第14卷 第3期　　大 气 科 学　　Vol.14 .No .3
1990年9月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Sept .. 1990

层结大气中重力惯性波的发展

吴池胜

(中山大学大气科学系)

提　　要

应用WKB方法讨论了非均匀层结大气条件下重力惯性波的发展．分析表明，在水平方向上，当波动由层结不稳定度小的地方向不稳定度大的地方传播时，波将发展，从而修正了文献[2]的结论．

关键词：层结大气；不稳定度；重力惯性波．

一．引　　言

重力惯性波与强对流的关系越来越引起人们的注意，Uccellini (1975)[1] 给出一个有关重力波与雷暴之间因果关系的详细实例分析．然而，我们知道，重力惯性波是经常产生和存在于大气中的，但并不是所有的波都能引起对流．这除了要有一定的温、湿条件之外，作为触发机制的重力波，必须有一定的强度．因此，研究在什么条件下重力惯性波有可能得到发展，是很有必要的．巢纪平首先研究了层结(N^2)的变化对重力惯性波发展的作用．他指出，当波动由层结不稳定度大的地方向不稳定度小的地方传播时，波将发展[2]．需要指出的是，巢为得到关于 w' 的扰动方程，在对扰动方程组进行消元过程中是把层结(N^2)当成常数处理的，其后在波的能量方程中又来讨论 N^2 的变化对波的影响，前后不一致．因此，我们觉得有必要对此问题作进一步的探讨．

二．基本方程组

设基本气流为零，在静力平衡和 Boussinesq 近似下的层结大气中，有如下线性化方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-fv=-\dfrac{\partial p'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=-\dfrac{\partial p'}{\partial y}, \\ \theta=\dfrac{\partial p'}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}+N^2 w=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \end{cases} \tag{1}$$

1987年3月20日收到，9月7日收到修改稿．

其中，变量 $(u,v,w,\theta)=\rho_0(u',v',w',\ g\theta'/\theta_0)$，$\rho_0$ 为参考态密度，取为常数，θ_0 是与 ρ_0 相应的常值位温，$N^2\equiv\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$，“－”代表基本场，“′”代表扰动场．方程组(1)与文献[2]中所用的相同.

假设 N^2 为时间和空间的缓变函数，把方程组(1)化成单一变量 w 的方程：

$$\nabla_h^2(N^2 w)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\ ,$$

即

$$N^2\nabla_h^2 w+w\nabla_h^2 N^2+2\nabla_h N^2\cdot\nabla_h w+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\ , \tag{2}$$

式中

$$\nabla_h^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad,\ \nabla_h\equiv\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\quad.$$

(2)式即为本文研究的基本方程．

三．层结的非均匀性与波的发展

令

$$w=A(X,Y,Z,T)\ e^{i\varphi\varepsilon^{-1}} \tag{3}$$

其中 $\varphi=lX+mY+nZ-\omega T$，$X=\varepsilon x$，$Y=\varepsilon y$，$Z=\varepsilon z$，$T=\varepsilon t$，$\varepsilon$ 为一小参数，l、m、n、ω 分别为局地瞬时波数和频率．

把(3)式代入方程(2)后得

$$\begin{aligned}&N^2\left\{\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)+i\varepsilon\left(2l\frac{\partial A}{\partial X}+A\frac{\partial l}{\partial X}+2m\frac{\partial A}{\partial Y}+A\frac{\partial m}{\partial Y}\right)-(l^2+m^2)A\right\}\\&+A\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 N^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 N^2}{\partial Y^2}\right)+\left\{2\varepsilon^2\left(\frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial N^2}{\partial X}+\frac{\partial A}{\partial Y}\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)+2i\varepsilon A\left(l\frac{\partial N^2}{\partial X}+m\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)\right\}\\&+\left(-\omega^2-2i\varepsilon\omega\frac{\partial}{\partial T}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}+f^2\right)\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 A}{\partial Z^2}+2\varepsilon in\frac{\partial A}{\partial Z}+i\varepsilon A\frac{\partial n}{\partial Z}-n^2 A\right)\\&+\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 A}{\partial Z^2}+2i\varepsilon n\frac{\partial A}{\partial Z}+i\varepsilon A\frac{\partial n}{\partial Z}-n^2 A\right)\left(-\varepsilon i\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)=0\ ,\end{aligned} \tag{4}$$

把振幅 A 展成 ε 的幂级数：

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2 A_2+\cdots\cdots\ , \tag{5}$$

将(5)式代入方程(4)，取 ε^0 近似则有

$$\omega^2=\frac{N^2(l^2+m^2)}{n^2}+f^2\ , \tag{6}$$

或

$$\omega=\pm\frac{1}{n}\left[N^2(l^2+m^2)+n^2 f^2\right]^{1/2}=\Omega(l,m,n,X,Y,Z,T)\ . \tag{7}$$

