变分原理与大气波动的Lagrange函数

刘式适 赵 卫

（北京大学地球物理系、LASG，中国科学院大气物理研究所）

提 要

本文从大气波动所满足的方程出发，应用变分原理求得了各种大气线性波动的 Lagrange 函数和平均 Lagrange 函数．应用平均 Lagrange 函数可以求得大气波动的频散关系、平均能量、波作用量和波作用量方程．

本文还分析了 Lagrange 函数与大气波能量间的关系，分析指出：Lagrange 函数是物理量 φ 及其导数的二次式．对大气基本波动而言，非频散波的 Lagrange 函数是动能与位能（弹性位能或重力位能）之差、频散波的 Lagrange 函数是动能与恢复力的位能（有效位能、惯性位能或 Rossby 位能）之差．

关键词：变分原理；Lagrange 函数；波作用量．

一、引 言

Whitham[1-3]（1965，1967，1968）最早把变分原理应用到连续介质中，并且相继求得了 Klein-Gordon 方程、水波方程、涡度方程和 KdV 方程的 Lagrange 函数．后来（1970，1972），他[4-5]引进了波作用量（wave action）或波作用密度（wave action density），并把它与平均Lagrange 函数建立了联系，导出了波作用量方程．使波动理论大大推进了一步．

然而，Whitham 多少有点回避了 Lagrange 函数的力学意义或能量意义，他认为在最简单的情况下，Lagrange 函数才与分析力学的 Lagrange 函数有一致的意义，即动能与势能之差．

Buchwatd[6]（1972）分析了涡度方程中的 Lagrange 函数的力学意义，伍荣生[7]（1986）对 Rossby 波的能量与 Lagrange 函数作了进一步的论述．我们[8-9]（1985、1987）也分析了波作用量的守恒性及其与稳定性的关系．

本文按变分原理求得了大气各种波动的 Lagrange 函数，并用较为简洁的方法论述了 Lagrange 函数的能量意义，指出：大气基本波动的 Lagrange 函数就是动能与广义位能（弹性位能、惯性位能、有效位能和 Rossby 位能）之差．

二、变分原理及波动的 Lagrange 函数

由变分原理可知，在任意区域 R 上函数 $\varphi(x,y,z,t)$ 的泛函

1987年7月9日收到，11月21日收到修改稿．

$$J[\varphi]=\iiiint_R L(\varphi,\varphi_t,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)\delta x\delta y\delta z\delta t \tag{1}$$

的极值问题

$$\delta J=0, \tag{2}$$

与下列 Euler 方程

$$L_\varphi-\frac{\partial L_{\varphi_t}}{\partial t}-\frac{\partial L_{\varphi_x}}{\partial x}-\frac{\partial L_{\varphi_y}}{\partial y}-\frac{\partial L_{\varphi_z}}{\partial z}=0 \tag{3}$$

的求解等价．

在(1)式中的$L(\varphi,\varphi_t,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$称为Lagrange 函数，其中

$$\varphi_t\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \varphi_x\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_y\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \varphi_z\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{4}$$

在(3)式中，L_φ，L_{φ_t}，L_{φ_x}，L_{φ_y}，L_{φ_z} 分别为Lagrange 函数 L 对 φ，φ_t，φ_x，φ_y，φ_z 的偏导数，即

$$L_\varphi\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi},\ L_{\varphi_t}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_t},\ L_{\varphi_x}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_x},\ L_{\varphi_y}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_y},\ L_{\varphi_z}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_z}. \tag{5}$$

若L 中包含 φ 的高阶导数，如包含

$$\varphi_{tt}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ \varphi_{xt}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t},\ \varphi_{yt}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t},\ \varphi_{zt}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}, \tag{6}$$

则泛函(1)推广为

$$J[\varphi]=\iiiint_R L(\varphi,\varphi_t,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z,\varphi_{tt},\varphi_{xt},\varphi_{yt},\varphi_{zt},\cdots)\delta x\delta y\delta z\delta t, \tag{7}$$

相应，Euler 方程(3)推广为

$$L_\varphi-\frac{\partial L_{\varphi_t}}{\partial t}-\frac{\partial L_{\varphi_x}}{\partial x}-\frac{\partial L_{\varphi_y}}{\partial y}-\frac{\partial L_{\varphi_z}}{\partial z}+\frac{\partial^2L_{\varphi_{tt}}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2L_{\varphi_{xt}}}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2L_{\varphi_{yt}}}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2L_{\varphi_{zt}}}{\partial z\partial t}+\cdots=0, \tag{8}$$

其中

$$L_{\varphi_{tt}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{tt}},\ L_{\varphi_{xt}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{xt}},\ L_{\varphi_{yt}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{yt}},\ L_{\varphi_{zt}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{zt}},\ \cdots. \tag{9}$$

对波动而言，Euler 方程(3)或(8)就是波动方程．这样，根据某种波动的波动方程即可确定该波动的 Lagrange 函数.

