

稳定大气中烟流抬升高度的确定

李 小 凡

(上海台风研究所)

提 要

本文通过 Boussinesq 近似的非线性动力方程组, 得到了烟流抬升高度的解析表达式, 讨论了地形、大气稳定度等物理因子对烟流抬升高度的影响。结果表明: 地形的分布对烟流抬升高度的确定有一定影响, 大气稳定度对高度的影响尤为明显。本文还讨论了理论公式的实用条件。

一、引 言

从烟囱等排出的废气和烟是城市中大气污染物的主要来源之一, 由于当废气和烟排出烟囱时, 其温度一般比周围空气的温度要高, 因此, 具有初始动量向高空抬升和扩散, 这个问题已经引起环境科学工作者的注意。由于大气是污染扩散的主要媒介物, 因而气象条件(包括风速、地形、大气稳定度等)对污染物抬升和扩散影响很大。对于烟流抬升这个问题早在 1954 年 Batchelor^[1] 就讨论了中性层结环境中的层流性烟流, 他通过一定的假定下寻找一定形式的相似性解, 证明了层流烟流的空间分布为一抛物面; 以后 Morton 等人^[2,3] 讨论了层流烟流和受迫烟流的特征, 并通过数值积分, 得到了水平范围垂直速度和浮力随高度的变化。Briggs^[4], Frizzola^[5] 等还把观测到的烟流行为和各種经验与理论公式计算的结果进行广泛的比较。但是, 对影响烟流抬升高度的各种物理因子讨论更详细些是有必要的。本文通过 Boussinesq 近似的非线性动力方程组讨论了地形和大气静力稳定参数对烟流抬升高度确定的影响。

二、烟流控制方程组及其无因次化

热分层大气中烟流的特征是由 Boussinesq 近似简化过的动力方程支配的^[6], 这里仅考虑 $x-z$ 剖面上的情形, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \nabla^2 w + \frac{T - T_0}{T_0} g \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

这里 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\gamma = \mu/\rho_0$, $\kappa = k/\rho_0 c_p$; $\frac{T-T_0}{T_0} g$ 这一项是由于烟流温度高于周围环境温度引起的浮力项。

由于考虑稳态烟流问题, 并且 $u = \bar{u} + u'$, 得:

$$\bar{u}u_x + uu_x + ww_x + \frac{1}{\rho_0} P_x = \gamma \nabla^2 u \quad (5)$$

$$\bar{u}w_x + uw_x + ww_x + \frac{1}{\rho_0} P_z = \gamma \nabla^2 w + \sigma \quad (6)$$

$$\bar{u}\sigma_x + u\sigma_x + w\sigma_z + \Gamma w = \kappa \nabla^2 \sigma \quad (7)$$

其中: $\sigma = \frac{T-T_0}{T_0} g$, Γ 为大气静力稳定因子。

(4) 式成立使我们可引入流函数 ψ :

$$\begin{aligned} u &= -\bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w &= \bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (8)$$

同时, 为以后讨论问题方便, 引入下列无因次量, 下标 * 为有因次量:

$$\begin{aligned} x_* &= bx, & u_* &= \sqrt{\Gamma} h u, \\ z_* &= \bar{u} \sqrt{\Gamma}^{-1} z, & w_* &= \bar{u} h b^{-1} w, \\ \psi_* &= h \psi, & p_* &= \rho_0 \bar{u} \sqrt{\Gamma} h p, \\ \sigma_* &= \Gamma h \sigma \end{aligned} \quad (9)$$

这里 b 和 h 分别为地形的特征水平长度和垂直高度。

把 (9) 代入 (5) — (7) 表达式, 得到关于烟流的无因次控制方程组:

$$u_* - \mu J(\psi, \psi_z) + p_x = \gamma^* \left(u_{xx} + \frac{1}{\delta^2} u_{zz} \right) \quad (10)$$

$$w_x + \mu J(\psi, \psi_x) + \frac{1}{\delta^2} p_z = \gamma^* \left(w_{xx} + \frac{1}{\delta^2} w_{zz} \right) + \frac{1}{\delta^2} \sigma \quad (11)$$

$$\sigma_x + \mu J(\psi, \sigma) + \psi_x = \kappa^* \left(\sigma_{xx} + \frac{1}{\delta^2} \sigma_{zz} \right) \quad (12)$$

上述变量下标均为微分符号, 其中, $\gamma^* = \gamma / \bar{u} b$, $\kappa^* = \kappa / \bar{u} b$, $\delta = \bar{u} / \sqrt{\Gamma} b$ 是静

