第18卷 第1期
1994 年 1 月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol. 18, No. 1
Jan. 1994

斜压大气中尺度横波扰动的发展*

王东海　　周晓平

(中国科学院大气物理研究所，北京 100080)

提　要

为探索带状中尺度扰动发生发展的可能性及其对深厚对流云团的启动和组织作用，本文利用准动量无辐散二维模式讨论了斜压切变基流上中尺度横波扰动的发展问题。首先导出波能密度和波作用量，然后利用 WKB 方法分析了波包的传播，建立波作用量方程，进而从波作用量方程出发，分别讨论了大气中各种层结下横波型扰动发展的物理背景条件。

关键词：斜压大气；准动量无辐散模式；中尺度横波扰动；波作用量方程

一、引　　言

关于中尺度扰动发展的分析讨论，是近年来中尺度动力学研究较活跃的领域。但是，由于中尺度过程其自身的复杂性，在简化方程时，由于相对无粘性和准地转运动来说，它的尺度太小；另一方面，相对于可以不计地转作用或者不计水平梯度的运动来说，它的尺度又太大。即中尺度运动既不能作为准地转，又需要考虑科里奥利力，因而给方程的简化带来一定的困难。

观测指出，很多中尺度强对流系统常组织成带状结构，例如带状雨带、飑线等。这使得我们可以近似地用二维问题来研究，即归结为平行型扰动问题。从扰动方向与基本流方向的关系上看，可以把平行型扰动简单地分为对称扰动和横向扰动，相对应的不稳定机制为对称不稳定和横波不稳定，都属于非地转不稳定。关于对称扰动发展的问题，许多人做过不少研究[1—10]，这些研究指出，对称不稳定与中尺度系统的发生发展有较为密切的关系，在一定程度上能够解释一些中尺度现象。

而对于横波型扰动发展的研究却较少。Charney[11]和 Eady[12]最早研究了天气尺度波段上横波型扰动准地转的发展问题。Kuo 和 Seitter[13]在研究中性和部分不稳定大气中曾简单地讨论过横波不稳定问题。张可苏[14]将 Eady 模型推广到非地转解域，在稳定层结下利用数值方法求得扰动相速、发展率和特征流型，发现除了天气尺度和次天气尺度上的 Eady 模态之外，在几十至几百公里的中尺度上出现非地转斜压中尺度模态。而且中尺度模态的增长率约为 Eady 模态的 4 倍，并指出这可能是启动和组织强对流云团

1990 年 7 月 11 日收到，1991 年 12 月 15 日收到再改稿.

* 部分得到国家气象局强风暴实验室资助.

的一种动力学机制。

在本文中，我们将采用多重尺度方法和WKB方法讨论非地转斜压切变基流上横波扰动的动力学。

二、 基 本 方 程

适合于讨论中尺度运动的方程组为准动量无辐散模式[13]。即完全的非弹性模式在f平面内，连续斜压层结大气中三维(x, y, z)小扰动方程组可以写为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u+wU_z-f_a v+\dfrac{\partial p'}{\partial x}=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v+fu+\dfrac{\partial p'}{\partial y}=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)w+\dfrac{g}{c_s^2}p'-\theta+\dfrac{\partial p'}{\partial z}=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\theta-M^2 v+N^2 w=Q, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，
$$(U, v, w, \theta)=\bar{\rho}\left(u', v', w', \frac{g}{\bar{\theta}}\theta'\right), \qquad M^2=-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}=fU_z,$$

$$N^2=\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}, \qquad Q=\frac{\bar{\rho}g}{c_p T}\dot{H}, \qquad f^a=f-U_y.$$

这里“$-$”表示基本场，“ ′ ”表示扰动场，$U(y, z)$为基本风场，f_a为基本场绝对涡度，c_s^2是声速的平方，$\bar{\rho}\dot{H}$为单位体积加热率。其它参量为气象常用符号。

