

# 海-气相互作用系统可能性态的研究

林 振 山

(北京大学地球物理系)

## 提 要

本文建立了一个简单的海-气相互作用振子模式, 并利用拟能函数和 Melnikov 函数, 讨论了海-气系统的振荡、分岔和非周期性态. 分析的结果表明该气候系统存在一个唯一的分岔点和一个唯一的极限环, 其演化行为是确定性行为和类随机性行为并存.

**关键词:** 拟能; 同宿轨道; 分岔; 混沌.

## 一、引 言

Saltzman 分析了海洋温度和海冰延伸范围之间的相互作用, 建立了海温-海冰振子模式

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = \theta - \eta, \\ \frac{d\theta}{dt} = b\theta - a\eta - \eta^2\theta, \end{cases} \quad (1)$$

这里,  $\eta$  为海冰延伸纬度正弦值;  $\theta$  为平均海洋温度相对于某个参考状态的偏差值;  $a, b$  为常值参数. 1987 年, Nicolis 利用该海温-海冰振子讨论了长期气候变化, 认为该系统可引起同宿(homoclinic)分岔<sup>[1]</sup>.

本文则试图通过建立一个近似、简单的海温-气温振子模式, 来定性研究海-气相互作用系统的长期气候演化行为和可能状态.

## 二、模式的建立

忽略动力耗散因素, 大气和海洋的运动方程和能量方程为

$$\rho^a c_p^a \frac{\partial T_a}{\partial t} + u_a \frac{\partial T_a}{\partial x} + v_a \frac{\partial T_a}{\partial y} + w_a \frac{\partial T_a}{\partial z} = H_S^a + H_L^a + H_R^a, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w_a}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho^w c_p^w \frac{\partial T_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial T_s}{\partial y} + w_s \frac{\partial T_s}{\partial z} = H_S^w + H_L^w + H_R^w, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

其中  $T_a, T_s$  分别为气温、海温; 上角标  $w$  和下角标  $s$  均表示海洋所对应的物理量; 而上角标  $a$  则表示大气所对应的物理量;  $c_p$  为定压比热;  $H_s, H_L, H_R$  分别表示感热通量、潜热通量和辐射热通量。

设大气平均层高度为  $H$ , 海洋混合层深度为  $h$ , 由于感热、潜热输送是由海洋输向大气, 故而

$$-(H_s^a + H_L^a) = H_s^w + H_L^w = H_s + H_L. \quad (6)$$

对整个大气平均层和海洋混合层垂直积分(2)、(4)式, 并利用(3)、(5)式及

$$\int_0^{z_i} \left[ \frac{\partial(uT)_i}{\partial x} + \frac{\partial(vT)_i}{\partial y} + \frac{\partial(wT)_i}{\partial z} \right] dz = 0,$$

这里,  $i = a, s$ ;  $z_a = H$ ;  $z_s = h$ , 可得

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = \frac{1}{HC_p^a \rho^a} [H_R^a - (H_s + H_L)], \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{hC_p^s \rho^s} (H_s + H_L + H_R^s). \quad (8)$$

设湍流热通量和蒸发耗散分别为

$$H_s = C_p^a C_D \rho^a (T_s - T_a) |u|, \quad (9)$$

$$H_L = LC_E \rho^a [q_s(T_s) - q_a] |u|, \quad (10)$$

式中  $C_D$  为阻曳系数;  $|u|$  为近地层风速;  $\rho^a$  为大气密度;  $C_E$  为水汽交换系数;  $q_s$  是温度为  $T_s$  时的饱和比湿;  $q_a$  为近地表空气比湿。

$q_s(T_s)$  是关于  $T_s$  的指数函数, 故可将  $q_s$  展成关于  $T_s$  的幂级数函数。由于是定性研究, 故可粗略地取至一级近似, 得

$$q_s(T_s) \approx q_0 + q_1 T_s, \quad (11)$$

从而, 可将(9)、(10)式写为

$$H_s + H_L = C_1 + C_2 T_s + C_3 T_a, \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} C_1 = LC_E \rho^a (q_0 - q_a) |u|, \\ C_2 = (C_p^a C_D \rho^a + LC_E \rho^a q_1) |u|, \\ C_3 = -C_p^a C_D \rho^a |u|. \end{cases} \quad (13)$$