力平衡偏差的量度, $\mu = \sqrt{\Gamma} h / \bar{u}$ 为逆 Froude 数, $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}$ 。

对于我们考虑的问题, 典型情形下的各种特征值为

$$\sqrt{\Gamma} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad \bar{u} = 5 \text{ m s}^{-1},$$

$$b = 10^4 \text{ m}, \quad \delta^2 = \frac{1}{100} \ll 1$$

这样, 最终整理得到简化的烟流抬升的无因次动力方程组:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + p) = \mu J(\psi, \psi_z) + \gamma^* \left(u_{xx} + \frac{1}{\delta^2} u_{zz} \right) \quad (13)$$

$$P_z = \sigma + \gamma^* w_{zz} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma + \psi) = -\mu J(\psi, \sigma) + \kappa^* \left(\sigma_{xx} + \frac{1}{\delta^2} \sigma_{zz} \right) \quad (15)$$

同时, 边条件为:

$$\psi(x, \mu\psi_B) = \psi_B(x) \quad (16)$$

上式为地形边条件, 见图 1.

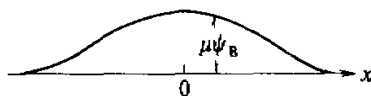


图 1 地形示意图

$$w w_z \Big|_{z=\mu\psi_B} = \frac{\Sigma b}{\delta h} \sigma \Big|_{z=\mu\psi_B} \quad (17)$$

上式假定在地表上垂直动能通量和浮力成正比, Σ 为比例因子.

三、不考虑扩散的烟流抬升高度的确定

首先不考虑扩散对烟流抬升的作用, 那么 $\gamma^* = \kappa^* = 0$, 这时, 烟流无因次控制方程组为

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + p) = \mu J(\psi, \psi_z) \quad (18)$$

$$P_z = \sigma \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma + \psi) = -\mu J(\psi, \sigma) \quad (20)$$

在一定假设下, (18) 式可写成积分形式:

$$p - \psi_z = \mu \int_{-\infty}^x J(\psi, \psi_z) dx' \quad (21)$$

若和 (19) 联立, 消去 p , 得

$$\sigma = \psi_{zz} + \mu \int_{-\infty}^x J(\psi, \psi_{zz}) dx' \quad (22)$$

定义下列积分算子

$$\hat{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} J(\psi, \psi_{zz}) dx' \quad (23)$$

则(22)式形式上写成

$$\sigma = (1 + \mu \hat{I}) \psi_{zz} \quad (24)$$

同样, (20)式可变为

$$(1 + \mu \hat{I}) \sigma = -\psi \quad (25)$$

合并(24)和(25)得到关于 ψ 的方程为

$$(1 + \mu \hat{I})^2 \psi_{zz} = -\psi \quad (26)$$

这样, 形式上(26)又可写成

$$\psi_{zz} = -\frac{1}{(1 + \mu \hat{I})^2} \psi \quad (27)$$

假定 μ 足够小, (27)式作级数展开, 并注意到积分算子 $\hat{I} \psi = \hat{I}^2 \psi = \dots = 0$. 这样得:

$$\psi_{zz} + \psi = 0 \quad (28)$$

联系地形边条件, 解为

$$\psi = \psi_B(x) \cos(z - \mu \psi_B) + B(x) \sin(z - \mu \psi_B) \quad (29)$$

其中 $B(x)$ 由另一个边条件(17)决定.

由于我们这里是讨论烟流抬升高度问题, 因此, 不具体讨论解的表达. 这时, 相对于地形的烟流抬升高度 $(z - \mu \psi_B)$ 为

$$\left. \begin{aligned} z - \mu \psi_B &= \arctg \left[\frac{\delta h}{\Sigma b} (\ln \psi_B)_x \psi_{B,x} \right] + n\pi \\ &\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; x \neq 0 \\ z - \mu \psi_B &= -\arctg \left[\frac{\delta h}{\Sigma b} \psi_{B,xx} \right] + n\pi \\ &\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

上述(30)式第一式是 $x \neq 0$, 即普通情形; 而第二式是山顶附近的情形. 上述表明了, 在无扩散条件下, 相对于地形的烟流抬升高度的确定是由地形的形状分布、大气静力稳定度参数等大气物理因子所决定的. (30)式仅适用于稳定情形.

考虑地形具有下列水平分布:

$$\psi_{B(x)} = 1/(1+x^2) \quad (31)$$

上述水平分布表明地形相对于 $x=0$ 对称, 并且在 $x=0$ 处最高, 见图1. 这样, 得到相对于地形的烟流抬升高度的水平分布和在确定点上随静力稳定参数的分布.

