关于三维平衡模式初边值问题适定性的研究*

穆 穆　曾庆存
(LASG, 中国科学院大气物理研究所)

提　　要

本文进一步考察三维平衡模式初边值问题的适定性. 文中解决了"ω-方程"边值问题的适定性,给出了解的解析表达式,并建立了一种加权先验估计. 以此为基础,本文证明了: 考虑无穷远处大气时,三维平衡模式存在唯一的关于时间 t 的局部古典解. 本文的结果推广了文献[2]的工作.

一、引　　言

文献[2]研究了三维平衡模式初边值问题的适定性,但仅仅考察了某一有限高度以下的大气运动. 若考察整个大气层的运动状况,模式中的"ω-方程"为一类退缩椭圆型方程. 本文仔细研究了该类方程,给出了解析解的具体表达式,建立了近似解序列与解析解的误差估计式并严格证明了其收敛性. 作者相信,这类解析表达式,在理论研究与数值模拟中是有用处的. 然后,文中给出了该类退缩椭圆边值问题的一种加权先验估计,运用这种估计,可以严格证明当气压 $p\to 0$ 时,ω 与 p 的比值 $\frac{\omega}{p}\to 0$, 即 ω 场趋于零的速度远远超过了气压场 p. 最后,将这种加权估计与文献[2]的迭代程序相结合, 用压缩映象原理证明了对时间尺度而言三维平衡模式局部古典解的存在唯一性.

二、模　　式

从文献[1]中 (1.25)、(1.26)、(1.27)、(1.30) 与 (1.31) 式出发,对水平运动方程施行涡度运算. 在准地转-准无辐散近似下,略去小项, 大气的大尺度运动在等压面坐标系下并忽略地形影响可用下述方程组描述:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{1}{a}J(\psi,\zeta)+J(\psi,f)+\nabla\chi\cdot\nabla f-af\dfrac{\partial\omega}{\partial p}=0 & (2.1)\\ \nabla^2\Phi-a\nabla f\cdot\nabla\psi-af\nabla^2\psi=0 & (2.2)\end{cases}$$

1987 年 8 月 14 日收到, 10 月 8 日收到修改稿.
* 中国科学院青年奖励研究基金资助项目.

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\nabla^2\chi + a\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0 && (2.3)\\
&\tilde{c}^2\nabla^2\omega + a^2p^2f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} + \frac{1}{a}p^2J\left(\nabla^2\psi,\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\\
&\quad + p^2\sum_{i=1}^{6}T_i(\psi)S_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right) - p^2fJ\left(\frac{\partial\psi}{\partial p},\nabla^2\psi\right)\\
&\quad + p^2J(\psi,f)\frac{\partial}{\partial p}\nabla^2\psi - ap^2fJ\left(\frac{\partial\psi}{\partial p},f\right) = 0 && (2.4)\\
&\nabla^2\psi = \zeta && (2.5)\\
&\psi|_{t=0} = \psi_0 \qquad \omega|_{p=p_0} = 0 && (2.6)
\end{aligned}
\right.
$$

这里

$$J(F,G) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial G}{\partial\lambda} - \frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right) \qquad \nabla F\cdot\nabla G = \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial G}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{\partial G}{\partial\lambda}$$

$$\nabla^2F = \Delta F = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2F}{\partial\lambda^2}\right)$$

(λ, θ, p, t) 分别为经度、余纬度、气压及时间. ψ, χ, Φ, ω 分别是流函数、速度位势、位势高度与垂直速度. $f = 2\Omega\cos\theta$, a 为地球半径, $\tilde{c}^2 = \frac{R^2T(\gamma_a-\gamma)}{g}$ 取为常数(参见文献 [1] P.24), $f_0 = 2\Omega\ \cos\theta_0$ 为某一合适的科氏参数（常数）, p_0 表示地表面. T_i、$S_i(i=1,\cdots,6)$ 是单位球面 S^2 上系数光滑的二阶线性偏微分算子,对任何连续可微函数 F、G, 满足恒等式:

$$\nabla^2J(F,G) \equiv J(\nabla^2F,G) + J(F,\nabla^2G) + \sum_{i=1}^{6}T_i(F)S_i(G)$$