这里我们主要讨论横波扰动的发展，做如下假定：

(1) 扰动与y无关。另外，不考虑由状态方程所决定的气压扰动对密度扰动的影响，则方程组 (1) 中略去含g/c_s^2的项；

(2) 基本流场只是z的线性分布函数，即$U=U(z)$ ，且$U_{zz}=0$；

(3) 不考虑外源的加热作用，即$Q=0$；

则在(x, z)坐标平面内，可以引入质量流函数ψ，利用连续方程可知

$$u=\psi_z, \qquad w=-\psi_x. \tag{2}$$

这样便可得到讨论横波型扰动发展的方程组

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi-fv_z+\theta_x=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v+f\psi_z=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+U\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\theta-M^2 v-N^2\psi_x=0, \end{cases} \tag{3}$$

其中算子 $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。从方程组（3）中消去$v$和$\theta$，可得到关于流函数$\psi(x,z)$的单一方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \nabla_1^2\psi + f^2\psi_{zz} + N^2\psi_{xx} + N_x^2\psi_x\right] - 2f^2 U_z \psi_{kz} = 0. \tag{4}$$

三、波能密度和波作用量

对于缓变波列，方程（4）的解可以写为

$$\psi = \mathrm{Re}\, A e^{i\theta} = a\cos(\theta + \alpha), \tag{5}$$

其中A为复振幅，θ为位相函数，而

$$a = |A|, \qquad \alpha = \arg A. \tag{6}$$

作为一阶近似，略去a和α的变化。对缓变波列，局地波数和圆频率分别定义为

$$m = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad k = \frac{\partial\theta}{\partial z}, \qquad \omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{7}$$

将（5）式代入方程（4）并利用（7）式。则可得色散关系

$$\nu^2\omega_r^2 - N^2 m^2 - f^2 k^2 = 0, \tag{8}$$

其中

$$\nu^2 = m^2 + k^2, \qquad \omega_r = \omega - mU, \tag{9}$$

这里ν^2为波数平方的总和，ω_r为 Doppler 频率。扰动场的单位质量动能和有效位能分别可表示为

$$K' = \frac{1}{2\bar{\rho}^2}(u^2 + v^2 + w^2), \tag{10}$$

$$P' = \frac{1}{2\bar{\rho}^2 N^2}\theta^2. \tag{11}$$

由（5）式代入（2）式，可得到

$$u = -ak\sin(\theta + \alpha), \tag{12}$$

$$w = am\sin(\theta + \alpha), \tag{13}$$

（5）式代入方程组（3）之第二式求得

$$v = \frac{fak}{\omega_r}\cos(\theta + \alpha), \tag{14}$$

（5）式和（14）式代入方程组（3）之第一式求得

$$\theta = -\frac{a v^2 \omega_r}{m}\cos(\theta+\alpha) + \frac{f^2 a k^2}{m\omega_r}\cos(\theta+\alpha). \tag{15}$$

在 (14)、(15) 式的求解过程中，积分常数取为零。

将 (12) — (14) 式代入 (10) 式；(15) 式代入 (11) 式；并利用 (8) 式，可得

$$K' = \frac{1}{2\bar{\rho}^2}\left[a^2 v^2 \sin^2(\theta+\alpha) + \frac{f^2 a^2 k^2}{\omega_r^2}\cos^2(\theta+\alpha)\right], \tag{16}$$

$$P' = \frac{a^2 N^2 m^2}{2\bar{\rho}^2 \omega_r^2}\cos^2(\theta+\alpha). \tag{17}$$

(16)、(17) 两式相加，并利用 (8) 式可得到扰动场的总能量

$$E' = K' + P' = \frac{1}{2\bar{\rho}^2} v^2 a^2. \tag{18}$$

E'在一个周期 τ 内的平均值，即波能密度为

$$\hat{E}' = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E' \mathrm{d}t = \frac{1}{2\bar{\rho}^2} v^2 a^2. \tag{19}$$

为了讨论的方便，定义

$$\tilde{\varepsilon} = 2\bar{\rho}^2 \hat{E}' = v^2 a^2, \tag{20}$$

这即为横波的波作用量，它正比于振幅a的平方，是波能密度的$2\bar{\rho}^2$倍。

自从引入波作用量 (Wave action) 或波作用量密度 (Wave action density) 概念以来，不少人利用它讨论了某些波动的动力学性质。其中曾庆存[16-18]、陈英仪和巢纪平[19,20]将波作用量与稳定度联系在一起，讨论了 Rossby 波和涡旋运动的稳定性问题。刘式适和刘式达[21]把波作用量应用于讨论地球流体惯性重力内波的稳定性。