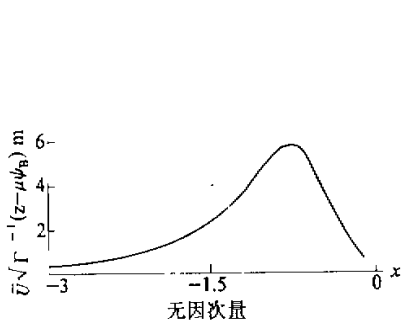


图 2 相对于地形 $(z-\mu\psi_B)$ 的烟流抬升高度的水平分布

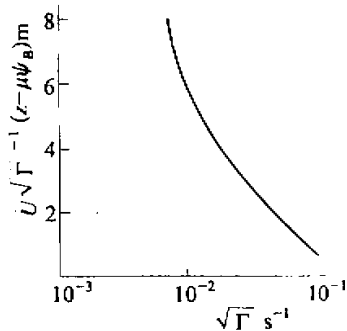


图 3 相对于地形 $(z-\mu\psi_B)$ 烟流抬升高度在确定点 $x_0=0.7$ 处随静力稳定参数 $\sqrt{\Gamma}$ 的分布

图 2 表明在 $x=0.7$ 处, 烟流抬升高度相对最高, 然后向外慢慢减低, 不过, 最高和最低相对烟流抬升高度之差仅几米, 但由于地形的存在, 当加入地形后的高度 z 分布明显地受地形分布的影响. 在这条曲线之下, 烟流向两边伸展. 实际上, 烟流在初始的动量和在有地形条件下水平风速造成垂直运动分量影响下向上扩展, 但由于大气稳定度和水平风速的影响, 在某一高度抑制而造成烟流的水平伸展. 当然, 我们引入的对称地形得到了迎风坡和背风坡呈对称的结果, 这和实况有差别的, 因为观测中发现迎风坡和背风坡的抬升高度分布并不对称.

在山顶附近, 计算结果表明抬升高度在 20 m 左右, 比迎风坡抬升高度稍大些.

图 3 表明了相对于地形的烟流抬升高度在确定点 $x_0=0.7$ 处随大气静力稳定度 $\sqrt{\Gamma}$ 的分布. 图中反映了稳定度越低, 抬升高度越高, 稳定度高而抬升高度减低的趋势. 这种分布是具有实际意义的, 这反映了大气稳定度对抬升高度的影响是符合实际的. 因为稳定度越低, 湍流发展越明显, 这样烟流的抬升高度就高; 相反, 稳定度高, 大气中的湍流发展被抑制, 这样烟流的抬升高度就低.

表 1 烟云抬升计算表 *

风速 (m s^{-1})	烧油烟囱的抬升	烧煤烟囱的抬升
	南 风	南 风
	ΔH (m)	ΔH (m)
2	5.5	4.9
3	4.1	3.6
5	2.8	2.5
6	2.4	2.2

* 上海市气象科学研究所, 上海市闸北电厂大气环境质量现状评价报告.

图 2 中风速为 5 m/s, 和表 1 的结果相比较, 在迎风坡低段的结果两者较吻合, 因为这时实际观测也在地形较平坦的郊区, 而迎风坡低段的地形影响也不大, 而当在迎风坡高段时, 理论结果高于实际观测, 实际上, 由于地形的存在, 在迎风坡高段的地形将水平风转为垂直上升气流, 抬升高度相对高些. 综合上述讨论, 本理论公式的

适用条件为：稳定大气中的迎风坡，环境风速适中。

四、考虑弱扩散情形下污染物连续点源的烟流抬升高度的确定

考虑下列扩散情形，方程写成

$$P_z = v^* w_{zz} + \sigma \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u+p) = \mu J(\psi, \psi_z) + \gamma^* \left(u_{xx} + \frac{1}{\delta^2} u_{zz} \right) \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma + \psi) = -\mu J(\psi, \psi_z) + \kappa^* \left(\sigma_{xx} + \frac{1}{\delta^2} \sigma_{zz} \right) \quad (34)$$

引入下列积分算子：

$$\hat{A} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2} \int_{-x}^x \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\quad) dx' \quad (35)$$

这样，(33) 和 (34) 可写成

$$p = (1 + \mu \hat{I}) \psi_z - \gamma^* \hat{A} \psi_z \quad (36)$$

$$\psi = -(1 + \mu \hat{I}) \sigma + \kappa^* \hat{A} \sigma \quad (37)$$

在弱扩散假定下，(32)，(36)，(37) 联立方程可简化为

$$\psi_{zz} = - \left[\psi + \gamma^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\kappa^* + \gamma^*) \hat{A} \psi \right] \quad (38)$$