这里有必要简述一下“ω- 方程”(2.4)的推导. 将热力学方程写成

$$p^2\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \frac{1}{a}J\left(\psi,\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right] + \tilde{c}^2\omega = 0 \tag{2.7}$$

计算 ∇^2 [(2.7)式]$-p^2\frac{\partial}{\partial p}$ [$f\cdot$(2.1)式];然后利用(2.2)式以 ψ 表示 $\Delta\Phi$, 略去由于(2.1)式中第四项与(2.2)式中第二项所引出的小项. 在 $\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}$ 的系数中, 取 $f^2\approx f_0^2$, 即得方程(2.4).

注意到 $p=0$ 时, 方程(2.4)中项 $\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}$ 的系数为零,所以“ω-方程”为一类退缩椭圆型方程. 用文献[1]的办法,作自变数变换 $\xi = -\ln\frac{p}{p_0}$, 则问题(2.1)—(2.6)化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{1}{a}J(\psi,\zeta)+J(\psi,f)+\nabla\chi\cdot\nabla f+\dfrac{af}{p_0}e^{\xi}\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}=0 & (2.8)\\
\nabla^2\Phi-a\nabla f\cdot\nabla\psi-af\nabla^2\psi=0 & (2.9)\\
\nabla^2\chi-\dfrac{a}{p_0}e^{\xi}\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}=0 & (2.10)\\
\hat{c}^2\nabla^2\omega+a^2f_0^2\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+a^2f_0^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}=e^{-\xi}F(\psi,\Phi) & (2.11)\\
\nabla^2\psi=\zeta & (2.12)\\
\psi|_{t=0}=\psi_0\qquad \omega|_{\xi=0}=0 & (2.13)
\end{cases}
$$

而求解区域为 $(\lambda,\theta,\xi,t)\in S^2\times[0,+\infty)\times(0,+\infty)$. 这里

$$
\begin{aligned}
F(\psi,\Phi)=(p_0/a)\cdot J\left(\nabla^2\psi,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+p_0\sum_{i=1}^{6}T_i(\psi)S_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)\\
-p_0fJ\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\ \nabla^2\psi\right)-ap_0fJ\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi},f\right)\\
+p_0J(\psi,f)\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi
\end{aligned}
$$

作了上述自变数变换后，方程(2.8)与(2.10)中的项 $\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}$ 的系数为无界量 e^{ξ} (当$\xi\to+\infty$ 时). 欲用文献[2]中建立先验估计的办法证明问题 (2.8)—(2.13) 的适定性，必须对“ω-方程”(2.11)作仔细的研究，这是下节的主要任务.

三、 关于“ω-方程”的研究

本节将用按球函数展开的办法，给出方程(2.11)在边界条件 $\omega|_{\xi=0}=0$ 的情况下解析解的表达式(视 ψ, Φ 为已知函数)，然后建立一种加权先验估计，为下节证明适定性作好准备.

首先引进若干函数空间的定义. 记 $M=S^2\times[0,+\infty)$, $R_+=(0,+\infty)$. 若 u 在 R_+ 中平方可积，则记 $u\in L_2(R_+)$，其范数记为 $\|u\|_{L_2(R_+)}$. 依惯例[4]定义 Sobolev 空间 $H_k(S^2)$、$H_k(M)$，其范数分别记为 $\|\cdot\|_{H^k(S^2)}$、$\|\cdot\|_{H_k(M)}$. 依文献 [5] 定义 Hörmander 空间 $H_{k,r}(M)$，它是 $C_c^\infty(M)$ 中函数在范数

$$
\|u\|^2_{H_{k,r}(M)}=\int_0^\infty\sum_{j=0}^{K}\|D_\xi^ju(\lambda,\theta,\xi)\|^2_{H_{k+r-j}(S^2)}d\xi
$$