下面将利用多重尺度方法和 WKB 方法导出波作用量方程，并由此讨论中尺度横波扰动的发展。

四、波 包 分 析

利用多重尺度方法，引进“伸长”距离坐标和“延迟”时间坐标

$$X = \varepsilon x, \qquad Z = \varepsilon z, \qquad T = \varepsilon t. \tag{21}$$

利用波包概念，质量流函数可以写成波包的形式：

$$\psi = A(X, Z, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X, Z, T)/\varepsilon}, \tag{22}$$

其中，ε 为小参数；$A(X, Z, T)$为波幅，$\theta(X, Z, T)$为位相函数，它们都是自变量

(x, z, t)的缓变函数，而对于新坐标(X, Z, T)是正常变化函数。

由表达式（7）可得如下一些关系式：

$$\frac{\partial m}{\partial z}=\frac{\partial k}{\partial x}, \qquad \frac{\partial m}{\partial t}=-\frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial k}{\partial t}=-\frac{\partial \omega}{\partial z}, \tag{23}$$

m, k, ω都是新自变量(X, Z, T)的正常变化函数，在演变过程中它们将会起变化。注意到（23）式中的x, z, t换为X, Z, T也照样成立，即有

$$\frac{\partial m}{\partial Z}=\frac{\partial k}{\partial X}, \qquad \frac{\partial m}{\partial T}=-\frac{\partial \omega}{\partial X}, \qquad \frac{\partial k}{\partial T}=-\frac{\partial \omega}{\partial Z}. \tag{24}$$

将（21）、（22）式代入方程（4），经过整理化简，得

$$\begin{aligned}
&-i\omega_r(\omega_r^2 v^2 A-N^2 m^2 A-f^2 k^2 A)+\varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}(\omega_r^2 v^2 A)}{\mathrm{d}T}-\frac{\mathrm{d}(N^2 m^2 A)}{\mathrm{d}T}-\frac{\mathrm{d}(f^2 k^2 A)}{\mathrm{d}T}\right.\\
&\quad+\omega_r\frac{\mathrm{d}(\omega_r v^2 A)}{\mathrm{d}T}+\omega_r^2\frac{\mathrm{d}(v^2 A)}{\mathrm{d}T}+\omega_r N^2\frac{\partial(mA)}{\partial X}+\omega_r N^2 m\frac{\partial A}{\partial X}\\
&\quad\left.+\omega_r f^2\left(\frac{\partial(kA)}{\partial Z}+k\frac{\partial A}{\partial Z}\right)-\omega_r^3\left(\frac{\partial(mA)}{\partial X}+\frac{\partial(kA)}{\partial Z}+m\frac{\partial A}{\partial X}+k\frac{\partial}{\partial Z}\right)\right]=0,
\end{aligned} \tag{25}$$

这里

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}=\frac{\partial}{\partial T}+U\frac{\partial}{\partial X}.$$

利用 WKB 方法，将A按小参数ε的幂次展开，即

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2 A_2+\cdots. \tag{26}$$

（26）式代入（25）式，可得到$O(1)$问题：

$$\omega_r^2 v^2-N^2 m^2-f^2 k^2=0. \tag{27}$$

此即为局地瞬时色散方程。与（8）式完全一样，形式上与二维(x, z)平面内惯性重力内波的色散关系一样[22]。由此得到局地频率关系式

$$\omega=Um\pm\sqrt{\frac{N^2 m^2+f^2 k^2}{v^2}}=F(m, k, X, Z, T). \tag{28}$$

由此得到局地群速度在x, z方向的分量各为

$$\begin{cases}
c_{gx}=\dfrac{\partial \omega}{\partial m}=U+\dfrac{(N^2-\omega_r^2)m}{\omega_r v^2},\\[2ex]
c_{gz}=\dfrac{\partial \omega}{\partial k}=\dfrac{(f^2-\omega_r^2)k}{\omega_r v^2}.
\end{cases} \tag{29}$$

