	-0.45	-0.17	-0.06	0.84	1.01	1.07	1.13	1.21	1.25	1.35
LE_2	-0.84	-0.46	-0.18	-0.07	0	0	0	0	0	0	0
LE_3	-12.71	-13.46	-14.02	-14.24	-15.21	-15.38	-15.44	-15.50	-15.57	-15.62	-15.72
D	0	0	0	0	2.06	2.07	2.07	2.07	2.07	2.07	2.07

表 2 $s = 13.5$

r	300	400	500	550	600	650	700	800
LE_1	-0.46	-0.25	-0.65	0.91	0.96	1.02	1.07	1.55
LE_2	-0.46	-0.25	-0.75	0	0	0	0	0
LE_3	-16.95	-17.36	-17.73	-18.77	-18.82	-18.89	-18.93	-19.02
D	0	0	0	0	2.05	2.05	2.06	2.06

从这两组数据作出 LE 随 r 变化的曲线见图 4 和图 5。

图 4 $s = 10.0$ 时 LE 随参数 r 的变化图 5 $s = 13.5$ 时 LE 随参数 r 的变化

从图 4 和图 5 看出, 对 $s = 10$ 和 $s = 13.5$, r 大约分别在 $r_c = 382$ 和 $r_c = 545$, LE_1 由负变到正进入混沌区。这两个临界值和图 3 中的临界曲线上的 r 值很接近。

所以 LE_1 的演变反映系统状态的演变, 这是判断非线性动力系统多样化形态的有力工具。

五、 D 的大小和湍流的间歇性

我们^[7]将系统 (15) 的湍流形态 $x(t)$, 按照间歇性的程度不同分为三种类型: 纯粹混沌、间歇混沌和介于前两者之间的短暂层流状态。对这三种状态和均匀湍流 ($LE_1 = |LE_3|$) 计算出的分数维 D 见表 3。

从表 3 看出, D 值愈小表示湍流的间歇性愈强。 D 值愈大, 表示湍流愈强, 湍流结构

表 3

	均匀充分发展湍流	纯粹浑沌 $s=6, r=500$	短暂层流 $s=10, r=500$	间歇浑沌 $s=13.5, r=650$
D	3	2.09	2.07	2.05

愈均匀。

而且从(1)和(3)看出,间歇性愈强, D 值愈小,对均匀湍流的订正愈大,特别对相对扩散的订正更大。

以上计算 LE 和 D 是从模型(15)计算的。现在已经可以用测到的湍流数据(例如风速资料)来计算 $LE^{[9]}$ 。这对于研究大气湍流的间歇性更有实际意义。

参 考 文 献

- [1] Monin, A. S., Yaglom, A. M., 1971, Statistical fluid mechanics, Vol. 1 and 2, Cambridge MA: MIT Press.
- [2] Lorenz, E. N., 1963, Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 20, 130—140.
- [3] Haken, H., 1984, Advanced Synergetics, Springer Press.
- [4] Mandelbrot, B. B., 1977, The fractal geometry of nature, San Francisco, Freeman.
- [5] Frish, V. J., 1978, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 87, 719—736.
- [6] Mori, H., 1984, Chaos and statistical methods, Springer Press.
- [7] 刘式达, 1986, 内波动力学中的浑沌和大气湍流的发生, 中国科学(B), 第5期, 542—550.
- [8] Kaplan, J. L., Yorke, J. A., 1979, Lecture notes in Math, 730, Springer Press.
- [9] Wolf, A., 1984, Statistical Physics and Chaos in fusion Plasmas, New York: Wiley, Ed. by C. W. Horton, Jr. and L. E. Reichl.

THE INTERMITTENCY OF ATMOSPHERIC TURBULENCE —APPLICATION OF LYAPUNOV EXPONENTS AND FRACTAL DIMENSION

Shao Qingqiu Chen Jiayi Liu Shida

(Department of Geophysics, Beijing University)

Abstract

The atmospheric turbulence is highly non-uniform and intermittent. The characteristics of chaos are that positive characteristic exponents and fractional dimension can quantitatively express the turbulent intermittency.

The variation of Lyapunov exponents with parameters can quantify the development of the state of nonlinear system. The value of fractional dimension D indicates the degree of intermittency and the smaller the value of D , the stronger the turbulent intermittency.

The structure function law and the energy spectrum law in homogeneous turbulence should be modified owing to the intermittency. The intermittency also has powerful effects on the relative diffusion.