之下的完备化空间. 对任何 $u\in C_c^\infty(M\times[0,T])$，定义

$$
\|u(t)\|_{C^0([0,T];H_{k,r}(M))}=\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H_{k,r}(M)} \qquad (*)
$$

$$
\|u(t)\|_{C^1([0,T];H_{k,r}(M))}=\sup_{0\le t\le T}\left(\|u(t)\|_{H_{k,r}(M)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_{H_{k,r}(M)}\right) \qquad (**)
$$

用 $C^0([0,T];H_{k,r}(M))$、$C^1([0,T];H_{k,r}(M))$分别记 $C_c^\infty(M\times[0,T])$ 中函数在范数

(*)、(**)下的完备化空间.

我们约定：若对 $\forall(\xi, t)\in[0, +\infty)\times[0, T]$，成立

$$\int_{S^2}\varphi(\lambda, \theta, \xi, t)ds = 0$$

则称函数 φ 具性质 (N).

首先建立一个引理.

引理 3.1 设 $f\in L_2(R_+)$，常数 P、Q 满足 $Q<0<P$，$g\in(-\infty, \infty)$，这时存在唯一的 $u\in H^2(R_+)$，满足 $\left\{\left(\frac{d}{d\xi}-P\right)\left(\frac{d}{d\xi}-Q\right)u = f，在 R_+ 中；u|_{\xi=0}=g\right\}$，且成立先验估计

$$\|u\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{1}{|PQ|}\|f\|_{L_2(R_+)}+\frac{1}{\sqrt{2|Q|}}|g| \tag{3.1}$$

$$\left\|\frac{du}{d\xi}\right\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{2}{|P|}\|f\|+\sqrt{\frac{|Q|}{2}}|g| \tag{3.2}$$

$$\left\|\frac{d^2u}{d\xi^2}\right\|_{L_2(R_+)}\leqslant 2\left(1+\left|\frac{Q}{P}\right|\right)\|f\|_{L_2(R_+)}+\sqrt{\frac{|Q|^3}{2}}|g| \tag{3.3}$$

[证明] 先解常微分方程定解问题

$$\left(\frac{d}{d\xi}-P\right)v = f，在\ R_+\ 中；\ v\in L_2(R_+).$$

易见该问题有唯一解 $v(\xi) = -\int_\xi^\infty f(s)e^{P(\xi-s)}ds$. 因 $f\in L_2(R_+)$，不难验证 $v\in H(R_+)$，且成立估计式

$$\|v\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{1}{P}\|f\|_{L_2}\qquad\left\|\frac{dv}{d\xi}\right\|_{L_2(R_+)}\leqslant 2\|f\|_{L_2(R_+)} \tag{3.4}$$

再解常微分方程定解问题 $\left\{\left(\frac{d}{d\xi}-Q\right)u = v，在\ R_+\ 中；\ u|_{\xi=0}=g\right\}$，得 $u(\xi) = ge^{Q\xi}+\int_0^\xi v(s)e^{Q(\xi-s)}ds$. 易证明成立估计式

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_2(R_+)}&\leqslant\frac{1}{|Q|}\|v\|_{L_2(R_+)}+\frac{1}{\sqrt{2|Q|}}|g|\\ \left\|\frac{du}{d\xi}\right\|_{L_2(R_+)}&\leqslant 2\|v\|_{L_2(R_+)}+\sqrt{\frac{|Q|}{2}}|g|\end{aligned} \tag{3.5}$$

综上，即知

$$u(\xi) = ge^{Q\xi}-\int_0^\xi\int_s^\infty f(\tau)e^{P(s-\tau)}e^{Q(\xi-s)}d\tau ds \tag{3.6}$$

满足定解问题及估计式(3.1)—(3.3).