不失一般性, 可用下面的二个式子来分别表示地表辐射收支和大气辐射收支:

$$\begin{cases} H_R^s = R_1 + R_2 T_s^4, \\ H_R^a = R_3 + R_4 T_s^4. \end{cases} \quad (14)$$

例如为了描述文献[3]的气候振荡模式, 只要取

$$\begin{cases} R_1 = R^* [1 - g_G(1 - n) - (d_G + a)n] - R^* m, \\ R_2 = -(\epsilon \lambda - f \epsilon \lambda n), \\ R_3 = R^* [2\alpha n + \alpha_0(d_0 + \bar{d} + g_0 + \bar{g}) + m], \\ R_4 = (1 - f) \epsilon n \lambda - \epsilon' f n \lambda + G \lambda (1 - n), \end{cases} \quad (15)$$

$R^*$  为大气顶部进入地-气系统的短波辐射, 其余各符号的意义请参见文献 [2].

由 (7)、(8)、(12)、(14) 式可得

$$\begin{cases} \frac{\partial T_a}{\partial t} = A_1 + A_2 T_s + A_3 T_a + A_4 T_s^4 = f_a, \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = S_1 + S_2 T_s + S_3 T_a + S_4 T_s^4 = f_s, \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \frac{R_3 - C_1}{H C_p^a \rho^a}, & A_2 = -\frac{C_2}{H C_p^a \rho^a}, \\ A_3 = -\frac{C_3}{H C_p^a \rho^a}, & A_4 = \frac{R_4}{H C_p^a \rho^a}, \\ S_1 = \frac{C_1 + R_1}{h C_p^s \rho^s}, & S_2 = \frac{C_2}{h C_p^s \rho^s}, \\ S_3 = \frac{C_3}{h C_p^s \rho^s}, & S_4 = \frac{R_2}{h C_p^s \rho^s}. \end{cases} \quad (17)$$

将  $T_s$  和  $T_a$  分解为气候平均和距平部分:

$$\begin{cases} T_s = \bar{T} + T'_s = T_{s0} + T'_s, \\ T_a = \bar{T}_a + T'_a = T_{a0} + T'_a, \end{cases} \quad (18)$$

这里,  $T_{s0}$ ,  $T_{a0}$  为平衡态的特征量;  $T'_a$ ,  $T'_s$  为扰动量, 将  $f_s$ ,  $f_a$  作 Taylor 展开, 由于  $(T'_s)^4$ ,  $(T'_s)^3$ ,  $(T'_s)^2$  项与  $(T'_s)$  项相比分别为:  $(T'_s/\bar{T})^3/4$ ,  $(T'_s/\bar{T}_s)^2$  和  $3T'_s/(2\bar{T}_s)$ , 而  $T'_s$  至少比  $\bar{T}_s$  小一个量级, 故取至二次幂项(略去高次幂项)得

$$\begin{cases} \frac{\partial T'_a}{\partial t} = l_1 T'_a + l_2 T'_s + l_3 T'^2_s, \\ \frac{\partial T'_s}{\partial t} = l_4 T'_s + l_5 T'_a + l_6 T'^2_s, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} l_1 &= A_3, & l_2 &= A_2 + 4A_4 T_{s0}^3, \\ l_3 &= 6A_4 T_{s0}^2, & l_4 &= S_2 + 4S_4 T_{s0}^3, \\ l_5 &= S_3, & l_6 &= 6S_4 T_{s0}^2. \end{aligned}$$

方程组 (19) 就是所将要讨论的海-气相互作用系统的非线性扰动气候模式.

### 三、非线性稳定分析

为方便起见, 令  $\eta = T'_s$ ,  $\theta = T'_a$ , 则

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = l_4 \eta + l_5 \theta + l_6 \eta^2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = l_1 \theta + l_2 \eta + l_3 \eta^2. \end{cases} \quad (19')$$

显然,  $(0, 0)$  为系统(19')的一个定态点. 设在定态点  $(0, 0)$  附近发生一个微小扰动  $(\eta', \theta')$ , 则系统的线性化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta' \\ \theta' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \eta' \\ \theta' \end{pmatrix},$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

而

$$L_{11} = l_4, L_{12} = l_5, L_{21} = l_2, L_{22} = l_1.$$

设  $\lambda$  为线性化算符的特征根. 那么, 特征根所满足的方程为

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0,$$

其中

$$T = L_{11} + L_{22} = l_1 + l_4, \Delta = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = l_1l_4 - l_2l_5.$$

由稳定性理论可知, 当算子  $T < 0$ , 即  $l_4 < -l_1$  时,  $(0, 0)$  是系统的稳定平衡点. 当  $T > 0$  时,  $(0, 0)$  则是系统的不稳定点.