为了求得波动沿一个周期平均的 Lagrange 函数，我们引入缓变波列

$$\varphi=a\cos(\theta+\alpha), \tag{10}$$

其中a 是振幅，α 为初位相，

$$\theta=kx+ly+nz-\omega t \tag{11}$$

为位相函数．这里 k，l，n 分别为在 x，y，z 方向上的波数，ω 为圆频率．

由(11)式我们得到缓变波列的下列运动学关系：

$$k=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\theta_x,\ l=\frac{\partial\theta}{\partial y}=\theta_y,\ n=\frac{\partial\theta}{\partial z}=\theta_z,\ \omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\theta_t \tag{12}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial t}=-\dfrac{\partial \omega}{\partial x}, & \dfrac{\partial l}{\partial t}=-\dfrac{\partial \omega}{\partial y}, & \dfrac{\partial n}{\partial t}=-\dfrac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial k}{\partial y}=\dfrac{\partial l}{\partial x}, & \dfrac{\partial k}{\partial z}=\dfrac{\partial n}{\partial x}, & \dfrac{\partial l}{\partial z}=\dfrac{\partial n}{\partial y}. \end{cases} \tag{13}$$

将(10)式代入波动的 Lagrange 函数，并在一个周期内求平均，即求得波动的平均 Lagrange 函数 $\mathscr{L}(\omega, \vec{K}, a)$，它通常是圆频率 ω、振幅 a 和波矢 $\vec{K}(k, l, n)$ 的函数.

类似(1)式，我们可以定义缓变波列的振幅 $a(x, y, z, t)$ 和位相 $\theta(x, y, z, t)$ 的泛函

$$\mathscr{I}[a, \theta]=\iiiint_R \mathscr{L}(-\theta_t, \theta_x, \theta_y, \theta_z, a)dxdydzdt. \tag{14}$$

其极值问题

$$\delta\mathscr{I}=0. \tag{15}$$

与下列两个方程

$$\mathscr{L}_a=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\theta_t}}{\partial t}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\theta_x}}{\partial x}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\theta_y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathscr{L}_{\theta_z}}{\partial z}=0 \tag{17}$$

的求解等价.

在上两式中，$\mathscr{L}_a$，$\mathscr{L}_{\theta_t}$，$\mathscr{L}_{\theta_x}$，$\mathscr{L}_{\theta_y}$，$\mathscr{L}_{\theta_z}$ 分别为平均Lagrange函数 $\mathscr{L}$ 对 a，θ_t，θ_x，θ_y，θ_z 的偏导数，即

$$\mathscr{L}_a\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a}, \quad \mathscr{L}_{\theta_t}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_t}, \quad \mathscr{L}_{\theta_x}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_x}, \quad \mathscr{L}_{\theta_y}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_y}, \quad \mathscr{L}_{\theta_z}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_z}. \tag{18}$$

利用(12)式，方程(17)可改写为

$$\frac{\partial \mathscr{L}_\omega}{\partial t}-\frac{\partial \mathscr{L}_k}{\partial x}-\frac{\partial \mathscr{L}_l}{\partial y}-\frac{\partial \mathscr{L}_n}{\partial z}=0. \tag{19}$$

方程(16)给出了波参数 θ，$\vec{K}$，a 之间的函数关系，它就是波的频散关系，后面我们将通过具体例子来说明．同样，后面我们会看到，在线性波动中，Lagrange 函数 L 应是 φ 及其导数的二次式．这样，平均 Lagrange 函数可以写为下列形式：

$$\mathscr{L}(\omega, \vec{K}, a)=G(\omega, \vec{K})a^2, \tag{20}$$

将(20)式代入方程(16)，得到

$$G(\omega, \vec{K})=0. \tag{21}$$

这就是波动的频散关系.

(20)式代入方程(19)，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(G_\omega a^2)-\left[\frac{\partial}{\partial x}(G_k a^2)+\frac{\partial}{\partial y}(G_l a^2)+\frac{\partial}{\partial z}(G_n a^2)\right]=0, \tag{22}$$

其中

$$G_\omega\equiv\frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad G_k\equiv\frac{\partial G}{\partial k}, \quad G_l\equiv\frac{\partial G}{\partial l}, \quad G_n\equiv\frac{\partial G}{\partial n}. \tag{23}$$

(21)式是波频散关系的隐式表示，由此可以确定 ω 是 $\vec{K}$ 的函数

$$\omega=\Omega(\vec{K}), \tag{24}$$

这样，(21)式可以写为

$$G(\Omega(\vec{K}),\ \vec{K})=0\ , \tag{25}$$

因而，利用复合函数的求导法则，由上式求得

$$\begin{cases} G_\omega \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}+G_k=0\ , \\ G_\omega \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}+G_l=0\ , \\ G_\omega \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}+G_n=0\ . \end{cases} \tag{26}$$

由此求得缓变波列的群速度 $\vec{c}_g$ 分量为

$$\begin{cases} c_{gx}\equiv \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}=-\dfrac{G_k}{G_\omega}\ , \\ c_{gy}\equiv \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}=-\dfrac{G_l}{G_\omega}\ , \\ c_{gz}\equiv \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}=-\dfrac{G_n}{G_\omega}\ . \end{cases} \tag{27}$$