定理 3.2 设常数 $\alpha>0$，$\beta<2$，$f\in L_2(M)$ 具性质 (N)，这时存在唯一的具性质 (N) 的 $u\in H^2(M)$，满足

$$\begin{cases}\Delta u+\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-(\alpha^2+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\beta u=f & \text{在}M\text{中} \quad (3.7)\\ u|_{\xi=0}=0 & (3.8)\end{cases}$$

且成立先验估计式

$$\|u\|_{H^2(M)}\leqslant c\|f\|_{L_2(M)} \tag{3.9}$$

这里常数 c 与 u、f 无关.

[证明] 将具体构造出解 u. 记 φ_k^l 是标准化的球函数,即满足下述条件的函数

$$-\nabla^2\varphi_k^l=\lambda_k\varphi_k^l,\ k=0,1,2,\cdots;\ l=0,\pm1,\cdots,\pm k.\ \text{在 } S^2 \text{ 上.}$$

$$\int_{S^2}\varphi_i^l\varphi_j^m ds=\begin{cases}1, & i=j,\ l=m\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

而 $\lambda_k=k(k+1)$.

再记 $f_k^l(\xi)=\int_{S^2}f(\lambda,\theta,\xi)\varphi_k^l(\lambda,\theta)ds$. 解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_k^l}{d\xi^2}-\dfrac{\alpha^2+\beta}{\alpha^2}\dfrac{du_k^l}{d\xi}+\dfrac{\beta-\lambda_k}{\alpha^2}u_k^l=\dfrac{f_k^l}{\alpha^2} & \text{在 }(0,+\infty)\text{ 中} \quad (3.10)\\ u_k^l|_{\xi=0}=0 & k=1,2,\cdots;\ l=0,\pm1,\cdots,\pm k. \quad (3.11)\\ u_k^l(\xi)\in H^2(R_+) & (3.12)\end{cases}$$

可以将(3.10)式写成

$$\left(\frac{d}{d\xi}-p_k\right)\left(\frac{d}{d\xi}-q_k\right)u_k^l=\frac{f_k^l}{\alpha^2}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}p_k&=\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha^2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha^2}\right)^2+\frac{\lambda_k-\beta}{\alpha^2}}>0\\ q_k&=\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha^2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha^2}\right)^2+\frac{\lambda_k-\beta}{\alpha^2}}<0\end{aligned}\right\}\quad k=1,2,\cdots$$

利用引理 3.1,可知(3.10)—(3.12)存在唯一解

$$u_k^l(\xi)=-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\xi\int_s^\infty f_k^l(\tau)e^{p_k(s-\tau)+q_k(\xi-s)}d\tau ds$$

定义函数 $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=-k}^{k}u_k^l(\xi)\varphi_k^l$. 下面将证明 u 即为所求之解.

由引理 3.1 可知下列估计式成立

$$\|u_k^l\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{1}{|\beta-\lambda_k|}\|f_k^l\|_{L_2(R_+)}$$

$$\left\|\frac{du_k^l}{d\xi}\right\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{2}{\alpha^2p_k}\|f_k^l\|_{L_2(R_+)}\qquad\left\|\frac{d^2u_k^l}{d\xi^2}\right\|_{L_2(R_+)}\leqslant\frac{2}{\alpha^2}\left(1+\left|\frac{q_k}{p_k}\right|\right)\|f_k^l\|_{L_2(R_+)}$$

