

风海流方程低谱模式的多态解问题（一）

季仲贞

郑朝洲

(LASG, 中国科学院大气物理研究所) (中国科学院系统科学研究所)

提 要

本文研究一个带强迫、耗散的非线性准地转海流方程四系数谱模式的定常解及其稳定性问题。指出当风应力项充分强且摩擦系数足够小时，该定常方程有多态解存在，而在其它情形下只存在唯一的稳定解。文中还指出，对于有三个解出现的情形，其中有一个解总是不稳定的；另一个是带有大振幅第一分量的解，由于非线性项起着很大的控制作用，使得该解总是稳定的；第三个是 Sverdrup 解，它可能是稳定的，也可能是不稳定的。此外，通过对方程进行数值计算还揭示了稳定解对参数 R 和 ε 的依赖状况。

关键词：定常解；多态解；低谱模式；海流方程。

一、引 言

随着海洋开发事业的发展，海流数值模拟和预报问题已日益受到重视。然而，一个海流方程的解会是怎样的？是否会产生多态解？对此，日本学者针对黑潮问题讨论过很多。譬如，Masuda (1982)^[1] 曾指出黑潮 (Kuroshio) 具有多态平衡解；Chao (1984)^[2] 也用正压流入流出模式数值地证实了黑潮多态解的存在；Yasuda 等 (1985)^[3] 和 Jong-Hwan Yoon 和 Yasuda (1987)^[4] 又分别用正压和斜压模式检验了黑潮路径对 Rossby 数和 Reynolds 数的依赖关系，也得到多态平衡解。几年前，我们在作海流对定常和移动台风响应的数值试验时曾发现，依赖于物理参数的选取，对一个台风响应的海流有时是一个涡旋，而有时却可能是两个甚至多个涡旋。图 1 给出的就是李荣凤^[1] 算得的一个结果。从图上清楚地看到，对一个定常台风所响应的海流呈现出三个涡旋。对于这种现象的出现，引起我们很大的兴趣。

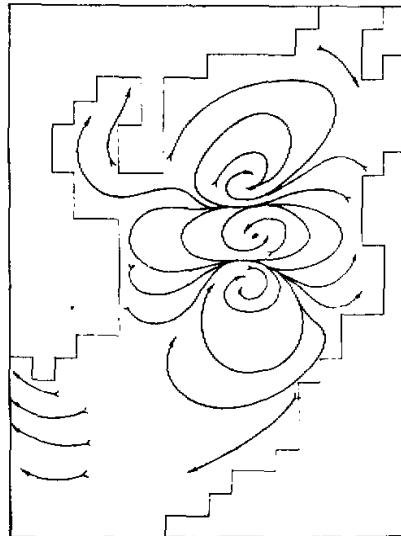


图 1 对南海定常台风的响应海流流线图

1988 年 4 月 19 日收到，1989 年 5 月 9 日收到修改稿。

[1] 李荣凤等，1985，海流对定常台风响应的数值试验（内部交流材料）。

我们很想知道与一个台风相对应，在海流场中何时是一个涡旋，而何时会有多个涡旋出现？它们与海流方程多态解有无关系？它们与方程中的非线性项、摩擦项和强迫项等有什么关系？等等。早在 1963 年，G.Veronis⁽⁵⁾ 曾对一个准地转海流方程的高截谱模式分析过海流方程的多态解问题，得出一些很有兴趣的结果。然而，在他的分析中，使用了如下的近似表达式：

$$\cos x \approx \frac{8}{3\pi} \sin 2x \text{ 和 } \cos 2x \approx -\frac{4}{3\pi} \sin x,$$

这些关系式是有很大误差的，因此，所导出方程解的可靠性值得重新检验，为此，我们在文献 [5] 的基础上，对方程的解法作了改进，对风海流方程解的性质作了进一步的分析和讨论，得到更有意义的结果。我们还对该模型的时间积分分解进行了具体的计算，结果与理论分析一致，这我们将另文介绍。

二、模 式

如同文献 [5] 一样，无因次的非线性准地转海流方程可改写为

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + RJ(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\tilde{\varepsilon} \nabla^2 \psi + G, \quad (1)$$