由(7)式得群速度：

$$
\begin{cases}
C_{gx} = \dfrac{\partial \omega}{\partial l} = \dfrac{l N^2}{n^2 \omega} , \\
C_{gy} = \dfrac{\partial \omega}{\partial m} = \dfrac{m N^2}{n^2 \omega} , \\
C_{gz} = \dfrac{\partial \omega}{\partial n} = -\dfrac{N^2 (l^2 + m^2)}{n^3 \omega} .
\end{cases} \tag{8}
$$

对 ε^{-1} 有：

$$
N^2\left(2l \frac{\partial A_0}{\partial X} + A_0 \frac{\partial l}{\partial X} + 2m \frac{\partial A_0}{\partial Y} + A_0 \frac{\partial m}{\partial Y}\right) + (f^2 - \omega^2)\left(2n \frac{\partial A_0}{\partial Z} + A_0 \frac{\partial n}{\partial Z}\right)
$$

$$
+ 2\omega \frac{\partial}{\partial T}(n^2 A_0) + n^2 A_0 \frac{\partial \omega}{\partial T} = -2A_0\left(l \frac{\partial N^2}{\partial X} + m \frac{\partial N^2}{\partial Y}\right), \tag{9}
$$

以 A_0/ω 乘(9)式(若 A_0 为复数，则乘以 A_0^*/ω，其中 A_0^* 为 A_0 的复共轭)，并考虑到(8)式，则得

$$
\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial T}(n^2 A_0^2 \omega) + n^2\left(C_{gx} \frac{\partial A_0^2}{\partial X} + C_{gy} \frac{\partial A_0^2}{\partial Y} + C_{gz} \frac{\partial A_0^2}{\partial Z}\right)
$$

$$
+ A_0^2 n^2\left(\frac{1}{l} C_{gx} \frac{\partial l}{\partial X} + \frac{1}{m} C_{gy} \frac{\partial m}{\partial Y} + \frac{1}{n} C_{gz} \frac{\partial n}{\partial Z}\right) + A_0^2 \frac{\partial n^2}{\partial T}
$$

$$
= -2A_0^2\left(\frac{l}{\omega} \frac{\partial N^2}{\partial X} + \frac{m}{\omega} \frac{\partial N^2}{\partial Y}\right) . \tag{10}
$$

因为波的能量(E)正比于振幅的平方，即 $E \propto A_0^2$，故由(10)式可得

$$
\frac{\partial E}{\partial T} + \vec{C}_g \cdot \nabla E + E\left(\frac{2}{n^2} \frac{\partial n^2}{\partial T} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial T} + \frac{1}{l} C_{gx} \frac{\partial l}{\partial X} + \frac{1}{m} C_{gy} \frac{\partial m}{\partial Y}\right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{n} C_{gz} \frac{\partial n}{\partial Z}\right) = -2\left(\frac{l}{n^2 \omega} \frac{\partial N^2}{\partial X} + \frac{m}{n^2 \omega} \frac{\partial N^2}{\partial Y}\right) E , \tag{11}
$$

其中 $\nabla \equiv \left(\vec{i} \dfrac{\partial}{\partial X} + \vec{j} \dfrac{\partial}{\partial Y} + \vec{k} \dfrac{\partial}{\partial Z}\right)$.

由(8)式可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial C_{gx}}{\partial X} = C_{gx}\left(\dfrac{1}{l} \dfrac{\partial l}{\partial X} - \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial X} - \dfrac{1}{n^2} \dfrac{\partial n^2}{\partial X} + \dfrac{1}{N^2} \dfrac{\partial N^2}{\partial X}\right), \\
\dfrac{\partial C_{gy}}{\partial Y} = C_{gy}\left(\dfrac{1}{m} \dfrac{\partial m}{\partial Y} - \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial Y} - \dfrac{1}{n^2} \dfrac{\partial n^2}{\partial Y} + \dfrac{1}{N^2} \dfrac{\partial N^2}{\partial Y}\right), \\
\dfrac{\partial C_{gz}}{\partial Z} = C_{gz}\left(\dfrac{1}{n} \dfrac{\partial n}{\partial Z} - \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial Z} - \dfrac{1}{n^2} \dfrac{\partial n^2}{\partial Z}\right) - \dfrac{2}{n} \dfrac{\partial \omega}{\partial Z} .
\end{cases} \tag{12}
$$

利用(12)式，把(11)式改写为

$$
\frac{\partial E}{\partial T} + \nabla \cdot (\vec{C}_g E) + E \cdot \left\{\frac{1}{\omega} \frac{D_g \omega}{DT} + \frac{1}{n^2} \frac{D_g n^2}{DT} + \frac{2}{n} \frac{\partial \omega}{\partial Z}\right.
$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{\partial n^2}{\partial T}+\frac{1}{N^2}\left(C_{gx}\frac{\partial N^2}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right)\Big\}=0 \tag{13}$$