若令

$$g(\vec{K})\equiv G_\omega\ , \tag{28}$$

则方程(22)可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}[\,g(\vec{K})a^2]+\nabla\cdot[\,g(\vec{K})a^2\,\vec{c}_g]=0\ . \tag{29}$$

但由(13)式，有

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\vec{c}_g\cdot\nabla k=0\ ,\qquad \frac{\partial l}{\partial t}+\vec{c}_g\cdot\nabla l=0\ ,\qquad \frac{\partial n}{\partial t}+\vec{c}_g\cdot\nabla n=0\ . \tag{30}$$

利用(30)式，方程(29)可化为

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}+\nabla\cdot(a^2\,\vec{c}_g)=0\ , \tag{31}$$

这就是波振幅方程．

由(15)式，若视平均 Lagrange 函数为 t 的函数，则

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=\mathscr{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathscr{L}_k\frac{\partial k}{\partial t}+\mathscr{L}_l\frac{\partial l}{\partial t}+\mathscr{L}_n\frac{\partial n}{\partial t}+\mathscr{L}_a\frac{\partial a}{\partial t}\ , \tag{32}$$

利用(13)和(16)式，(32)式化为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=\mathscr{L}_\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}-\mathscr{L}_k\frac{\partial\omega}{\partial x}-\mathscr{L}_l\frac{\partial\omega}{\partial y}-\mathscr{L}_n\frac{\partial\omega}{\partial z}\ , \tag{33}$$

(19)式两边乘以 ω，并与(33)式相减，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathscr{L}_\omega-\mathscr{L})+\frac{\partial}{\partial x}(-\omega\mathscr{L}_k)+\frac{\partial}{\partial y}(-\omega\mathscr{L}_l)+\frac{\partial}{\partial z}(-\omega\mathscr{L}_n)=0\ , \tag{34}$$

(34)式通常称为波平均能量方程的一般形式．

在均匀介质的波动中，由于应用缓变波列的假定，可以认为 $\partial\mathscr{L}/\partial t=0$，因而，方程(34)化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\mathscr{L}_\omega)+\frac{\partial}{\partial x}(-\omega\mathscr{L}_k)+\frac{\partial}{\partial y}(-\omega\mathscr{L}_l)+\frac{\partial}{\partial z}(-\omega\mathscr{L}_n)=0\ . \tag{35}$$

设波动的平均能量为 ε，则在均匀介质中，它应满足

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{c}_g) = 0 \quad , \tag{36}$$

其中

$$\vec{\mathscr{F}} = \varepsilon \vec{c}_g \tag{37}$$

称为波平均能量通量密度矢量.

将(35)式和(36)式比较可知

$$\begin{cases} \varepsilon = \omega \mathscr{L}_\omega = \omega \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} \quad , \\ \vec{\mathscr{F}} = \varepsilon \vec{c}_g = -\omega \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{K}} = -\omega \nabla_k \mathscr{L} \quad , \end{cases} \tag{38}$$

其中

$$\nabla_k = \vec{i} \frac{\partial}{\partial k} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial l} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial n} \tag{39}$$

为波数空间中的 Hamilton 算子.

但由(20)式和(27)式,

$$\begin{cases} \mathscr{L}_\omega = G_\omega a^2 = g(\vec{K}) a^2 \quad , \\ \mathscr{L}_k = G_k a^2 = -c_{gx} G_\omega a^2 = -c_{gx} g(\vec{K}) a^2 = -c_{gx} \mathscr{L}_\omega \; , \\ \mathscr{L}_l = G_l a^2 = -c_{gy} G_\omega a^2 = -c_{gy} g(\vec{K}) a^2 = -c_{gy} \mathscr{L}_\omega \; , \\ \mathscr{L}_n = G_n a^2 = -c_{gz} G_\omega a^2 = -c_{gz} g(\vec{K}) a^2 = -c_{gz} \mathscr{L}_\omega \; , \end{cases} \tag{40}$$

这样，(38)式可以化为

$$\begin{cases} \varepsilon = \omega g(\vec{K}) a^2 = \omega G_\omega a^2 \quad , \\ \vec{\mathscr{F}} = -\omega a^2 \nabla_k G \; . \end{cases} \tag{41}$$

利用(38)和(40)式，方程(35)可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \vec{c}_g\right) = 0 \; . \tag{42}$$

在分析力学中，$\mathscr{L}_\omega = \varepsilon/\omega$ 称为寝渐(或绝热，adiabatic)不变量，方程(42)就是它的守恒方程. 而在波动理论中，$\mathscr{L}_\omega = \varepsilon/\omega$ 称为波作用量(wave action)，记为 $\mathscr{A}$，即

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} = \frac{\varepsilon}{\omega} \quad , \tag{43}$$

这样，方程(42)化为

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathscr{A} \vec{c}_g) = 0 \; , \tag{44}$$

这就是波作用量方程.

以上分析说明，利用 Lagrange 函数可以求得波的频散关系、平均能量、波作用量和波作用量方程.