令$\dfrac{\mathrm{D_g}}{\mathrm{D}T}=\dfrac{\partial}{\partial T}+c_{gx}\dfrac{\partial}{\partial X}+c_{gz}\dfrac{\partial}{\partial Z}$，则利用$\omega, m, k$的运动学关系式（24）式及

(28) 式可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{D_g}\omega}{\mathrm{D}T} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_{x,z,m,k} = \dfrac{m^2}{2\omega_r v^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial T}, \\
\dfrac{\mathrm{D_g}m}{\mathrm{D}T} = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)_{z,m,k,T} = -\dfrac{m^2}{2\omega_r v^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial X}, \\
\dfrac{\mathrm{D_g}k}{\mathrm{D}T} = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right)_{x,m,k,T} = -mU_z - \dfrac{m^2}{2\omega_r v^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial Z}.
\end{cases}
\tag{30}
$$

五、波作用量方程

(26) 式代入 (25) 式，并利用 (27) 式整理得到$O(\varepsilon)$问题:

$$
2\frac{\mathrm{d}v^2 A_0}{\mathrm{d}T} + 2\frac{(N^2-\omega_r^2)m}{\omega_r}\frac{\partial A_0}{\partial X} + 2\frac{(f^2-\omega_r^2)k}{\omega_r}\frac{\partial A_0}{\partial Z}
+ \left(\frac{v^2}{\omega_r}\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}T} + \frac{N^2-\omega_r^2}{\omega_r}\frac{\partial m}{\partial X} + \frac{f^2-\omega_r^2}{\omega_r}\frac{\partial k}{\partial Z}\right)A_0 = 0. \tag{31}
$$

上式乘以A_0 (如果A_0为复数，乘以A_0的共轭复数A_0^*，再加上 (31) 式的复共轭式乘以A_0，并除以 2)，得

$$
\frac{\mathrm{d}v^2|A_0|^2}{\mathrm{d}T} + \frac{(N^2-\omega_r^2)m}{\omega_r}\frac{\partial|A_0|^2}{\partial X} + 2\frac{(f^2-\omega_r^2)k}{\omega_r}\frac{\partial|A_0|^2}{\partial Z}
+ \left(\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}T} + \frac{v^2}{\omega_r}\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}T} + \frac{N^2-\omega_r^2}{\omega_r}\frac{\partial m}{\partial X} + \frac{f^2-\omega_r^2}{\omega_r}\frac{\partial k}{\partial Z}\right)|A_0|^2 = 0. \tag{32}
$$

由 (29) 式可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial X}c_{gx}v^2|A_0|^2 = U\dfrac{\partial v^2|A_0|^2}{\partial X} + \dfrac{(N^2-\omega_r^2)m}{\omega_r}\dfrac{\partial|A_0|^2}{\partial X} \\
\qquad + \left[\dfrac{m}{\omega_r}\dfrac{\partial N^2}{\partial X} - \dfrac{(N^2+\omega_r^2)m}{\omega_r^2}\dfrac{\partial\omega_r}{\partial X} + \dfrac{N^2-\omega_r^2}{\omega_r}\dfrac{\partial m}{\partial X}\right]|A_0|^2, \\
\dfrac{\partial}{\partial Z}c_{gx}v^2|A_0|^2 = \dfrac{(f^2-\omega_r^2)k}{\omega_r}\dfrac{\partial|A_0|^2}{\partial Z} \\
\qquad + \left[-\dfrac{(f^2+\omega_r^2)k}{\omega_r^2}\dfrac{\partial\omega_r}{\partial Z} + \dfrac{f^2-\omega_r^2}{\omega_r}\dfrac{\partial k}{\partial Z}\right]|A_0|^2.
\end{cases}
\tag{33}
$$