其中 $\frac{D_g}{DT}\equiv\frac{\partial}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla$，由于

$$\frac{D_g\omega}{DT}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{l,m,n,X,Y,Z}=\frac{l^2+m^2}{2\omega n^2}\frac{\partial N^2}{\partial T},$$

$$\frac{D_g n}{DT}=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{l,m,n,X,Y,T}=-\frac{l^2+m^2}{2\omega n^2}\frac{\partial N^2}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial Z}=-\frac{\partial n}{\partial T},$$

所以，(13)式化为

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla\cdot(\vec{C}_gE)=\frac{E(l^2+m^2)}{\omega^2n^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial N^2}{DT}-\vec{C}_h\cdot\nabla_hN^2+C_{pz}\frac{\partial N^2}{\partial Z}\right), \tag{14}$$

其中 $\vec{C}_h=\frac{\omega}{l^2+m^2}(l\vec{i}+m\vec{j})$ 为水平相速矢，$C_{pz}=\omega/n$ 为铅直相速分量．

对于湿空气，考虑到水汽凝结潜热的影响，可以用 θ_{se} 代替 θ，则色散关系相应为

$$\omega_{se}^2=\frac{N_{se}^2(l^2+m^2)}{n^2}+f^2,$$

其中$N_{se}^2\equiv(g/\theta_{se_0})\frac{\partial\overline{\theta}_{se}}{\partial z}$，相应湿大气惯性重力波的能量方程为

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla\cdot(\vec{C}_gE)=\frac{l^2+m^2}{\omega_{se}^2n^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial N_{se}^2}{\partial T}-\vec{C}_h\cdot\nabla_hN_{se}^2+C_{pz}\frac{\partial N_{se}^2}{\partial Z}\right)E. \tag{15}$$

现对(15)式作如下说明：

1) 层结(N_{se}^2)的时、空变化是惯性重力波发展的能源，巢纪平首先得出类似于这样的结论[2]．

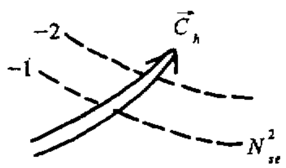

图1 发展的波动

2) 在水平方向上，当波动由层结不稳定度小的地方向不稳定度大的地方传播时($\omega_{se}^2>0$时)，波的能量将增大，波将发展，如图1所示．这与文献[2]的结论刚好相反．在文献[2]中，由于在消元过程中把 N^2 当作常数处理，因而在关于 w 的波动方程中就略去有关层结 N^2 的水平变化项，即本文(2)式等号左方的第二、第三项，而在一阶近似条件下，$(2\nabla_hN^2\cdot\nabla_hw)$项是不能略去的，因此，文献[2]中关于 N^2 的水平变化对波发展作用的论述是片面的，我们这里的结论是对它的修正．

3) 在铅直方向上，当波动由稳定度小的地方向稳定度大的地方传播时，波将发展，这与文献[3]的论述是一致的．

图2是1977年5月31日的一条雷达回波动态图[1]．这一回波长250km，生成于

1) 1977年华南前汛期暴雨研究报告选编，热带天气科研协作领导小组办公室，广东省热带海洋气象研究所印．

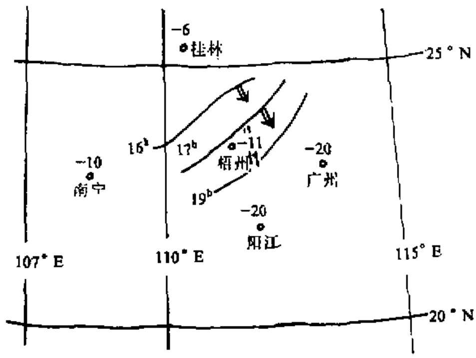

图2　$\Delta\theta_{se}$ 的分布及回波动态[1)]

$\Delta\theta_{se}=(\theta_{se_{500hPa}}-\theta_{se_{地面}})$　单位：K

锋前暖区，它与冷锋前暖区飑线相似．图中给出回波所经地区08时的层结分布，不稳定的高值区位于回波前进方向的前方．此回波一边东南移，一边发展，给所经地区带来较大的降水．这与我们上述的理论分析是相吻合的．

上述的分析是以静止流场为背景的，背景流场的水平切变和垂直切变也必然会影响重力惯性波的发展，有关这一问题，我们将另文讨论．

参　考　文　献

[1] Uccellini, L.W., 1975, A case study of apparent grarity wave initiation of severe convective storme, *Mon. Wea. Rev.*, **103**, 497–513.

[2] 巢纪平、1980，非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用，大气科学，第4卷，第3期，230–235.

[3] 邹美恩，1984，湖南强风暴暖盖环境场研究，大气科学、第8卷、第2期，135–142.