三、大气波动的 Lagrange 函数

本节应用上节所给的变分原理，导出大气各种波动的 Lagrange 函数和平均 Lagrange 函数. 并由此导出大气各种波动的频散关系、波作用量和平均能量.

1. 声波

三维声波满足下列波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\nabla^2\right)\varphi=0 \quad , \tag{45}$$

其中
$$c_s=\sqrt{\gamma RT_0} \tag{46}$$

为绝热声速.

我们将声波方程(45)改写为

$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}-\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right)=0 \ , \tag{47}$$

并将方程(47)与Euler方程(3)比较，即求得声波的Lagrange 函数为

$$L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)=\frac{1}{2c_s^2}\varphi_t^2-\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2) \ , \tag{48}$$

这是 φ_t, φ_x, φ_y, φ_z 的二次齐次式.

以(10)式代入(48)式，求得

$$L=\frac{1}{2c_s^2}(\omega^2-K^2c_s^2)a^2\sin^2(\theta+\alpha) \ , \tag{49}$$

其中 K 为 $\vec{K}$ 的模，即

$$K=|\vec{K}|=\sqrt{k^2+l^2+n^2} \quad , \tag{50}$$

因为 $\sin^2(\theta+\alpha)$ 在一个周期内的平均值为1/2，则由(3.5)式求得声波的平均Lagrange 函数为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4c_s^2}(\omega^2-K^2c_s^2)a^2 \ , \tag{51}$$

这是波振幅 a 的二次函数. 它与(20)式比较可知

$$G(\omega, \vec{K})=\frac{1}{4c_s^2}(\omega^2-K^2c_s^2) \ , \tag{52}$$

由 $G(\omega, \vec{K})=0$，我们求得声波的频散关系为

$$\omega^2=K^2c_s^2 \quad . \tag{53}$$

由(43)式，求得声波的波作用量为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\omega}=\frac{\omega}{2c_s^2}a^2 \quad , \tag{54}$$

因而，声波的平均能量为

$$\varepsilon\equiv\omega\mathscr{A}=\frac{\omega^2}{2c_s^2}a^2 \quad . \tag{55}$$

2．重力外波

重力外波满足下列波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2\right)\varphi=0 \quad , \tag{56}$$

其中

$$c_0=\sqrt{gH} \tag{57}$$

为重力外波波速.

因为方程(56)在形式上相同于方程(45)，只是方程(45)中的 Laplace 算子 ∇^2 被方程(56)中的水平 Laplace 算子 ∇_h^2 所代替. 用这种仿声波的做法，我们很快求得重力外波的 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_t,\ \varphi_x,\ \varphi_y)=\frac{1}{2c_0^2}\varphi_t^2-\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\quad , \tag{58}$$

平均 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4c_0^2}(\omega^2-K_h^2c_0^2)a^2\quad , \tag{59}$$

其中

$$K_h^2=k^2+l^2\quad . \tag{60}$$

(59)式与(20)式比较可知，对重力外波而言

$$G(\omega,\ \vec{K}_h)=\frac{1}{4c_0^2}(\omega^2-K_h^2c_0^2)\quad , \tag{61}$$

则由 $G(\omega,\ \vec{K}_h)=0$，可求得重力外波的频散关系为

$$\omega^2=K_h^2c_0^2\quad , \tag{62}$$

再由(43)式和(59)式可求得重力外波的波作用量和平均能量分别为

$$\mathscr{A}=\frac{\omega}{2c_0^2}a^2\quad . \tag{63}$$

$$\varepsilon=\frac{\omega^2}{2c_0^2}a^2\quad . \tag{64}$$

3. 重力内波

重力内波满足下列波动方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2+N^2\nabla_h^2\right)\varphi=0\quad , \tag{65}$$

其中

$$N=\sqrt{g\frac{\partial\ln\theta_0}{\partial z}} \tag{66}$$

为Brunt-Väisälä 频率.

我们将重力内波方程(65) 改写为

$$\frac{\partial^2\varphi_{xt}}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\varphi_{yt}}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2\varphi_{zt}}{\partial z\partial t}+N^2\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)=0\quad , \tag{67}$$

并将它与 Euler 方程(8)比较，即知，重力内波的 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_{xt},\ \varphi_{yt},\ \varphi_{zt})=\frac{1}{2}\left[\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2-N^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\right]\quad . \tag{68}$$

这是 φ_x，φ_y，φ_{xt}，φ_{yt}，φ_{zt} 的二次齐次式.