设 ψ 可表为：

$$\psi(x, z) = A(x) B(z) \quad (39)$$

代入(38)并作处理，则

$$\frac{B_{zz}}{B} = - \frac{(z\gamma^* + \kappa^*) A_{xx} + A_x}{A_x + \frac{(\gamma^* + \kappa^*)}{\delta^2} A} = -\alpha^2 \quad (40)$$

这样， $B(z)$ 的表达式为

$$B(z) = C_1 \cos \alpha(z - \mu \psi_B) + C_2 \sin \alpha(z - \mu \psi_B) \quad (41)$$

而 $A(x)$ 的表达式为

$$A(x) = C_1^* e^{r_1 x} + C_2^* e^{r_2 x} \quad (42)$$

其中

$$r_{1,2} = \frac{-(1-\alpha^2) \pm \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4(2\gamma^* + \kappa^*)\alpha^2(\gamma^* + \kappa^*)/\delta^2}}{2(2\gamma^* + \kappa^*)} \quad (43)$$

考虑点源烟流抬升，边条件为

$$WW_z|_{z=\mu\psi_B, x=x_0} = \frac{\sum b}{\delta h} \sigma|_{z=\mu\psi_B, x=x_0} \quad (44)$$

x_0 为点源在 x 轴的确定处，因此， c_1, c_2, c_1^*, c_2^* 的关系为

$$\frac{C_1^*}{C_2^*} = \frac{\overline{\psi_B(x)}^{r_1} - \overline{\psi_B(x)}^{r_2} R_{12}}{\overline{\psi_B(x)}^{r_2} - \overline{\psi_B(x)}^{r_1} R_{12}} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 \text{这里, } \overline{\psi_B(x)^{r_1}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_B(x) e^{-r_1 x} dx \\
 \overline{\psi_B(x)^{r_2}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_B(x) e^{-r_2 x} dx \\
 R_{12} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(r_1-r_2)x} dx \\
 R_{12}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(r_1-r_2)x} dx \\
 \frac{C_1}{C_2} &= \frac{-\delta h \alpha (\overline{\psi_B(x)^{r_2}} - \overline{\psi_B(x)^{r_1}} R_{12}^*) \left(\frac{c_1^*}{c_2^*} r_1 e^{r_1 x_0} + r_2 e^{r_2 x_0} \right)^2}{\Sigma b (1 - R_{12}^* R_{12}) \left(\frac{c_1^*}{c_2^*} e^{r_1 x_0} + e^{r_2 x_0} \right)} \quad (46)
 \end{aligned}$$

这样, 点源烟流抬升相对高度 $(z - \mu \psi_B)$ 为:

$$z - \mu \psi_B = \frac{1}{\alpha} \left[-\arctg \left(\frac{c_1}{c_2} \right) + n\pi \right] \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (47)$$

同样考虑地形 $\psi_B(x)$ 为

$$\psi_B(x) = 1/(1+x^2) \quad (48)$$

取 α 为 500 时, 在确定点上的烟流抬升高度大约是在 3 m 左右, 这也是和实际观测中的烟流抬升高度量级是符合的。

同样, 计算中发现, 在弱扩散存在情况下, 污染点源在空间的位置不影响烟流抬升相对高度, 这是和不考虑扩散的情况不同的。实际上, 由于扩散的存在, 使得在一个不大的空间中达到同样的高度。

上述讨论, 反映了在稳定大气中烟流抬升相对高度受到风速、地形和扩散的影响, 尤其是受到静力稳定度变化的影响值得注意, 这就说明, 在对大气污染的可能影响作出估计时, 必须考虑局地的大气静力稳定参数变化。至于理论公式的实用性, 有待于实际工作中作进一步考证。

参 考 文 献

- [1] Batchelor, G. K., 1954, Heat Convection and Buoyancy Effects in Fluids, *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, 80, 339-346.
- [2] Morton, B. R., G. I. Taylor and J. S. Turner, 1956, Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 234 pp.
- [3] Morton, B. R., 1959, Forced Flumes, *J. Fluid Mech.*, 5, 151-158.
- [4] Briggs, G. A., 1969, *Plume Rise*, U. S. Atomic Energy Commission, Washington, D. C., 406 pp.
- [5] J. H. 塞恩非尔德, 1986, 空气污染——物理和化学基础, 科学出版社, 314-328.