其中 R 是 Rossby 数， $\tilde{\varepsilon}$ 是底摩擦参数， G 为风应力强迫项，并有如下关系式：

$$R = \frac{W}{\beta^2 HL^3}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{K}{\beta L}, \quad (2)$$

式中 L 是水平特征尺度， K 是底摩擦系数， W 是风应力项的特征量， H 为海洋水深，并取柯氏参数 $f = f_0 + \beta y$ 。

今对流函数 ψ 和风应力项 G 作如下高截谱展开：

$$\psi = a_1 \sin x \sin y + a_2 \sin 2x \sin y + a_3 \sin x \sin 2y + a_4 \sin 2x \sin 2y, \quad (3)$$

$$G = G_1 \sin x \sin y + G_2 \sin 2x \sin y + G_3 \sin x \sin 2y + G_4 \sin 2x \sin 2y. \quad (4)$$

模式的边界条件取为 ψ 和 G 在边界上为零，对于边长为 π 的正方形海域来说，其边界条件就是

$$\psi = 0, \quad \text{当 } x=0 \text{ 和 } x=\pi, y=0 \text{ 和 } y=\pi; \quad (5)$$

$$G = 0, \quad \text{当 } x=0 \text{ 和 } x=\pi, y=0 \text{ 和 } y=\pi. \quad (6)$$

今设

$$\nabla^2 \psi_n = -\lambda_n \psi_n, \quad (7)$$

易求得特征值 λ_n 分别为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 8$ 。

把表达式 (3) 和 (4) 代入方程 (1)，可得准地转海流模式的一个谱表示式，然后用 ψ_n ($n=1, 2, 3, 4$) 乘方程两边，并在空间区域上对每个 n ($n=1, 2, 3, 4$) 积分之，利用 ψ_n 的正交性，可得关于谱展开系数的方程组如下：

$$\eta \lambda_n \frac{\partial a_n}{\partial t} + R \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^4 \lambda_m D_{k,m,n} a_k a_m - \sum_{j=1}^4 C_{j,n} a_j = -\tilde{\varepsilon} \lambda_n a_n - G_n, \quad (8)$$

$$(n=1, 2, 3, 4)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{k,m,n} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi_n J(\psi_k, \psi_m) dx dy, \\ C_{j,n} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi_n \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy, \\ G_n = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi_n G dx dy, \\ \varepsilon = \frac{\pi^2}{4} \tilde{\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\pi^2}{4}. \end{array} \right. \quad (9)$$

和

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{12} = C_{34} = -C_{21} = -C_{43} = \frac{2\pi}{3}, \\ D_{123} = D_{231} = D_{312} = -D_{132} = -D_{213} = -D_{321} = \frac{3}{16}\pi^2, \\ \text{其余的 } C_{j,n} \text{ 和 } D_{k,m,n} \text{ 均为零.} \end{array} \right. \quad (10)$$

于是模式方程变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \frac{da_1}{dt} - \frac{C_{21}}{\lambda_1} a_2 = -\varepsilon a_1 - \frac{G_1}{\lambda_1}, \\ \eta \frac{da_2}{dt} + R \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2} D_{231} a_1 a_3 - \frac{C_{12}}{\lambda_2} a_1 = -\varepsilon a_2 - \frac{G_2}{\lambda_2}, \\ \eta \frac{da_3}{dt} + R \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3} D_{312} a_1 a_2 - \frac{C_{43}}{\lambda_3} a_4 = -\varepsilon a_3 - \frac{G_3}{\lambda_3}, \\ \eta \frac{da_4}{dt} - \frac{C_{34}}{\lambda_4} a_3 = -\varepsilon a_4 - \frac{G_4}{\lambda_4}, \end{array} \right. \quad (11)$$

或即

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \frac{da_1}{dt} + \frac{\pi}{3} a_2 = -\varepsilon a_1 - \frac{G_1}{2}, \\ \eta \frac{da_2}{dt} - \frac{9R\pi^2}{80} a_1 a_3 - \frac{2\pi}{15} a_1 = -\varepsilon a_2 - \frac{G_2}{5}, \\ \eta \frac{da_3}{dt} + \frac{9R\pi^2}{80} a_1 a_2 - \frac{2\pi}{15} a_4 = -\varepsilon a_3 - \frac{G_3}{5}, \\ \eta \frac{da_4}{dt} - \frac{\pi}{12} a_3 = -\varepsilon a_4 - \frac{G_4}{8}, \end{array} \right. \quad (12)$$

其中包含参数 R 的项是非线性项, 等式左边的一项是 β 项, 等式右边含参数 ε 的项为底摩擦项, 包含 G_i 的项是风应力强迫项.