以(10)式代入(68)式，求得

$$L=\frac{1}{2}\omega^2K^2a^2\cos^2(\theta+\alpha)-\frac{1}{2}N^2K_h^2a^2\sin^2(\theta+\alpha)\ , \tag{69}$$

注意 $\sin^2(\theta+\alpha)$ 和 $\cos^2(\theta+\alpha)$ 在一个周期内的平均值都为 $\frac{1}{2}$，则由上式求得重力内波的平均 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}\left(K^2-\frac{K_h^2N^2}{\omega^2}\right)a^2\ . \tag{70}$$

在这里我们去掉了因子 ω^2 . (70)式表征的 $\mathscr{L}$ 也是波振幅 a 的二次函数，它与(20)式比较有

$$G(\omega,\vec{K})=\frac{1}{4}\left(K^2-\frac{K_h^2N^2}{\omega^2}\right)\ , \tag{71}$$

由 $G(\omega,\vec{K})=0$，我们求得重力内波的频散关系为

$$\omega^2=\frac{K_h^2N^2}{K^2}\ , \tag{72}$$

由(13)式和(70)式，求得重力内波的波作用量和平均能量分别为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\omega}=\frac{K_h^2N^2}{2\omega^3}a^2=\frac{1}{2\omega}K^2a^2\ , \tag{73}$$

$$\varepsilon\equiv\omega\mathscr{A}=\frac{1}{2}K^2a^2\ . \tag{74}$$

4. 惯性内波

惯性内波满足下列波动方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2+f_0^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=0\ , \tag{75}$$

其中 $f_0=$ 常数，为 Coriolis 参数.

方程(75)可以改写为

$$\frac{\partial^2\varphi_{xt}}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\varphi_{yt}}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2\varphi_{zt}}{\partial z\partial t}+f_0^2\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}=0\ , \tag{76}$$

上式与 Euler 方程(8)比较，即可求得惯性内波的 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_z,\varphi_{xt},\varphi_{yt},\varphi_{zt})=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2-f_0^2\varphi_z^2)\ , \tag{77}$$

这是 φ_z，φ_{xt}，φ_{yt}，φ_{zt} 的二次齐次式.

与重力内波类似，我们可得惯性内波的平均 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}\left(K^2-\frac{n^2f_0^2}{\omega^2}\right)a^2\ , \tag{78}$$

因而

$$G(\omega,\ \vec{K}) = \frac{1}{4}\left(K^2 - \frac{n^2 f_0^2}{\omega^2}\right), \tag{79}$$

并由 $G(\omega,\vec{K})=0$，求得惯性内波的频散关系为

$$\omega^2 = \frac{n^2 f_0^2}{K^2}\quad, \tag{80}$$

再由(43)式和(77)式，我们求得惯性内波的波作用量和平均能量分别为

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} = \frac{n^2 f_0^2}{2\omega^3}\, a^2 = \frac{1}{2\omega}\, K^2 a^2\ , \tag{81}$$

$$\varepsilon \equiv \omega \mathscr{A} = \frac{1}{2}\, K^2 a^2\quad . \tag{82}$$

5．正压水平无辐散的 Rossby 波

正压水平无辐散的 Rossby 波满足方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla_h^2 + \beta_0\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0\quad , \tag{83}$$

其中 $\beta_0=$ 常数，为 Rossby 参数．

方程(83)可以改写为

$$\frac{\partial^2 \varphi_{xt}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi_{yt}}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\,\beta_0\,\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\beta_0\,\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} = 0\quad , \tag{84}$$

将它与 Euler 方程(8)比较，即求得正压水平无辐散 Rossby 波的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\,(\varphi_{xt}^2 + \varphi_{yt}^2 - \beta_0\,\varphi_x\,\varphi_t)\quad . \tag{85}$$

以(10)式(其中 $\theta = kx + ly - \omega t$) 代入方程(85)，得到

$$L = \frac{1}{2}\,\omega^2 K_h^2\, a^2 \cos^2(\theta+\alpha) + \frac{1}{2}\,\beta_0 k\omega \sin^2(\theta+\alpha)\ , \tag{86}$$

因而，平均 Lagrange 函数(去除因子 ω^2)为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4}\left(K_h^2 + \frac{\beta_0 k}{\omega}\right) a^2\quad , \tag{87}$$

上式与(20)式比较有

$$G(\omega,\ \vec{K}_h) = \frac{1}{4}\left(k_h^2 + \frac{\beta_0 k}{\omega}\right)\ , \tag{88}$$

由 $G(\omega,\ \vec{K}_h)=0$，求得 Rossby 波的频散关系为

$$\omega = -\frac{\beta_0 k}{K_h^2}\quad . \tag{89}$$

再由(13)式和(87)式求得 Rossby 波的波作用量和平均能量分别为

$$\gamma \equiv \frac{\partial L}{\partial \omega} = -\frac{\beta_0 k}{4\omega^2} a^2 \quad , \tag{90}$$

$$\varepsilon \equiv \omega \gamma = -\frac{\beta_0 k}{4\omega} a^2 = \frac{1}{4} K_h^2 a^2 \ . \tag{91}$$

以上求得了大气中几种基本波动的 Lagrange 函数、对于大气中的混合波动，可以用类似的方法求得它们的 Lagrange 函数．例如

惯性重力外波的波动方程为下列 Klein-Gordon 方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_h^2 + f_0^2 \right) \varphi = 0 \ , \tag{92}$$

其 Lagrange 函数为

$$L(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_t) = \frac{1}{2c_0^2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \frac{1}{2} \lambda_0^2 \varphi^2 \ , \tag{93}$$