于是 (32) 式变为

$$
\frac{\partial v^2|A_0|^2}{\partial T} + \nabla\cdot\vec{c}_g v^2|A_0|^2 + \left[\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}T} + \frac{v^2}{\omega_r}\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}T} - \frac{m}{\omega_r^2}\frac{\partial N^2}{\partial X}\right.
$$

$$+\frac{(N^2+\omega_r^2)m}{\omega_r^2}\frac{\partial\omega_r}{\partial X}+\frac{(f^2+\omega_r^2)k}{\omega_r^2}\frac{\partial\omega_r}{\partial Z}\Bigg]|A_0|^2=0. \tag{34}$$

利用（27）式得

$$\frac{1}{\omega_r}\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}T}=\frac{m^2}{2\omega_r^2v^2}\frac{\mathrm{d}N^2}{\mathrm{d}T}+\frac{N^2}{2\omega_r^2v^2}\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t}+\frac{f^2}{2\omega_r^2v^2}\frac{\mathrm{d}k^2}{\mathrm{d}T}-\frac{1}{2v^2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}T}. \tag{35}$$

利用（9）式和（24）式可得

$$\frac{\partial\omega_r}{\partial Z}=-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}-mU_Z, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\omega_r}{\partial X}=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}T}, \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}T}=2m\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}T}+2k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}. \tag{38}$$

将（35）—（38）式代入（34）式，整理得

$$\frac{\partial v^2|A_0|^2}{\partial T}+\nabla\cdot\vec{c}_g v^2|A_0|^2+\left[\frac{m^2}{2\omega_r^2}\frac{\mathrm{d}N^2}{\mathrm{d}T}-\frac{m}{\omega_r}\frac{\partial N^2}{\partial X}-\frac{f^2+\omega_r^2}{\omega_r^2}mkU_Z\right]|A_0|^2=0. \tag{39}$$

利用（20）式，可得

$$\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}+\nabla\cdot\vec{c}_g\tilde{\varepsilon}=-\frac{m^2|A^0|^2}{2\omega_r^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}+\left(-U\frac{m^2}{2\omega_r^2}+\frac{m}{\omega_r}\right)|A_0|^2\frac{\partial N^2}{\partial X}+\frac{f^2+\omega_r^2}{\omega_r^2}mkU_Z|A_0|^2. \tag{40}$$

从上式可知，$\tilde{\varepsilon}$除了与$\nabla\cdot\vec{c}_g\tilde{\varepsilon}$有关外，还与层结参数$N^2$的时空变化及基本风场的分布有关。

六、横波扰动发展分析

对于方程（4），利用正规模(normal mode)方法，可得到与（8）式或（27）式相同的色散关系。用传统的稳定度分析，可知当$N^2>0$，即层结是稳定时，波是稳定的；当$N^2<0$，即层结是不稳定，且$|N^2m^2|>f^2k^2$时，波是不稳定的。这种简单的稳定性分析，忽略了基本态的时空变化，而利用波作用量讨论稳定度，则同时可考虑基本态的时空变化。

假设所考虑的波包区域边界上扰动为零，即，$A\equiv0$，则由（40）式取积分得

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint_{\sigma}\Big[-\frac{m^2}{2\omega_r^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}+(-U\frac{m^2}{2\omega_r^2}+\frac{m}{\omega_r})\frac{\partial N^2}{\partial X}$$
$$+\frac{f^2+\omega_r^2}{\omega_r^2}mkU_Z\Big]|A_0|^2\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{41}$$

巢纪平[22]、刘式适等[21]在讨论重力惯性波时曾得到类似的结果。对于（41）式右端首项，即层结参数的非常定项，他们都有过讨论，巢纪平还利用一次暴雨过程阐述了该项的作用。在这里，我们只讨论（41）式右端后两项的作用。

1. 层结参数N^2为常数的情形

这时我们有

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint_{\sigma}\frac{f^2+\omega_r^2}{\omega_r^2}|A_0|^2mkU_Z\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{42}$$

天气学分析表明，有一类中尺度对流系统经常与低空急流联系在一起，而且往往和低空的切变线、辐合线或中尺度低涡相联系。因此我们感兴趣的是低空急流的下方，即$U_Z>0$的情形。