因而

$$\|u\|_{L_2(M)}^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\|u_k^l\varphi_k^l\|_{L_2(M)}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\|u_k^l\|_{L_2(R_+)}^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \frac{1}{|\beta-\lambda_k|^2} \|f_k^l\|^2_{L_2(R_+)} \leqslant \frac{1}{(\beta-2)^2} \|f\|^2_{L_2(M)} \tag{3.13}$$

$$\left\|\frac{du}{d\xi}\right\|^2_{L_2(M)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \frac{4}{\alpha^4 p_k^2} \|f_k^l\|^2_{L_2(R_+)} \leqslant \frac{4}{\alpha^4 p_1^2} \|f\|^2_{L_2(M)} \tag{3.14}$$

$$\left\|\frac{d^2u}{d\xi^2}\right\|^2_{L_2(M)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \left\|\frac{d^2u_k^l}{d\xi^2}\right\|^2_{L_2(R_+)} \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \frac{4}{\alpha^4}\left(1+\left|\frac{q_k}{p_k}\right|\right)^2 \|f_k^l\|^2_{L_2(R_+)} \leqslant \frac{16}{\alpha^4} \|f\|^2_{L_2(M)} \tag{3.15}$$

容易验证函数 u 在广义函数意义下满足方程(3.7). 利用 (3.7)、(3.13)—(3.15) 知 $\Delta u \in L_2(M)$, 因而 $u \in H^2(M)$. 由嵌入定理[4]知 $u \in C^0([0, \infty); H^1(S^2))$. 故

$$u(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} u_k^l(0)\varphi_k^l = 0,$$

即 u 亦满足边界条件(3.8). 综上,我们已经证明了 $u \in H^2(M)$, 因而 u 是(3.7)、(3.8)式的广义解(参见文献[1]). 唯一性由估计式 (3.13) 可见. 因为 u 满足方程 (3.7), 有 $\|\Delta u\|_{L_2(M)} \leqslant c\|f\|_{L_2(M)}$. 再结合(3.13)—(3.15)式,知(3.9)式成立.

分析定理 3.2 的证明过程,可知近似解 $\tilde{u}_N = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=-k}^{k} u_k^l \varphi_k^l$ 在 $H^2(M)$ 中收敛于 u. 其误差可按下法进行估计:

$$\|\tilde{u}_N - u\|^2_{H^2(M)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \|\varphi_k^l u_k^l\|^2_{H^2(M)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \Big(\|u_k^l \varphi_k^l\|^2_{L_2(M)} +$$

$$\left\|\frac{d^2u_k^l}{d\xi^2} \varphi_k^l\right\|^2_{L_2(M)} + \|\lambda_k u_k^l \varphi_k^l\|^2_{L_2(M)} \Big)$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \left[(1+\lambda_k^2)\frac{1}{|\beta-\lambda_k|^2} + \frac{4}{\alpha^4 p_k^2} + \frac{4}{\alpha^4}\left(1+\left|\frac{q_k}{p_k}\right|\right)^2\right] \|f_k^l\|^2_{L_2(R_+)}$$

容易验证

$$\frac{(1+\lambda_k^2)}{|\beta-\lambda_k|^2} \leqslant \begin{cases} \dfrac{5}{(2-\beta)^2} & \text{当 } 0 \leqslant \beta < 2 \text{ 时} \\ 5/4 & \text{当 } \beta < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\frac{4}{\alpha^4 p_k^2} \leqslant \frac{1}{(2-\beta)\alpha^2} \qquad \frac{4}{\alpha^4}\left(1+\left|\frac{q_k}{p_k}\right|\right)^2 \leqslant \frac{16}{\alpha^4}$$

若记 $s(\beta) = \begin{cases} 5/(2-\beta)^2 & 0 \leqslant \beta < 2 \\ 5/4 & \beta < 0 \end{cases}$

则得误差估计式:

$$\|\tilde{u}_N - u\|^2_{H^2(M)} \leqslant \left[s(\beta) + \frac{1}{(2-\beta)\alpha^2} + \frac{16}{\alpha^4}\right] \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \|f_k^l\|^2_{L_2(R_+)} \tag{3.16}$$

利用椭圆型方程边值问题的正则性定理(参见文献[5]),由定理 3.2 立得:

推论 3.3　在定理 3.2 的条件下再设 $f\in H^{k,r}(M)$（$k\geqslant 0$，$r\geqslant 0$ 皆为整数），这时解 $u\in H^{k+2,r}(M)$，且成立先验估计式

$$\|u\|_{H^{k+2,r}(M)}\leqslant c\|f\|_{H^{k,r}(M)}$$

这里常数 c 与 u、f 无关.