作为特例, 利用参数关系(15)等式子, 由  $l_4 < -l_1$  可得

$$(C_p^a C_D \rho^a + L C_E q_1 \rho^a) |u| + \frac{h C_D C_p^i \rho^i}{H} |u| < 4 T_{s0}^3 (\varepsilon \sigma - f_E \sigma n).$$

从上式可以推出几个与气象学原理一致的结论:

- (1) 近地层风速  $|u|$  越小, 平衡态  $(0, 0)$  即  $(T_{s0}, T_{a0})$  越不容易失稳.
- (2) 饱和比湿参数  $q_1$  越小, 平衡态  $(T_{s0}, T_{a0})$  越不容易失稳.
- (3) 海洋混合层厚度  $h$  与大气平均层高度  $H$  之比越小, 平衡态  $(T_{s0}, T_{a0})$  越不容易失稳.

系统的失稳, 意味着分岔的可能出现. 若参考平衡态  $(T_{s0}, T_{a0})$  对应于冰期气候, 则系统的失稳, 意味着海—气系统将逐渐远离冰期气候, 而可能进入间冰期气候——另一平衡态. 下面将进一步讨论这个问题.

#### 四、非线性扰动方程的紊动性态

方程组(19')可化为如下形式:

$$\ddot{\eta} = \varepsilon (l_1 + l_4 + 2l_2 \eta) \dot{\eta} + (l_2 l_5 - l_1 l_4) \eta + (l_3 l_5 - l_1 l_6) \eta^2, \quad (20)$$

上式即为描述海—气气候演变的一个含“阻尼”的非线性振子——“海—气”振子, 其中  $\varepsilon$  是描述阻尼量级的参数.

(19')式还可化为

$$\begin{cases} y = \frac{dv}{dt}, \\ \dot{y} = -a_1 v - b v^2 - \varepsilon (\mu + v) \dot{v}, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = l_1 l_4 - l_2 l_5, & b = (l_1 l_6 - l_3 l_5) / 2l_2, \\ \mu = -l_1 - l_4, & v = 2l_2 \eta. \end{cases} \quad (22)$$

### 1. 不计阻尼时的相空间轨道

不计阻尼(不考虑海洋的动能和热能间的转换)时,  $\epsilon = 0$ , 则系统为

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dv}{dt}, \\ \dot{v} = -a_1 v - bv^2. \end{cases} \quad (23)$$

(23)式是一个 Hamilton 系统, 其哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} a_1 v^2 + \frac{1}{3} b v^3. \quad (24)$$

在  $(y, v)$  所定义的相平面上, 有两个奇点:  $(0, 0)$  和  $(-a_1/b, 0)$ , 前者是中心, 后者为鞍点.

显然, 对任一  $H$  值的动力形态, 都可以由 (23) 式确切地求出系统的相空间轨道, 如图 1 所示. 一个特例就是  $H = 0$  (这对应于鞍点) 时的同宿轨道, 其参数方程为

$$\begin{cases} v^* = \sqrt{\frac{3}{2} \left| \frac{a_1}{b} \right|} \sec h^2 \left( \frac{\sqrt{a_1}}{2} t \right) - \left| \frac{a_1}{b} \right|, \\ y^* = -\sqrt{\frac{3 a_1^2}{2 |b|}} \sec h^2 \left( \frac{\sqrt{a_1}}{2} t \right) \operatorname{th} \left( \frac{\sqrt{a_1}}{2} t \right). \end{cases} \quad (a_1 > 0) \quad (25)$$

### 2. 拟能和拟能函数

积分 (23) 式得

$$y^2 = -a_1 v^2 - \frac{2}{3} b v^3 + E_0 = f(v),$$

这里  $E_0$  为积分常数,  $f(v)$  为拟能函数.