由于在方程组(12)中的 $G_i (i=1, 2, 3, 4)$ 不能全为零, 因此该方程组是非齐次的. 且 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ 不可能是其一个解. 但我们知道, 该方程组中至少存在一个定常解 A_i , 不妨令

$$a_i(t) = A_i + \alpha_i(t), \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

于是可得齐次方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\pi}{3} \alpha_2 - \varepsilon \alpha_1, \\ \eta \frac{d\alpha_2}{dt} = \gamma (\alpha_1 \alpha_3 + A_1 \alpha_3 + A_3 \alpha_1) + \frac{2\pi}{15} \alpha_1 - \varepsilon \alpha_2, \\ \eta \frac{d\alpha_3}{dt} = -\gamma (\alpha_1 \alpha_2 + A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) - \frac{2\pi}{15} \alpha_4 - \varepsilon \alpha_3, \\ \eta \frac{d\alpha_4}{dt} = \frac{\pi}{12} \alpha_3 - \varepsilon \alpha_4, \end{array} \right. \quad (14)$$

其中 $\gamma = (9\pi^2 / 80)R$.

三、定 常 解

定常解是谱方程组(11)或(12)的全体解集合中的一个关键性子集，它们可以作为模式参数 ε , λ_n 和 G_n 的代数函数解析地或数值地确定。

令 $\alpha_i(t)=0$, ($i=1, 2, 3, 4$), 那末谱方程组(12)变成

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} A_2 + \varepsilon A_1 = -\frac{G_1}{2}, \\ -\gamma A_1 A_3 - \frac{2\pi}{15} A_1 + \varepsilon A_2 = -\frac{G_2}{5}, \\ -\gamma A_1 A_2 + \frac{2\pi}{15} A_4 + \varepsilon A_3 = -\frac{G_3}{5}, \\ -\frac{\pi}{12} A_3 + \varepsilon A_4 = -\frac{G_4}{8}. \end{array} \right. \quad (15)$$

用 γ 乘(15)式的每个方程，并定义 $A \equiv \gamma A_1$, $B \equiv \gamma A_2$, $C \equiv \gamma A_3$, $D \equiv \gamma A_4$. 那么，(15)式变成

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} B + \varepsilon A = -\frac{\gamma_1}{2}, \\ -AC - \frac{2\pi}{15} A + \varepsilon B = -\frac{\gamma_2}{5}, \\ AB + \frac{2\pi}{15} D + \varepsilon C = -\frac{\gamma_3}{5}, \\ -\frac{\pi}{12} C + \varepsilon D = -\frac{\gamma_4}{8}. \end{array} \right. \quad (16)$$

其中 $\gamma_i = \gamma G_i$, $i=1, 2, 3, 4$.

由方程(16)可以得到：

$$B = -\frac{3}{\pi} \left(\varepsilon A + \frac{\gamma_1}{2} \right), \quad (17)$$

$$C = -\frac{2\pi}{15} - \frac{3}{\pi} \varepsilon^2 + \left(\frac{\gamma_2}{5} - \frac{3}{\pi} \varepsilon \frac{\gamma_1}{2} \right) \frac{1}{A}, \quad (18)$$

$$D = \frac{\pi c}{12\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon} \gamma_4, \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned} (\varepsilon A)^3 + \frac{\gamma_1}{2} (\varepsilon A)^2 + & \left[\left(\frac{\pi^2}{90} + \varepsilon^2 \right) \left(\frac{2\pi^2}{45} + \varepsilon^2 \right) + \left(\frac{\pi^2}{180} \gamma_4 - \frac{\pi}{15} \gamma_1 \varepsilon \right) \right] \varepsilon A \\ & + \left(\frac{\pi^2}{90} + \varepsilon^2 \right) \left(\varepsilon^2 \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\pi}{15} \varepsilon \gamma_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