(1) 对于稳定层结，$N^2>0$

这时由（27）式可知$\omega_r^2>0$。因而扰动发展与否只跟m，k的符号有关。m为x方向的波数，总取为正数，因此，只有$k>0$，即扰动位相向上向西倾斜时，整个区域上波的能量增加，波将发展。

(2) 对于不稳定层结，$N^2<0$

(a) 当$\omega_r^2>0$时，由（27）式可知$|N^2m^2|<f^2k^2$，即水平波长相对较长或纬度相对较高的情形。结论与（1）同。

(b) 当$\omega_r^2<0$时，$|N^2m^2|>f^2k^2$，即水平波长相对较短或纬度相对较低的情形，由（42）式可得

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint_{\sigma}\Big(-\frac{f^2}{|\omega_r^2|}+1\Big)|A_0|^2kmU_Z\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{43}$$

因此，当$f^2<|\omega_r^2|$时，位相线向上向西倾斜的扰动将发展；当$f^2>|\omega_r^2|$时，位相线向上向东倾斜的扰动将发展。

(3) 对于中性层结，$N^2=0$

这时$\omega_r^2=f^2k^2/v^2$，因而（42）式变为

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint_{\sigma}\Big(2+\frac{m^2}{k^2}\Big)mkU_Z|A_0|^2\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{44}$$

因而，短波（m较大）更有利于扰动的发展。

2. 层结参数N^2常定但随时间变化，且$U_Z=0$

（41）式变为

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint\limits_{\sigma}\left(-U\frac{m^2}{2\omega_r^2}+\frac{m}{\omega_r}\right)|A_0|^2\frac{\partial N^2}{\partial X}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{45}$$

整理可得

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint\limits_{\sigma}\frac{m^2|A_0|^2}{\omega_r^2}\left(c-\frac{3}{2}U\right)|A_0|^2\frac{\partial N^2}{\partial X}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{46}$$

这里$c=\omega/m$，为波的相速度。

(1) *对于稳定层结*，$N^2>0$

这时有$\omega_r^2>0$，只有当$\partial N^2/\partial X>0$且$c>\frac{3}{2}U$时，或当$\partial N^2/\partial X<0$且$c<\frac{3}{2}U$时，波才能发展。

(2) *对于不稳定层结*，$N^2<0$

这时（46）式可写成

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=-\iint\limits_{\sigma}\frac{m^2|A_0|^2}{\omega_r^2}\left(c-\frac{3}{2}U\right)\frac{\partial|N^2|}{\partial X}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z, \tag{47}$$

a）当$\omega_r^2>0$时，只有当$\partial|N^2|/\partial X>0$且$c<\frac{3}{2}U$时，或当$\partial|N^2|/\partial X<0$且$c>\frac{3}{2}U$时，波才能发展。

b）当$\omega_r^2<0$时，则$(c-\frac{3}{2}U)$和$\partial|N^2|/X$同号时波才能发展。

3. f的作用

在（42）式中，只有右端末项跟f有关。即

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z=\iint\limits_{\sigma}\frac{f^2}{\omega_r^2}mkU_Z|A_0|^2\mathrm{d}X\mathrm{d}Z. \tag{48}$$

可见，在一定的天气背景下，f的作用视ω_r^2的符号，即 Doppler 频率平方的符号而定。

当$\omega_r^2>0$，即稳定层结或满足$|N^2m^2|<f^2k^2$的不稳定层结时，对于位相线向上向西倾斜的扰动，f有利于扰动的发展；而对于向上向东倾斜的扰动，f起稳定的作用。

当$\omega_r^2<0$，即满足$|N^2m^2|>f^2k^2$的不稳定层结时，或者相对而言，对于中纬度不稳定层结下的中尺度扰动（m较大）来说，f对向上向西倾斜的扰动起稳定的作用；而对于向上向东倾斜的扰动，f利于发展。

七、结 语

本文采用多重尺度方法和WKB方法研究沿基本流发生、发展和传播的中尺度扰动。导出了波作用量所满足的方程，当基本场是均匀的且层结参数N^2是常定时，波作用量具有守恒性。并应用波作用量方程，分别讨论了各种层结条件下扰动发展的条件。

应该指出，本文的研究基本上还是探索性的。另外，实际大气中，如飑线类型的强对流系统只是准二维结构，基流常与扰动有一交角，因而在第三维方向上所表现的动力学特征也会对扰动的发展起重要作用。这是有待进一步研究的问题。

参 考 文 献

[1] Kuo, H. L., 1954, Symmetric disturbances in a thin layer of fluid subject to a horizontal temperature gradient and rotation, *J. Meteor.*, **11**, 399–411.