其中

$$\lambda_0^2 = f_0^2 / c_0^2 \ . \tag{94}$$

惯性重力内波的方程为

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \nabla_h^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi = 0 \quad , \tag{95}$$

其 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_{xt}, \varphi_{yt}, \varphi_{zt}) = \frac{1}{2} [(\varphi_{xt}^2 + \varphi_{yt}^2 + \varphi_{zt}^2) - N^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - f_0^2 \varphi_z^2] \ ; \tag{96}$$

正压准地转的 Rossby 波方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 - \lambda_0^2) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi = 0 \ , \tag{97}$$

其 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_x, \varphi_t, \varphi_{xt}, \varphi_{yt}) = \frac{1}{2} [(\varphi_{xt}^2 + \varphi_{yt}^2) + \lambda_0^2 \varphi_t^2 - \beta_0 \varphi_x \varphi_t] \ ; \tag{98}$$

斜压准地转的 Rossby 波方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_h^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi = 0 \quad , \tag{99}$$

其 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_x, \varphi_t, \varphi_{xt}, \varphi_{yt}, \varphi_{zt}) = \frac{1}{2} \left[(\varphi_{xt}^2 + \varphi_{yt}^2) + \frac{f_0^2}{N^2} \varphi_{zt}^2 - \beta_0 \varphi_x \varphi_t \right] ; \tag{100}$$

低纬正压大气波动方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_h^2 + \beta_0^2 y^2 \right) - \beta_0 c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi = 0 \ , \tag{101}$$

其 Lagrange 函数为

$$L(\varphi_x,\varphi_t,\varphi_{xt},\varphi_{yt},\varphi_{tt})=\frac{1}{2c_0^2}\varphi_{tt}^2-\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2)-\frac{\beta_0^2 y^2}{2c_0^2}\varphi_t^2+\frac{1}{2}\beta_0\varphi_x\varphi_t . \quad (102)$$

四、 Lagrange 函数与波的能量

本节首先将大气波动方程写为能量守恒律的形式，然后分析 Lagrange 函数与波能量间的关系．

1．声波

声波方程(45)很易化为下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c_s^2}\varphi_t^2+\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\right]+\nabla\cdot(-\varphi_t\nabla\varphi)=0 , \quad (103)$$

若把

$$E=\frac{1}{2c_s^2}\varphi_t^2+\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2) \quad (104)$$

视为声波的总能量的话，则(103)式就表征了声波能量的守恒定律．

事实上，若选

$$\varphi_t=\frac{p'}{\rho_0} , \quad (105)$$

这里 p' 为与静止气压的偏差，ρ_0 为静止大气的密度，则(104)式右端第一项

$$J\equiv\frac{1}{2c_s^2}\varphi_t^2=\frac{p'^2}{2c_s^2\rho_0^2} \quad (106)$$

表示单位质量空气的弹性(elastic)位能，它是由大气的可压缩性所引起的．

(104)式右端第二项

$$K\equiv\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) \quad (107)$$

显然表示单位质量空气的动能，如声波的 x 方向运动方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) , \quad (108)$$

将(105)式代入，方程两边对 t 积分，并取积分常数为零，就得到

$$u=-\int\varphi_{xt}\delta t=-\varphi_x , \quad (109)$$

因而 $u^2=\varphi_x^2$，类似地分析，有 $v^2=\varphi_y^2$、$w^2=\varphi_z^2$．

由此分析便知，由(48)式表征的声波的 Lagrange 函数乃是声波弹性位能与动能之差，改变正负号即是动能与弹性位能之差．这在形式上与分析力学中的 Lagrange 函数是一致的．

2. 重力外波

重力外波方程(56)很易写为下列能量守恒律的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c_0^2}\varphi_t^2+\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\right]+\nabla_h\cdot(-\varphi_t\nabla_h\varphi)=0\quad, \tag{110}$$

与声波分析类似，若取

$$\varphi_t=gh'\quad, \tag{111}$$

h'为自由面的扰动，则重力外波的总能量

$$E=\frac{1}{2c_0^2}\varphi_t^2+\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2) \tag{112}$$

中右端第一项

$$\Phi\equiv\frac{1}{2c_0^2}\varphi_t^2=\frac{g}{2H}h'^2 \tag{113}$$

表示单位质量空气的重力位能，右端第二项

$$K\equiv\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)=\frac{1}{2}(u^2+v^2) \tag{114}$$

表示单位质量空气的水平运动动能.

所以，由(58)式表征的重力外波的Lagrange函数乃是重力位能与动能之差，或者是动能与重力位能之差，在形式上也与分析力学中的Lagrange函数一致.