下一定理说明定理 3.2 中的条件"f 具性质 (N)"是不能去掉的.

定理 3.4　设 $\beta=0$，这时存在不具有性质 (N) 的 $f\in L_2(M)$，使得问题(3.7)、(3.8) 对于这一 f 不存在解 $u\in H^2(M)$.

[证明]　取 $f=(1+\xi)^{-\frac{2}{3}}$，易见 $f\in L_2(M)$，但 f 不具性质 (N). 设存在 $u\in H^2(M)$ 满足(3.7)、(3.8). 考察

$$u_k^l(\xi)=\int_{S^2}u(\lambda,\theta,\xi)\varphi_k^l(\lambda,\theta)ds\qquad(k=0,1,2,\cdots;\ l=0,\pm1,\cdots,\pm k),$$

易见 $k\neq 0$ 时，u_k^l 满足常微分方程定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_k^l}{d\xi^2}-\dfrac{du_k^l}{d\xi}-\dfrac{\lambda_k}{\alpha^2}u_k^l=0 & \text{在 } R_+ \text{ 中}\\ u_k^l\in H^2(R_+)\\ u_k^l|_{\xi=0}=0\end{cases}$$

再利用引理 3.2，知 $u_k^l=0$ ($k=1,2,\cdots$; $l=0,\pm1,\cdots,\pm k$). 另一方面，函数 $u_0^0(\xi)\in H^2(R_+)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_0^0}{d\xi^2}-\dfrac{du_0^0}{d\xi}=\dfrac{f}{\alpha^2} & \text{在 } R_+ \text{ 中}\\ u_0^0|_{\xi=0}=0\end{cases}$$

记 $v_0=\left(\dfrac{d}{d\xi}-1\right)u_0^0$，则 $v_0\in H^1(R_+)$ 且 $\dfrac{dv_0}{d\xi}=(1+\xi)^{-\frac{2}{3}}/\alpha^2$. 易解出

$$v_0=\frac{1}{\alpha^2}\left[c+3(\xi+1)^{\frac{1}{3}}\right],$$

而 c 为待定常数. 但不论取 c 为何值，均不能使 $v_0\in L_2(R_+)$，这与 $v_0\in H^1(R_+)$ 矛盾. 这说明问题(3.7)、(3.8)不可能存在解 $u\in H^2(M)$.

下面给出"ω-方程"解的加权估计.

定理 3.5　设 $\phi\in H^{k-2,r+2}(M)$，$\Phi\in H^{k-2,r+2}(M)$（整数 $k\geqslant 5$，$r\geqslant 0$），这时定解问题

$$\begin{cases}\tilde{c}^2\nabla^2\omega+a^2f_0^2\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+a^2f_0^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi}=e^{-\xi}F(\phi,\Phi) & \text{在} M \text{中} \quad (3.17)\\ \omega|_{\xi=0}=0 & (3.18)\end{cases}$$

存在唯一具性质 (N) 的解 ω 使 $e^{\xi}\omega\in H^{k-1,r}(M)$，且成立加权先验估计

$$\|e^{\xi}\omega\|_{H^{k-1,r}(M)}\leqslant c(\|\phi\|_{H^{k-2,r+2}(M)}+1)\|\Phi\|_{H^{k-2,r+2}(M)}\tag{3.19}$$

[证明]　将上述定解问题改写成：

$$\begin{cases}\nabla^2(\omega e^{\xi})+\dfrac{a^2f_0^2}{\tilde{c}^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\omega e^{\xi})-\dfrac{a^2f_0^2}{\tilde{c}^2}\dfrac{\partial}{\partial\xi}(\omega e^{\xi})=\dfrac{1}{\tilde{c}^2}F(\phi,\Phi) & \text{在} M \text{中}\\ (\omega e^{\xi})|_{\xi=0}=0\end{cases}$$