定义

$$E = E_0 - f(v) = a_1 v^2 + \frac{2}{3} b v^3 \quad (26)$$

为系统的拟能. 由下面的作图和讨论可以看出, 上述定义的拟能和拟能函数, 其物理意义是十分明确的.

关于系统 (19) 的拟能曲线和相轨迹之间的关系, 如图 1 所示.

从上面的  $E-v$  和  $y-v$  图可以看出, 通过对拟能  $E$  的定义, 就可以用单位质量的粒子在势场中的运动来比拟气候态的演化行为. 当“粒子”的能量不够大而在“势陷”中运动时, 相轨迹为围绕中心的闭曲线, 从而, 系统具有有界的稳定周期解. 这时, 气候的演化行为表现为稳定、持续的振荡. 而当“粒子”的能量刚好使粒子越过“势垒”时, 对应的相轨迹为过鞍点的同宿轨线. 此时, 气候系统的运动状态有两种情况: (1) 系统初始处于“势陷”一侧时, 则相轨线是闭曲线, 系统仍具有稳定的有界行波解. (2) 系统初始处于

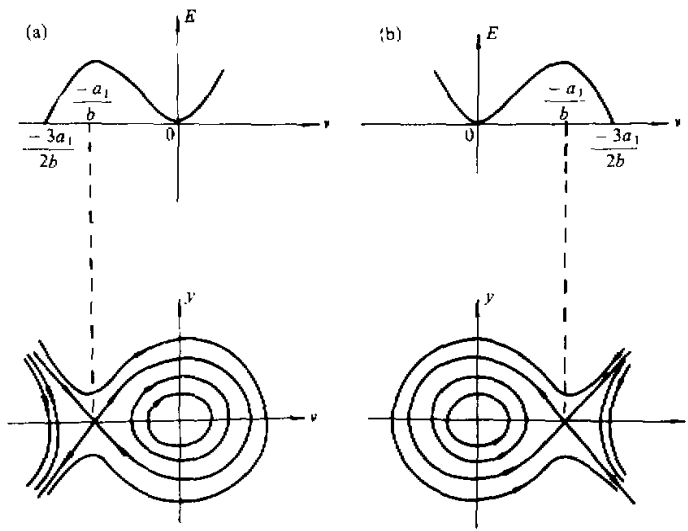


图1 拟能曲线和相轨迹之间的关系

(a)  $a_1 > 0, b > 0$ , (b)  $a_1 > 0, b < 0$ .

其中心和鞍点分别对应于拟能的极小值和极大值.

“势垒”的一侧时, 系统作单向无界运动, 从而, 不存在稳定有界周期解. 这说明了气候系统对初始条件具有敏感性.

### 3. 存在阻尼时的分岔条件

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 系统为(21)式. 由于该系统为自治系统, 故其 Melnikov 函数不显含初时刻  $t_0$ , 不妨取  $t_0 = 0$ . 由 Fredholm 择一定理, 可导出系统的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(0) &= - \int_{-\infty}^{\infty} y^* (\mu y^* + v^* y^*) dt \\ &= \frac{56}{5} a_1^{3/2} \left( \mu - \left| \frac{a_1}{b} \right| \right) - \frac{856}{35} \sqrt{\frac{3}{2}} a_1^2 |b|^{-3/2}. \end{aligned} \quad (27)$$

令  $M(0) = 0$ , 得

$$\mu_0 = \frac{107}{49} \sqrt{\frac{3}{2}} a_1^{1/2} |b|^{-3/2} + \left| \frac{a_1}{b} \right|. \quad (a_1 > 0) \quad (28)$$

所以, 在  $\mu = \mu_0 + O(q)$  附近, 系统(21)将出现分岔.