依赖于参数 ε, R 和 $\gamma_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的选取, 方程(20)可能有一个实解, 也可能有三个实解, 这也就是说方程组(16)可能有三个或一个定常解. 例如, 如果取 $\gamma_1=\gamma=1$, $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$ 和 $\varepsilon \ll 1$, 可以得到一个近似解是

$$A \approx 0, \quad B = -\frac{3\pi}{2} \gamma_1, \quad C \approx 0, \quad D \approx 0. \quad (21)$$

这就是著名的 Sverdrup 解. 其本质反映了 β 项与风应力旋度之间的平衡. 对于小 ε , (21)式总是(16)式的一个解.

图 2 给出当 $\gamma_1=\gamma=1$ 和 $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$ 时方程(20)的实根分布, 图中数字 1 和 3 分别表示有一个实根和 3 个实根存在. 不难看到当 $\varepsilon < 0.16$ 和 $R > 0.79$ 时, 方程(20)可存在三个实根, 而其余情形仅有一个实根存在. 图 3(1)给出的是当 $G_1=1$ 和 $G_2=G_3=G_4=0$ 时的风应力强迫函数 G , 这时是一个类似于气旋式的分布, 似可视为一个对称台风分布, 因此这是一种很有代表性的典型强迫函数场. 讨论这种强迫下的海流状况与研究台风下海流有某种相似性, 是很有实际意义的, 也是本文所着重讨论的.

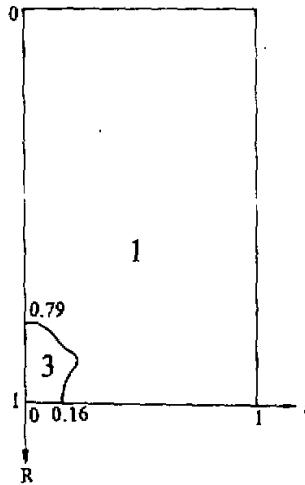


图 2 $\gamma_1=\gamma=1, \gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$ 时, 方程(20)的实根分布

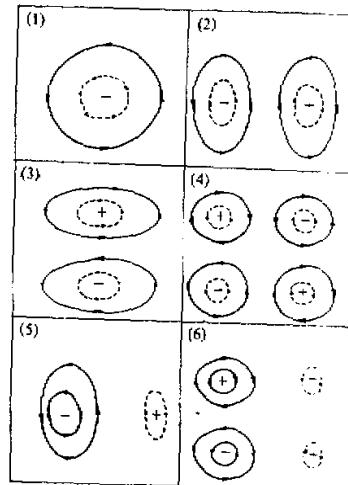


图 3 六种风应力强迫函数图

- (1) $G_1=1, G_2=G_3=G_4=0$.
- (2) $G_2=1, G_1=G_3=G_4=0$.
- (3) $G_3=1, G_1=G_2=G_4=0$.
- (4) $G_4=1, G_1=G_2=G_3=0$.
- (5) $G_1=G_2=1, G_3=G_4=0$.
- (6) $G_1=G_2=G_3=G_4=1$.

以下涉及方程组(11)、(12)和(15)时,如不作特别声明均指 $G_1 = 1$ 和 $G_2 = G_3 = G_4 = 0$ 情形.

表 1 若干典型参数值下方程(20)的实根数值

R	ε	A	B	C	D
0.22	0.01	-0.00285	-0.116605	-0.000029	-0.000775
0.78	0.01	-0.009878	-0.413418	-0.000372	-0.009740
0.90	0.1	-1.35152	-0.348068	-0.393125	-1.02920
		-3.51926	-0.141065	-0.414871	-1.08613
		-0.125703	-0.465126	-0.0488607	-0.127917
0.98	0.01	-11.1107	-0.413442	-0.418507	-10.9565
		-43.2831	-0.106218	-0.418854	-10.9656
		-0.012417	-0.519422	-0.000588	-0.015384