3. 重力内波

重力内波方程(65)可以写为下列能量守恒律的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2)+\frac{N^2}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\right]+\nabla\cdot[-\varphi_t(\nabla\varphi_{tt}+N^2\nabla_h\varphi)]=0\,, \tag{115}$$

由此便知，重力内波的总能量为

$$E=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2)+\frac{N^2}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\quad. \tag{116}$$

为了说明上述能量的物理性质，我们考虑扰动与y无关的情况，此时，重力内波满足的连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{117}$$

因而可引进流函数ψ，使得

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial z}\quad,\quad w=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad. \tag{118}$$

若取

$$\varphi_t=\psi\quad, \tag{119}$$

则

$$\frac{1}{2}(u^2+w^2)=\frac{1}{2}(\psi_z^2+\psi_x^2)=\frac{1}{2}(\varphi_{zt}^2+\varphi_{xt}^2) \quad . \tag{120}$$

将上式推广可见，(116)式右端第一项表示单位质量空气的动能、即

$$K=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2) \ . \tag{121}$$

因重力内波可视为浮力振荡在空间中的传播，因而在重力内波中必然存在具有 Archimede 浮力性质的恢复力 $-N^2 z$，克服该力所作的功即是所谓有效(available)位能，即

$$A=\int N^2 z\,\delta z=\frac{N^2}{2}z^2 \quad , \tag{122}$$

但利用(118)和(119)式有

$$z=\int w dt=\int -\psi_x dt=-\int \varphi_{xt} dt=-\varphi_x \quad , \tag{123}$$

(123)式代入(122)式得到

$$A=\frac{N^2}{2}\varphi_x^2 \ . \tag{124}$$

将上式推广可见，(58)式右端第二项表示单位质量空气的有效位能，即

$$A=\frac{N^2}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2) \quad . \tag{125}$$

所以，由(68)式表征的重力内波的 Lagrange 函数乃是动能与有效位能之差，在形式上与分析力学中的 Lagrange 函数一致.

4．惯性内波

惯性内波方程(75)可以写为下列能量守恒律的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2)+\frac{f_0^2}{2}\varphi_z^2\right]+\nabla\cdot[-\varphi_t(\nabla\varphi_{tt}+f_0^2\varphi_z\vec{k})]=0 , \tag{126}$$

因而，惯性内波的总能量为

$$E=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}+\varphi_{zt}^2)+\frac{f_0^2}{2}\varphi_z^2 \ . \tag{127}$$

类似重力内波的分析，上式右端第一项为单位质量空气的动能，即

$$K=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2+\varphi_{zt}^2) \ . \tag{128}$$

同样，因惯性内波可视为惯性振荡在空间中的传播，因而惯性内波也存在恢复力 $-f^2x$，克服该力所作的功可以称为惯性(inertial)位能，即

$$I=\int f_0^2 x\delta x=\frac{f_0^2}{2}x^2 \quad , \tag{129}$$

但利用(118)和(119)式有

$$x=\int u dt=\int \psi_z dt=\int \varphi_{zt} dt=\varphi_z \quad , \tag{130}$$

(130)式代入(71)式得到

$$I=\frac{f_0^2}{2}\varphi_z^2 \quad , \tag{131}$$

这就是(127)式的右端第二项. 所以, 由(77)式表征的惯性内波的 Lagrange 函数乃是动能与惯性位能之差, 形式上与分析力学中的 Lagrange 函数一致.

5. 正压水平无辐散的 Rossby 波

正压水平无辐散的 Róssby 波的波动方程(83)可以写为下列能量守恒律的形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2)+\frac{\beta_0}{2}\varphi_t\varphi_x\right]$$

$$+\nabla_h\cdot\left[-\varphi_t\nabla_h\varphi_{tt}-\frac{\beta_0}{2}\left(\varphi\varphi_t+\frac{3}{2}\varphi_t^2+\int\varphi\varphi_{xtt}\delta x\right)\vec{i}\right]=0, \tag{132}$$

因而, 正压水平无辐散 Rossby 波的总能量为

$$E=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2)+\frac{\beta_0}{2}\varphi_x\varphi_t \quad . \tag{133}$$

根据水平无辐散条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{134}$$

可引入流函数 ψ, 使得

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad , \tag{135}$$

若取

$$\varphi_t=\psi \ , \tag{136}$$

则

$$u=-\varphi_{yt} \quad , \quad v=\varphi_{xt} \quad , \tag{137}$$

因而(133)式右端第一项为单位质量空气的水平运动动能, 即

$$K=\frac{1}{2}(\varphi_{xt}^2+\varphi_{yt}^2) \ . \tag{138}$$

至于(133)式右端第二项的性质可以按如下方式分析:

因水平无辐散条件下的 Rossby 波在 y 方向的运动方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \quad , \tag{139}$$

若应用 β 平面近似和(135)式, 则方程(139)可化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\beta_0\psi=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\rho_0}-f\psi\right) \ . \tag{140}$$

由此可知, 对 Rossby 波而言, 也存在一个恢复力 $-\beta_0\psi$, 克服该力所作的功可以称

为 Rossby 位能，即

$$R=\int\beta_0\psi\,\delta y=\int\beta_0\psi\,v\,\delta t\quad, \tag{141}$$

利用(136)和(137)式，上式化为

$$R=\beta_0\int\varphi_t\varphi_{xt}\delta t=\beta_0\int\varphi_t\delta\varphi_x=\beta_0\varphi_x\varphi_t-\beta_0\int\varphi_x\varphi_{tt}\delta t\quad, \tag{142}$$