### 4. 分岔点和极限环的存在唯一性

由(28)式可知, 当  $0 < \mu < \mu_0$  时,  $M(0) > 0$ ; 当  $\mu = \mu_0$  时,  $M(0) = 0$ ; 当  $\mu > \mu_0$  时,  $M(0) < 0$ . 所以, Poincaré 映射  $P_\varepsilon^0$  的不稳定流形  $M_u$  和稳定流形  $M_s$  在  $\mu = \mu_0$  时相交. 而 Melnikov 函数表示从  $M_s$  到  $M_u$  的距离. 其方向与过同宿轨道上对应点的法线方向

相反为负, 相同为正。所以, 当  $M(0) < 0$  时,  $P_0^0$  的不稳定流形  $M_u$  和稳定流形  $M_s$  的相对位置如图 2(a) 所示。而  $M(0) > 0$  时,  $M_u$  和  $M_s$  的相对位置如图 2(b) 所示。

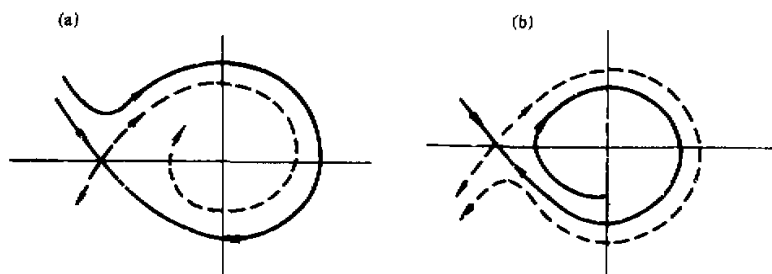


图 2 不稳定流形  $M_u$  和稳定流形  $M_s$  的相对位置

(a)  $M(0) < 0$ , (b)  $M(0) > 0$ .

综上所述可知, 系统(21)在相平面上轨线的拓扑结构当  $0 < \mu < \mu_0$  时, 与当  $\mu > \mu_0$  时的完全不同。因此,  $\mu = \mu_0$  是系统(21)的唯一分岔点。

进一步的理论分析可以证明<sup>[3]</sup>: 当  $0 < \mu < \mu_0$  时, 系统存在唯一的不稳定极限环。当  $\mu > \mu_0$  时, 系统没有周期解和极限环。

由  $\mu = \mu_0$  可推出海-气系统(21)在分岔点所满足的参数关系为

$$\begin{aligned} & \frac{C_3}{H C_p^a \rho^a} = \frac{C_2 + 4R_2 T_{s0}^3}{h C_p^s \rho^s} \\ & = \frac{107}{49} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h C_p^s \rho^s}{C_3 (R_2 + R_4)} \left[ \frac{4(C_2 - 4R_4 T_{s0}^3)^3}{27 H C_p^a \rho^a T_{s0}^3} \right]^{1/2} + \frac{4T_{s0} (4R_4 T_{s0}^3 - C_2)}{3H C_p^a \rho^a}, \end{aligned}$$

其中

$$C_2 = (C_p^a C_D \rho^a + L C_E \rho^e q_1) |u|,$$

$$C_3 = -C_p^a C_D \rho^a |u|.$$

## 5. 在周期扰动下系统的震动行为

考虑到外界对气候系统的周期扰动(如由于地球轨道的变化引起的太阳入射通量的变化), 我们将(21)式改写为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -a_1 v - b v^2 - \varepsilon [(\mu + v)y - \lambda \sin \omega t] \end{cases} \quad (29)$$

从方程(23)过渡到(29)的研究, 有助于进一步弄清相空间的结构, 弄清无限周期的同宿轨道是怎样被阻力和周期强迫所扰乱。

此时的 Melnikov 函数为

$$M(t_0; \mu, \lambda, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y^* [\lambda \sin \omega(t + t_0) - \mu y^* - v^* y^*] dt$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} y^* (\mu y^* + v^* y^*) dt + \int_{-\infty}^{\infty} y^* \lambda \sin \omega (t + t_0) dt.$$

用留数方法得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} -\lambda y^* \sin \omega (t + t_0) dt \\ &= - \sqrt{\frac{3a_1^2}{2|b|}} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left( \frac{\sqrt{a_1} t}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{\sqrt{a_1} t}{2} \right) \sin \omega (t + t_0) dt \\ &= - \sqrt{\frac{3a_1^2}{2|b|}} \frac{\lambda}{B(\omega)} \cos \omega t_0, \end{aligned}$$

其中

$$B(\omega) = \frac{a_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi \omega}{\sqrt{a_1}} \right)}{4\pi \omega^2},$$

故而

$$M(t_0; \mu, \lambda, \omega) = M(0) - \sqrt{\frac{3a_1^2}{2|b|}} \frac{\lambda}{B(\omega)} \cos \omega t_0.$$

令  $M(t_0; \mu, \lambda, \omega) = 0$ , 得

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{2|b|}{3a_1^2}} \frac{M(0)B(\omega)}{\cos \omega t_0}.$$

由于  $M(t_0; \mu, \lambda, \omega)$  与  $\varepsilon$  无关, 故在参数  $\mu, \lambda$  所张空间的某区域内, 当  $\lambda = \lambda_c$  时,  $M(t=0; \mu, \lambda, \omega)$  具有单零点.