表 1 给出了一些有代表性的参数 R 和 ε 取值情况下的方程(20)的实根具体数值. 从表 1 可见, 当 $R=0.90, \varepsilon=0.1$ 时和 $R=0.98, \varepsilon=0.01$ 时方程(20)存在三组实根, 而在 $R=0.22, \varepsilon=0.01$ 和 $R=0.78, \varepsilon=0.01$ 时只有一组实根. 考察出现三个实根的情形, 都有如下特点: (1) 在第一组解中, $|A|$ 和 $|D|$ 数值较大, 量级相当, 由方程组(16)的第 1 式计算可知, 此时 β 项比底摩擦项大三倍左右, 因此 β 项与摩擦项均参与和风应力强迫项的平衡. (2) 在第二组解中, $|A|$ 数值突出地大, 大大超过 $|B|, |C|, |D|$ 的数值, 由方程组(16)的第 1 式计算可知, 这时底摩擦项与风应力项量级相当, 由第 2, 3 式计算可知, 非线性项量级较大, 并与 β 项相平衡. (3) 在第三组解中, $|B|$ 的数值较大, 这正是 Sverdrup 解, 它反映了 β 项与风应力项相平衡.

图 4 和图 5 分别给出在 $\gamma_1=\gamma=1, \gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$ 时不同 ε 和 R 取值情况下的流函数图. 从图 4 可见, 当 $\varepsilon=1$ (即底摩擦强) 时, 仅有一个中心位于区域中央的涡旋存在, 而当 ε 减小时, 会出现两个分开的涡旋, 其中一个为气旋式的, 另一个为反气旋式的. 对于 $R=1$ 的情形, 有三组流函数存在, 但图 4 中仅给出对应稳定解的一组, 而另两组流函数未给出. 在图 5 中分别给出当 $R=0.9, \varepsilon=0.1$ 和 $R=0.98, \varepsilon=0.01$ 两种情况下的流函数分布, 因为在这两种情况下均有三个实根存在(见表 1), 故对应的也有三组流函数分布图, 从图 5 可见, 流函数有表现为一个涡旋的, 也有表现为两个、三个甚至四

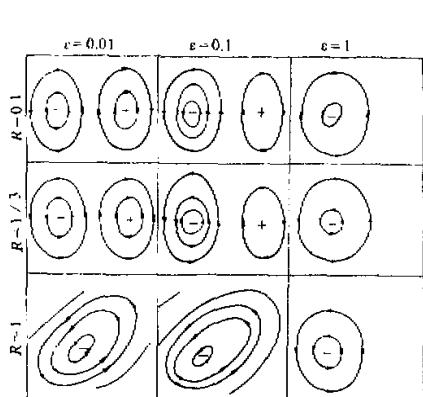


图 4 流函数图 a
 $\gamma_1=\gamma=1, \gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$

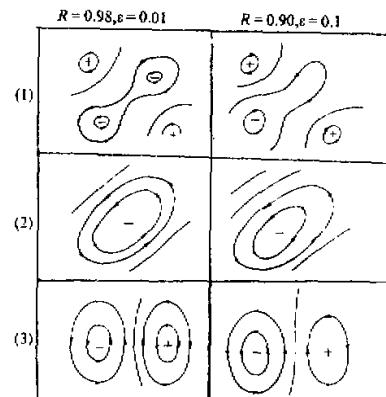


图 5 流函数图 b
 $\gamma_1=\gamma=1, \gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$

一个涡旋的, 在本文第四节中我们将进一步看到, 对应一个涡旋出现的情形, 解总是稳定的; 而对应两个涡旋出现的情形, 有时是稳定的, 有时却是不稳定的; 而对应三个、四个涡旋出现的情形总是不稳定的.

四、定常解的稳定性

用 A, B, C, D 表示方程(16)的一组定常解, 现在来分析一下, 它们关于无穷小扰动的稳定性问题. 与方程(14)对应, 有如下线性化的方程组:

$$\begin{cases} \eta \frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\pi}{3} \alpha_2 - \varepsilon \alpha_1, \\ \eta \frac{d\alpha_2}{dt} = \gamma(A_1 \alpha_3 + A_3 \alpha_1) + \frac{2\pi}{15} \alpha_1 - \varepsilon \alpha_2, \\ \eta \frac{d\alpha_3}{dt} = -\gamma(A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) - \frac{2\pi}{15} \alpha_4 - \varepsilon \alpha_3, \\ \eta \frac{d\alpha_4}{dt} = \frac{\pi}{12} \alpha_3 - \varepsilon \alpha_4. \end{cases} \quad (22)$$

用 γ 遍乘(22)式的各个方程, 并重新定义变数如下:

$$\begin{cases} A = \gamma A_1, B = \gamma A_2, C = \gamma A_3, D = \gamma A_4; \\ A' = \gamma \alpha_1, B' = \gamma \alpha_2, C' = \gamma \alpha_3, D' = \gamma \alpha_4. \end{cases} \quad (23)$$

于是可将方程组(22)改写为

$$\begin{cases} \eta \frac{dA'}{dt} = -\frac{\pi}{3} B' - \varepsilon A', \\ \eta \frac{dB'}{dt} = AC' + CA' + \frac{2\pi}{15} A' - \varepsilon B', \\ \eta \frac{dC'}{dt} = -(AB' + BA') - \frac{2\pi}{15} D' - \varepsilon C', \\ \eta \frac{dD'}{dt} = \frac{\pi}{12} C' - \varepsilon D'. \end{cases} \quad (24)$$

由于(24)式是线性常系数方程组, 其解的时间依赖性可以写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = e^{\tilde{\lambda}t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (25)$$

令 $\sigma = \varepsilon + \lambda$, 而 $\lambda = \eta \tilde{\lambda}$, 则有特征方程

$$\sigma^4 + \left(\frac{\pi^2}{18} + A^2 + \frac{\pi}{3} C \right) \sigma^2 - \frac{\pi}{3} AB\sigma + \frac{\pi^3}{270} \left(C + \frac{2\pi}{15} \right) = 0, \quad (26)$$

该方程可改写为

$$\lambda^4 + 4\varepsilon\lambda^3 + (6\varepsilon^2 + x)\lambda^2 + (4\varepsilon^3 + 2\varepsilon x - y)\lambda + \varepsilon^4 + x\varepsilon^2 - y\varepsilon + z = 0, \quad (27)$$

其中

$$x = \frac{\pi^2}{18} + A^2 + \frac{\pi}{3}C, \quad y = \frac{\pi}{3}AB,$$

$$z = \frac{\pi^3}{270} \left(C + \frac{2\pi}{15} \right), \quad (28)$$

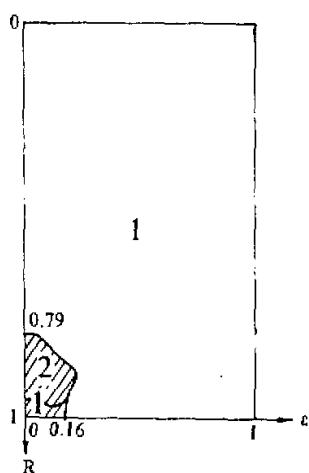


图 6 当 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ 时
方程组 (12) 的稳定解分布
阴影区为多态解区, 图上数字表示
稳定解的个数

根据常微分方程定性理论可知: 如果方程 (27) 所有的根都有负实部, 那么方程 (12) 的平衡解是渐近稳定的。利用 Hurwitz 定理^[6], 我们具体计算了在不同 ε 和 R 的取值情况下方程 (27) 所有的根是否具有负实部, 所得结果在图 6 中给出。从图 6 可见, 当 $R > 0.90$ 时, 定常方程的三个定常解中只有一个是有稳定的, 而在 $0.79 < R < 0.90$ 时, 有两个稳定的定常解。表 2 给出了在参数 R 和 ε 的若干典型取值情形下, 方程 (27) 的根是否具有负实部的判别式 Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 和 Δ_4 的具体数值。其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = 4\varepsilon, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4\varepsilon & 1 \\ 4\varepsilon^3 + 2\varepsilon x - y & 6\varepsilon^2 + x \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4\varepsilon & 1 & 0 \\ 4\varepsilon^3 + 2\varepsilon x - y & 6\varepsilon^2 + x & 4\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^4 + x\varepsilon^2 - y\varepsilon + z & 4\varepsilon^3 + 2\varepsilon x - y \end{vmatrix}, \\ \Delta_4 = (\varepsilon^4 + x\varepsilon^2 - y\varepsilon + z)\Delta_3. \end{array} \right. \quad (29)$$

表 2 若干典型参数值下方程 (27) 根的判别式

R	ε	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	方程 (12) 解的稳定性
0.22	0.01	0.04	0.011326	0.000043	0.048151	稳定
0.78	0.01	0.04	0.015257	0.000025	0.048073	稳定
0.90	0.1	0.4	0.905275	-0.082633	-0.026573	不稳定
		0.4	3.03969	6.01878	0.0735635	稳定
		0.4	0.183817	0.001682	0.041599	稳定
0.98	0.01	0.04	7.28161	-17.0336	-0.035706	不稳定
		0.04	42.2852	1380.88	0.139212	稳定
		0.04	0.017731	-0.00002	0.048023	不稳定

从表2可见, $R=0.22, \varepsilon=0.01$ 和 $R=0.78, \varepsilon=0.01$ 两种情形下出现的是 Sverdrup 解, 并且是稳定的; 而在 $R=0.90, \varepsilon=0.1$ 和 $R=0.98, \varepsilon=0.01$ 两种情形下, 第一组解总是不稳定的, 第二组解均是稳定的, 而第三组解对 $R=0.9$ 情形是稳定的, 对 $R=0.98$ 情形却是不稳定的。

总之, 当方程(12)出现一个定常解时, 一般都是 Sverdrup 解, 表现为风应力与 β 项的平衡, 并且其解总是稳定的。当出现三个定常解时, 对于 A 最大的解, 反映着很强的非线性, 并且非线性项与 β 项相平衡, 其解也总是稳定的, 然而这时的 Sverdrup 解(即第三组解)可能是稳定的, 也可能是不稳定的, 还需具体地作进一步分析。

五、小结与讨论

上面, 我们分析了一个准地转风海流方程四系数截谱近似模式的定常解及其稳定性问题。虽然是一个较为简化的模型, 但从方程(12)可见, 模式仍然包含有时间偏导数项、非线性项、 β 项、底摩擦项和风应力强迫项, 它们对方程解的性质均有着不同程度的影响。对于我们着重讨论的 $G_1=1, G_2=G_3=G_4=0$ 的情形, 可以看到当风应力项充分强及底摩擦项足够小时, 定常方程有多态解存在。文中利用数值计算的方法, 给出了多态解与参数 R 和 ε 的依赖关系图, 从这图可见, 当 R 适当大和 ε 足够小时, 存在着两个稳定的平衡解; 从流函数场看到, 与多态解相对应的流函数分布图中, 可能出现一个旋涡, 也可能出现两个甚至多个涡旋; 但稳定性分析结果表明: 出现一个涡旋时, 解一般是稳定的, 而出现多于两个涡旋时, 解一般是不稳定的。在另文中, 我们还将分析 $G_1=1, G_1=G_3=G_4=0$ 和 $G_1=G_2=1, G_3=G_4=0$ 等其它情形, 随着强迫函数和参数值的变化, 多态解分布状况有变化, 稳定解的分布状况也随之变化, 甚至会出现没有稳定的平衡解存在的参数区。此外, 本文给出的仅是带底摩擦情形的多态解分析, 在中文中我们还将给出带侧摩擦情形的多态解的分析和讨论, 并介绍若干不同性质的新结果。

致谢: 曾庆存教授审阅了本文全文, 旦纪范教授审阅过本文初稿, 并提供宝贵意见, 在此深表感谢!

参 考 文 献

- [1] Masuda, A., 1982, On the interpretation of the bimodal character of the stable Kuroshio path. *Deep-Sea Res.*, **29**, 471–484.
- [2] Chao, S.-Y., 1984, Bimodality of the Kuroshio. *J. Phys. Ocean.*, **14**, 92–103.
- [3] Yasuda, I., et al., 1985, Dynamics of the Kuroshio large meander-barotropic model I. *J. Ocean. Soc. Japan.*, **41**, 259–273.
- [4] Jong-Hwan Yoon and I. Yasuda, 1987, Dynamics of the Kuroshio Large Meander: Two-layer Model. *J. Phys. Ocean.*, **17**, 66–81.
- [5] Veronis, G., 1963, An analysis of wind-driven ocean circulation with a limited number of Fourier components. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 577–593.
- [6] 尤秉礼, 1982, 常微分方程补充教程, 人民教育出版社, 第334页。