因为 φ 具有波动解，即

$$\varphi=\hat{\varphi}\,e^{i(kx+ly-\omega t)}\quad, \tag{143}$$

由此有

$$\begin{cases}\varphi_x=ik\varphi\ , & \varphi_t=-i\omega\varphi\quad,\\ \varphi_{xt}=\omega k\varphi\ , & \varphi_{tt}=-\omega^2\varphi\ ,\end{cases} \tag{144}$$

因而

$$\varphi_x\varphi_{tt}=\varphi_t\varphi_{xt}\quad, \tag{145}$$

(145)式代入(142)式，得到

$$R=\beta_0\varphi_x\varphi_t-\beta_0\int\varphi_t\varphi_{xt}\delta t=\beta_0\varphi_x\varphi_t-R\ , \tag{146}$$

则最后求得 Rossby 位能为

$$R=\frac{1}{2}\beta_0\varphi_x\varphi_t\ , \tag{147}$$

这就是(133)式的右端第二项．所以，由(85)式表征的 Rossby 波的 Lagrange 函数乃是动能与 Rossby 位能之差，这在形式上与分析力学的 Lagrange 函数一致．

至于大气混合波的 Lagrange 函数与能量的关系，只要作一简单说明即可．

惯性重力外波的 Lagrange 函数(93)式，其右端第一项为重力位能，第二项为动能、第三项由方程(92)可知，对 φ/c_0^2 而言，存在一个恢复力 $-(f_0^2/c_0^2)\varphi=-\lambda_0^2\varphi$，沿 φ 方向克服该力所作的功

$$I=\int\lambda_0^2\,\varphi\delta\varphi=\frac{1}{2}\lambda_0^2\,\varphi^2\quad, \tag{148}$$

它表征惯性位能．

惯性重力内波的 Lagrange 函数(96)式，其右端第一、二、三项分别为动能、有效位能和惯性位能．

正压准地转 Rossby 波的 Lagrange 函数(98)式，其右端第一项为动能，第二项为重力位能或惯性位能，这是因为在准地转概念下，$\varphi_t=\psi=gh'/f_0$ 为准地转流函数，因而

$$I=\frac{1}{2}\lambda_0^2\psi^2=\frac{1}{2}\frac{f_0^2}{c_0^2}\left(\frac{gh'}{f_0}\right)^2=\frac{1}{2c_0^2}(gh')^2=\frac{g}{2H}h'^2=\Phi, \quad (149)$$

而(98)式右端第三项为Rossby位能．

斜压准地转 Rossby 波的 Lagrange 函数(100)式，其右端第一项为动能，第二项为准地转的有效位能，这是因为在准地转概念下，$\varphi_t=\psi=p'/f_0\rho_0$ 为准地转流函数，$\psi_z=\frac{g}{f_0}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)$，$\theta_0$ 为静止空气的位温，θ'为相对于 θ_0 的位温偏差，因而

$$A=\frac{f_0^2}{2N^2}\varphi_{zt}^2=\frac{f_0^2}{2N^2}\psi_z^2=\frac{g^2}{2N^2}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2, \quad (150)$$

(100)式右端第三项为 Rossby 位能．

低纬波动的 Lagrange 函数(102)式，其右端第一、第二、第三、第四项分别为重力位能、动能、惯性位能和 Rossby 位能．

综上分析知：大气混合波的 Lagrange 函数乃是诸种能量的代数和．

五、结 论

我们知道，分析力学中的 Lagrange 函数为一个系统运动形式的概括．本文应用变分原理不仅导出了大气各种波动的 Lagrange 函数，而且指明了基本波动的 Lagrange 函数就是动能与位能之差，同时指明了 Lagrange 函数的应用，这对进一步认识波动的本质有一定的帮助．

随着对大气波动的深刻认识，必将看出 Lagrange 函数的进一步应用．

参 考 文 献

[1] Whitham, G.B., 1965, A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, **22**, 273-283.

[2] Whitham, G.B., 1967, Nonlinear dispersion of water waves, *J. Fluid Mech.*, **27**, 399-412.

[3] Seliger R.L. & Whitham, G.B., 1968, Variational principles in continuum mechanics, *Proc. Roy. Soc.*, A **305**, 1-25.

[4] Whitham, G.B., 1970, A note on group velocity, *J. Fluid Mech.*, **9**, 347-352.

[5] Whitham, G.B., 1973, Linear and nonlinear waves, a wileyinterscience, 636.

[6] Buchwald, V.T., 1972, Energy and energy flux in planetary waves, *Proc. Roy. Soc.*, A **328**, 37-48.

[7] 伍荣生，1986，Rossby 波的能量、能量通量与 Lagrange 函数，气象学报，44卷，2期，158-165.

[8] 刘式适、刘式达，1985，大气中的波作用量及其守恒性，北京大学学报(自然科学)，第2期，87-96.

[9] 刘式适、刘式达，1987，地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性，大气科学，11卷，第1期，12-22.