首先说明 $F(\psi,\Phi)$ 具性质 (N). 因为对任何连续可微函数 P、Q，成立恒等式

$$\int_{S^2} J(P,Q)ds=0,\quad \int_{S^2}\nabla^2 P ds=0,\quad \int_{S^2} PJ(P,Q)ds=0,$$

故只须验证$\left[J(\psi,f)\dfrac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi-fJ\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi},\nabla^2\psi\right)\right]$具性质 (N)，但我们有

$$\int_{S^2}\left[J(\psi,f)\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi-fJ\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\nabla^2\psi\right)\right]ds$$

$$=\int_{S^2}\left[J(\psi,f)\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi+\nabla^2\psi\cdot J\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi},f\right)\right]ds$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{S^2}J(\psi,f)\nabla^2\psi ds=\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{S^2}\left(2\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\nabla^2\psi\right)ds$$

利用分部积分公式，易见 $\int_{S^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\nabla^2\psi ds\equiv 0$，故 $F(\psi,\Phi)$ 具性质 (N).

易验证当 $k\geqslant 5$, $r\geqslant 0$ 时，空间 $H^{k-3,r}(M)$ 为一代数，因而 $F(\psi,\Phi)\in H^{k-3,r}(M)$. 在定理 3.2 中，取 $\alpha^2=\dfrac{a^2f_0^2}{\tilde{c}^2}$, $\beta=0$，再利用推论 3.3，即得所证.

利用定理 3.2，可以写出“ω-方程”解的解析表达式. 记

$$F_{\psi,\Phi,k,l}(\xi)=\frac{1}{\tilde{c}^2}\int_{S^2}F(\psi,\Phi)\varphi_k^l(\lambda,\theta)ds\quad(k=1,2,\cdots;\ l=0,\pm1,\cdots,\pm k).$$

因为 $\alpha^2=\dfrac{a^2f_0^2}{\tilde{c}^2}$, $\beta=0$，可知

$$p_k=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{k(k+1)\tilde{c}^2}{a^2f_0^2}}\qquad q_k=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{k(k+1)\tilde{c}^2}{a^2f_0^2}}$$

因而(3.17)、(3.18)之解为

$$\omega=e^{-\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\left[-\frac{\tilde{c}^2}{a^2f_0^2}\int_0^{\xi}\int_s^{\infty}F_{\psi,\Phi,k,l}(\tau)e^{p_k(s-\tau)+q_k(\xi-s)}d\tau ds\right]\varphi_k^l(\lambda,\theta)$$

记

$$\tilde{\omega}_N=-e^{-\xi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=-k}^{k}\frac{\tilde{c}^2}{a^2f_0^2}\int_0^{\xi}\int_s^{\infty}F_{\psi,\Phi,k,l}(\tau)e^{p_k(s-\tau)+q_k(\xi-s)}d\tau ds\varphi_k^l(\lambda,\theta)$$

则误差为(参见(3.16)式)

$$\|e^{\xi}(\omega-\tilde{\omega}_N)\|_{H^2(M)}\leqslant\left[\frac{5}{4}+\frac{2\tilde{c}^2}{a^2f_0^2}+\frac{16\tilde{c}^4}{a^4f_0^4}\right]\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\|F_{\psi,\Phi,k,l}(\xi)\|^2_{L_2(R_+)}$$

应用(3.19)式，可知 $\|e^{\xi}\omega\|_{H^2(M)}$ 为有界量(仅与 ψ、Φ 有关). 由空间 $H^2(M)$ 的定义可知

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{\xi}^{\infty}\sum_{j=0}^{2}\|D_{\xi}^{j}(e^{\xi}\omega)\|^2_{H^{2-j}(S^2)}d\tau=0$$