[2] Ooyama, K., 1966, On the stability of baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability, *J. Atmos. Sci.*, **23**, 43–53.

[3] Hoskins, B. J., 1974, The role of potential vorticity in symmetric stability and instability, *Quart. J. R. Met. Soc.*, **100**, 480–482.

[4] Bennetts, D. A. and B. J. Hoskins, 1979, Conditional Symmetric instability —a possible explanation for frontal rainbaids, *Quart. J. R. Met. Soc.*, **105**, 945–962.

[5] Emanuel, K. E., 1979, Inertial instability and mesoscale convection systems, Part I: linear theory of inertial instability in ratating viscose fluids, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 2425–2449.

[6] Ogura, Y., Ham–ming Juang, Kesu Zhang and Sa–Tz Soong, 1982, Possible triggering mechanisms for severe storms in SESAMEAVE IV (9–10 May 1979), *Bull. Amer. Met. Soc.*, **63**, 503–515.

[7] 许泰、周晓平，1982，非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定，大气科学，6, 355–367.

[8] 张可苏，1988，斜压气流的中尺度稳定性 I.对称不稳定，气象学报，46, 258–266.

[9] 刘健、张可苏，1988，梅西锋对流活动的一种可能触发机制——关于非均匀层结、复杂环境风场下对称不稳定的一些研究，大气科学（特刊），202–215.

[10] 孙立潭、赵瑞星，1989，中尺度扰动的对称发展，气象学报，47, 394–401.

[11] Charney, T. G., 1947, The dynamics of long waves in a baroclinic, westerly current, *J. Meteor.*, **4**, 135–162.

[12] Eady, E.T., 1949, Long waves and cyclone waves, *Tellus*, **1**, 33–52.

[13] Kuo, H. L. and K. L. Seitter, 1985, Instability of shearing geostrophic currents in neutral and partly unstable atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 331–345.

[14] 张可苏，1988，斜压气流的中尺度稳定性 II. 横波型不稳定，气象学报，46, 385–392.

[15] 张可苏，1980，大气动力学模式的比较研究，中国科学，第3期，277–287.

[16] Zeng Qingcun, 1982, On the evolution and interaction of disturbances and zonal flow in rotating barotropic atmosphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 24–31.

[17] Zeng Qingcun, 1983, The evolution of Rossby–wave packet in a three–dimensional baroclinic atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 73–84.

[18] Zeng Qingcun, 1983, The development characteristics of quasi–geostrophic baroclinic disturbances, *Tellus*, 35A, 5, 337–349.

[19] 陈英仪、巢纪平，1983，螺旋 Rossby 波的波作用守恒和稳定性，中国科学（B辑），7，663–672.

[20] 陈英仪，1984，涡旋运动中的波作用密度守恒及稳定性，中国科学（B辑），5, 476–483.

[21] 刘式适、刘式达，1987，地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性，大气科学，11，12–21.

[22] 巢纪平，1980，非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用，大气科学，4, 230–237.

The Development of Mesoscale Transversal Disturbances in the Baroclinic Atmosphere

Wang Donghai and Zhou Xiaoping

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

In this paper, the development problems of mesoscale transversal disturbances on baroclinic shearing basic flow are investigated with the nonmomentum–divergence two–dimensional model. First, the wave action density or the wave action is derived. Second, the wave packet propagation is analyzed and the equation of the wave action is established by the WKB method. And then, using the equaiton of the wave action, the environmental conditions of the development of the transversal mesoscale disturbance with all kinds of stratified atmosphere are discussed, respectively.

Key words: baroclinic atmosphere; non–momentum–divergence equations; mesoscale transversal disturbance; equation of the wave action.