另一方面, 当  $M=0$  时, 由于  $\left. \frac{\partial M}{\partial t_0} \right|_{t_0=0} \neq 0$ , 所以, 当  $0 < \varepsilon \ll 1$  时, (29) 式存

在横截同宿或杂宿点. 依据 Smale-Birkoff 定理, Poincaré 映象的某些迭代存在不变双曲集, 即 Smale 马蹄. 从而, (29) 式的解包含有可数无穷多的不稳定周期轨道, 不可数无穷多有界周期轨道及稠轨线. 这揭示了海-气气候系统演化行为的极端丰富性. 而这些轨线对初值条件有着极敏感的依赖性, 从而表现出非周期性行为和类随机性行为. 可见, 由确定性方程所描述的海-气气候系统, 亦存在着类随机性行为. 这就是所谓的混沌. 混沌现象的出现, 给人们以预示: 对于“海-气”振子系统的气候长期预报工作, 不可能是精确的.

显然, 当外界的周期扰动幅  $\lambda$  大于  $\lambda_c$  时, 系统 (29) 的解是紊动的. 即系统将产生种类繁多的复杂的非周期形态.

## 五、结 论

本文建立了一个近似的“海-气”相互作用气候振子模式. 为直观、形象地研究不

考虑“阻尼”及周期扰动下的非线性“海—气”振子气候系统的性态，定义了拟能和拟能函数，并发现：当该系统的拟能最小时，系统具有有界的稳定周期解，在相空间里，这对应着同宿轨道内的“吸引盘”，而当拟能最大时，气候系统将出现分岔，考虑“阻尼”作用后，通过 Melnikov 函数，求得了系统出现分岔的参数方程，并论证了该气候系统存在着一个唯一的分岔点和一个唯一的极限环，最后并考虑了外界周期扰动的存在，分析结果阐明了引起系统出现非周期形态的主要机制是：当外界的周期扰动幅  $\lambda$  大于  $\lambda_c$  时，“海—气”振子气候系统的演化行为是确定性和类随机性并存，这将给预报工作带来巨大的困难。

有关动力耗散因素对“海—气”气候系统的影响，作者已在文献 [4] 进行了一些讨论。

江西师大的李湘如教授、侯贻生教授和北京大学的刘式达教授对本文的撰写，提出了不少有益的意见，谨此致谢！

### 参 考 文 献

- [1] Nicolis C., 1987, Long-term climatic variability and chaotic dynamics, *Tellus*, **39** A, No. 1, 1—10.
- [2] Paltridge G. W., 1987, The steady-state format of global climate, *Quart. J. R. Met. Soc.*, **104**, 927—945.
- [3] 沈家骥等, 非线性扰动方程的混沌性态, 数学学报, **31**, No. 2, 215—220.
- [4] Lin, Zhenshan 1990, Parametric relations of sea-atmosphere climatic system arising abnormal phenomena, Book of Abstracts of XV GAEGS 1990, April.

## STUDYING OF THE BEHAVIOURS AND STATES OF THE SEA-ATMOSPHERE CLIMATIC SYSTEM

Lin Zhenshan

(Department of Geophysics, Beijing University)

### Abstract

A relatively simple model of the sea-atmosphere interactive climatic oscillator is set up. By using enstrophy function and Melnikov function, the phenomena of the vibration, bifurcation and chaos of a sea-atmosphere climatic system were discussed. The major conclusions of the analysis are that the system has a only bifurcation and a only limiting cycle, and that both definite and quasi-stochastic behaviours will occur in the climatic system.

**Key words:** Enstrophy; Homoclinic orbit; Bifurcation; Chaos.