另一方面，由迹定理(参见文献[5])可知

$$\max_{(\lambda,\theta)\in S^2}|e^{\xi}\omega(\lambda,\theta,\xi)|\leqslant c\|e^{\xi}\omega(\lambda,\theta,\xi)\|_{H^{3/2}(S^2)}$$

$$\leqslant c\int_{\xi}^{\infty}\sum_{j=0}^{2}\|D_{\xi}^{j}(e^{\xi}\omega)\|_{H^{2-j}(S^2)}^{2}d\tau$$

这里 c 是与 ω、ψ、Φ、ξ 皆无关的常数，因而

$$\lim_{\xi\to\infty}\max_{(\lambda,\theta)\in S^2}|e^{\xi}\omega(\lambda,\theta,\xi)|=0$$

亦即

$$\lim_{p\to 0}\max_{(\lambda,\theta)\in S^2}\left|\frac{p_0}{p}\omega(\lambda,\theta,p)\right|=0 \tag{3.20}$$

公式(3.20)说明 ω 场趋于零的速度较气压场 p 更为迅速. 这一特征已早被人们所认识，作者则在这里给出了严格的证明.

四、局部古典解的存在唯一性

利用文献[2]的迭代格式，可以证明问题(2.8)—(2.13)存在局部古典解. 这里仅指出应注意的几点，具体作法可参见文献[2]，故从略.

第一，在文献[2]第二节的第二步中，使用定理 3.5 代替经典的椭圆型方程解的存在性定理，并用加权先验估计式(3.19)代替文献[2]中的估计式(2.4).

第二，为了证明类似于文献[2]中(2.9)式的先验估计，必须利用(3.19)式，以克服方程(2.8)、(2.10)中出现无界量 e^{ξ} 所引起的困难.

第三，现在 $M=S^2\times[0,+\infty)$ 为无界区域. 若如同文献[2]构造函数集合 $\bar{s}_{t_0}$，则不易验证 $\bar{s}_{t_0}$ 是 $C^0([0,t_0];H^{k-3,r+2}(M))$ 中的紧凸集，故不能由 Schauder 不动点定理得出解的存在性. 这里可作如下修改：(i) 仍如同文献[2]构造函数集合 s_{t_0}，(ii) 取 t_0 充分小，利用所得到的先验估计构造一个从 s_{t_0} 到 s_{t_0} 的映射 L，然后证明 L 是一个压缩算子，由压缩映象原理即得到不动点的存在性.

综上，可将本文主要结果叙述如下：

定理　设 $\psi_0\in H^{k-2,r+2}(M)$，整数 $k\geqslant 7$，$r\geqslant 1$，ψ_0 具性质 (N). 这时，存在只与 $\|\psi_0\|_{H^{k-2,r+2}(M)}$ 有关的 $t_0>0$，使初边值问题(2.8)—(2.13)在 $M\times(0,t_0)$ 中存在唯一古典解 $(\psi,\Phi,\chi,\omega,\zeta)$，且 ψ、Φ、χ 具性质 (N). 此外，

$$\psi,\Phi,\chi\in C^0([0,t_0];H_{k-3,r+2}(M))\cap C^1([0,t_0];H_{k-3,r+1}(M))$$

$$\omega\in C^0([0,t_0];H_{k-2,r}(M))\cap C^1([0,t_0];H_{k-2,r-1}(M))$$

$$\zeta\in C^0([0,t_0];H_{k-3,r}(M))\cap C^1([0,t_0];H_{k-3,r-1}(M))$$

参　考　文　献

[1] 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社.

[2] 穆　穆，1987，数值天气预报中三维平衡模式的古典解，科学通报，Vol. 32, No.7, p. 533—536.

[3] Riphagen, H. A., 1983, Numerical weather prediction, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Tools and case Studes (Ed. D. P. Laurie). Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, p. 246—285.

[4] Adams, R. A., 1975, Sobolev Spaces, Academic Press, New York.

[5] Hörmander, L., 1963. Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag.