

正压模式中慢波的离散谱及其特征函数

张 铭 李荣凤 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提 要

本文对正压模式中慢波的离散谱及其特征函数作了数值计算, 结果发现, 在低速线性缓变切变基流的情形下, 正压原始方程中慢波可有离散谱存在。本文还给出了在该基流下算得的谱点和特征函数, 并与准地转模式的计算结果进行了比较。

关键词: 离散谱; 特征函数; 慢波。

一、引 言

研究正压模式的谱点和特征波动不仅在大气动力学方面有重要的理论意义, 在数值天气预报的客观分析和初值处理方面也有很大的实用价值, 且日益引起人们的重视。有关这方面的论述请参考本文所引文献[1—4], 在此不再赘述。在文献[1]、[2]中我们已对 β 通道中正压原始方程在低速线性切变基流下的特征值和特征函数进行了计算和研究, 并得到了许多有意义的结果。在那里曾庆存用摄动法研究了低速缓变基流的谱点和特征函数。他指出, 只有低速基流同时还是缓变的才能由摄动法求得慢波的离散谱, 而当低速基流是非缓变的, 则或者慢波离散谱不存在, 或者得用另外的摄动法求解。这里的慢波即为涡旋波, 在准地转情形下即为 Rossby 波。文献[5]则对正压准地转模式的谱点和特征函数作了研究, 并得到了慢波的离散谱点。在文献[1]和[2]中所取的基流为 $U = 0.3 + 0.3y$, 在这种情况下没有算得正压原始方程模式中慢波的离散谱, 这也许是由于基流虽为低速但非缓变之故。在本文中我们对 β 通道中的正压原始方程仍采用文献[1]、[2]中的模式(用无量纲形式的方程)和数值计算方法并又取了多种形式的基流作了数值计算。为了节省篇幅, 计算所用的模式及其说明本文均省略, 请参见文献[1]和[2]。计算发现, 当基流的切变较小时慢波确有离散谱出现, 这与用摄动法得到的结论相一致。本文还计算了正压准地转模式的谱点和特征函数, 并对这两个模式的计算结果做了比较和讨论。

二、正压原始方程中慢波的离散谱点

采用文献[1]、[2]中无量纲的正压原始方程模式对以下3种基流 U 做了数值计算:

1992年5月25日收到, 9月16日收到修改稿。

本工作得到国家基础性研究攀登计划项目的部分资助。

- 第1种: $U = 0.3 + 0.3y$,
 第2种: $U = 0.3 + 0.1y$,
 第3种: $U = 0.3 + 0.01y$,

这里, $0 \leq y \leq 1$, 计算时恒取 $C_{00}^2 = 1$, 波数 $m = 2$, 科里奥利参数 f 则取为 1 或 $1 + 0.3y$ (后者即取 $\beta = 0.3$)。若不特别申明, 均用 20 层模式的结果, 因实践表明此时计算精度已可以满足要求, 第 3 种基流的情况在文献[1]、[2]中已给出, 这里为与第 2、3 种基流的情形做比较又重新作了验算。计算发现对第 1 种基流的确不存在慢波的离散谱, 而对第 2、3 种基流则存在慢波的离散谱。

图 1 是用 20、30、40、50 层模式算的, 当取基流 $U = 0.3 + 0.01y$, $f = 1$ 时的谱点的分布图。为节省图的篇幅, 传播较快的重力惯性波的谱点图上均已略去。由图可见频率 $\sigma < -3$ 和 $\sigma > 3$ 的范围是二支重力惯性波的离散谱。根据算得的特征函数的结构不难确定在 $\sigma = -1.49$ 和 $\sigma = 2.79$ 处是一对 Kelvin 波, 而在 $0.6 \leq \sigma \leq 0.62$ 的范围内则是慢波的连续谱区, 在此区间有: $\sigma/m - U(y_c) = 0$ ($0 \leq y_c \leq 1$), y_c 为方程的奇点。特别值得注意的是图上 $\sigma = 0.575$ 和 $\sigma = 0.597$ 处则仍有二个离散谱点, 它们与 $mU_{\min} = mU_0 = 0.6$ 相距很近, 也即该特征波动的相速与慢波连续谱的相速很接近, 故显然它们是慢波。这两个离散谱点就是慢波的离散谱 (此时从它们的特征函数可见, 其是准地转的, 见下文), 故而当 $U = 0.3 + 0.01y$, $f = 1$ 时慢波有两个离散谱点。

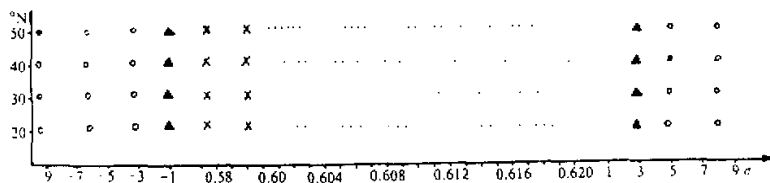


图 1 原始方程模式计算的谱点的分布

× 慢波的离散谱点; · 慢波的连续谱点; ▲ Kelvin 波的谱点; ○ 重力惯性波的谱点
 为清楚地表示谱点的分布, 图中水平坐标的尺度依不同谱点而异

下面考察 β 效应对慢波离散谱点的影响。表 1 和表 2 分别给出了在基流 $U = 0.3 + 0.01y$ 下取 $f = 1$ 和 $f = 1 + 0.3y$ (即 $\beta = 0.3$) 算得的谱点。比较表 1 和表 2 后可知, 考虑 β 后表现为离散谱的快波谱点的个数没有变化, 波速的变化也不大, 仅其绝对值略有增加, 但此时慢波离散谱的变化却很大, 慢波离散谱点的个数增加了, 由原先的 2 个 (其 σ 分别为 0.5746, 0.5969) 增加到 3 个 (其 σ 分别为 0.5259, 0.5819, 0.5961)。由此可见, β 效应有助于慢波离散谱的出现。其实这点不难理解, 考虑 β 效应后, 慢波的相速会变慢, 这样就有利于其相速小于基本气流的最小值, 这样有 $\frac{\sigma}{m} - U(y) \neq 0$, 此时方程无奇性。而这时特征波动就表现为离散谱。

下面考察基流的切变对慢波离散谱的影响。表 3 给出了当 $f = 1 + 0.3y$, $U = 0.3 + 0.1y$ 时用 20 层模式算得的谱点。比较表 2 和表 3 可见, 当切变增大后, 慢波连续谱

的范围变宽了 (因 $y=1$ 处 U 增大了), Kelvin 波的波速亦有所增加, 而此时慢波的离散谱却由 $U=0.3+0.01y$ 时的 3 个减少到 $U=0.3+0.1y$ 时的 1 个 (其 $\sigma=0.5956$)。以上情况表明, 在其他条件不变的情况下基流切变越小则慢波离散谱点就越多, 当切变趋于零时, 基流为常数, 此时由文献[1]和[2]可知: 当 $U \neq 0$ 时慢波有无穷多个离散谱并以 U 为聚点 (参见文献[1]中图 2), 切变增大时则慢波离散谱的个数减少, 当切变增大到一定程度时则慢波仅有连续谱而无离散谱, 基流 $U=0.3+0.3y$ 的情形就是如此。文献[1]中指出, 当基流在低速缓变的情形下可用 WKBJ 方法求出特征值和特征函数的近似解, 此时慢波有离散谱。 $U=0.3+0.01y$ 和 $U=0.3+0.1y$ 均可认为基流是缓变的。本文的数值计算也的确得到了慢波的离散谱。但基流 $U=0.3+0.3y$ 不可认为是缓变的 (因此时 $\Delta U = U_{\max} - U_{\min} = 0.3$ 与 $\bar{U} = 0.5 \times (U_{\max} + U_{\min}) = 0.45$ 有同一数量级)。本文的计算表明此时慢波无离散谱, WKBJ 方法不适用。

三、低速缓变线性切变 基流下的特征函数

下面讨论正压原始方程中在低速缓变线性切变基流下的特征函数。首先给出 $f=1$, $U=0.3+0.01y$ 的计算结果。图 2 和图 3 分别给出了此时仅有的二个慢波离散谱的结构。由图可见, 当 $\sigma=0.5746$ 时 (图 2) 慢波离散谱的特征函数在 y 方向是半个波, 而 $\sigma=0.5969$ 时 (图 3) 则其为一个波。由此可见, σ 越大慢波的离散谱在 y 方向的节点越多, 结构越复杂。这点不难理解, 当基流 U 为常数在准地转 β 通道模式中有

表 1 $U=0.3+0.01y$, $f=1$, $N=20$

原始方程模式计算的谱点的值

-43.42	44.63	-42.11	43.33	-41.03
42.25	-40.01	41.24	-38.89	40.12
-37.54	38.76	-35.93	37.15	-34.09
35.31	-32.03	33.25	30.98	-29.76
-27.31	28.53	-24.68	25.90	-21.90
23.12	-18.98	20.20	-15.96	17.18
-12.84	14.06	10.89	-9.670	-6.500
7.719	-3.510	4.717	2.794	-1.491
0.5746	0.5969	0.6190	0.6176	0.6008
0.6164	0.6018	0.6152	0.6029	0.6140
0.6040	0.6128	0.6051	0.6117	0.6106
0.6061	0.6084	0.6095	0.6072	

注: $\sigma \leq -3.510$ 和 $\sigma \geq 4.717$ 为二支重力惯性波的谱点; $\sigma = 2.794, -1.491$ 为 Kelvin 波的谱点; $\sigma = 0.5747, 0.5969$ 为慢波离散谱的谱点; $0.6 < \sigma < 0.62$ 为慢波连续谱的谱点。

表 2 $U=0.3+0.01y$, $f=1+0.3y$, $N=20$

原始方程模式计算的谱点的值

-44.19	45.40	44.01	-42.80	-41.62
42.83	-40.52	41.74	-39.36	40.58
-37.99	39.22	-36.38	37.60	-34.52
35.74	-32.43	33.65	-30.14	31.36
-27.66	28.88	-25.00	26.22	23.41
-22.19	-19.24	20.46	-16.17	17.39
-13.02	14.24	-9.812	11.04	7.838
-6.607	-3.584	4.826	2.831	-1.505
0.5259	0.5820	0.5961	0.6192	0.6177
0.6163	0.6149	0.6004	0.6018	0.6136
0.6124	0.6029	0.6111	0.6041	0.6075
0.6087	0.6064	0.6099	0.6052	

注: $\sigma \leq -3.584$ 和 $\sigma \geq 4.826$ 为二支重力惯性波的谱点; $\sigma = 2.831, -1.505$ 为 Kelvin 波的谱点; $\sigma = 0.52597, 0.5820, 0.5961$ 为慢波离散谱的谱点; $0.6 < \sigma < 0.62$ 为慢波连续谱的谱点。

表 3 $U = 0.3 + 0.1y$, $f = 1 + 0.3y$, $N = 20$

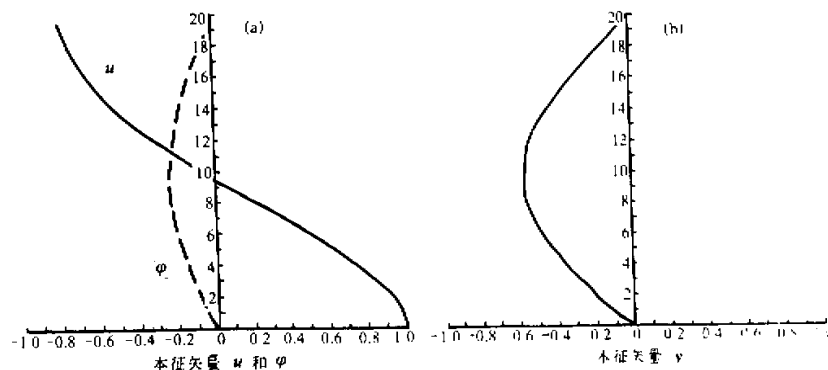
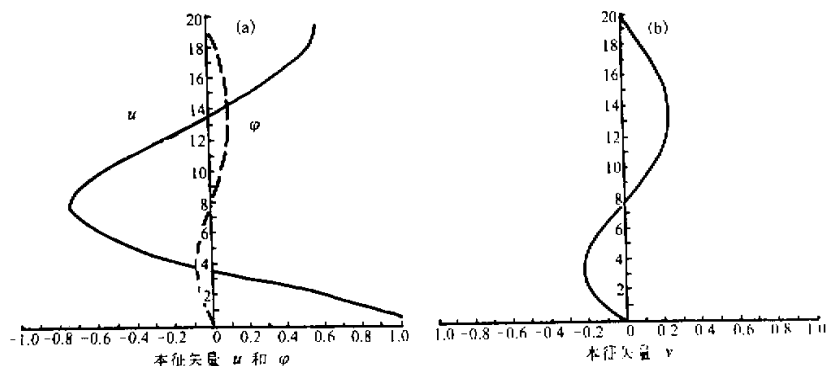
原始方程模式计算的谱点的值

-45.04	46.32	-43.54	44.88	-42.25
43.63	-41.03	42.45	-39.81	41.24
-38.42	39.85	-36.79	38.21	-34.92
36.33	-32.81	34.22	-30.49	31.90
-27.97	29.38	-25.28	26.68	-22.42
23.83	20.84	-19.43	-16.32	17.73
-13.12	14.53	-9.868	11.28	8.030
-6.614	-3.551	4.974	-1.413	2.932
0.7893	0.7777	0.5956	0.7665	0.7556
0.6105	0.7448	0.6206	0.7341	0.6307
0.6408	0.7235	0.6510	0.7130	0.6818
0.6612	0.6922	0.7025	0.6715	

注: $\sigma \leq -3.551$ 和 $\sigma \geq 4.974$ 为两支重力惯性波的谱点;
 $\sigma = 2.932, -1.413$ 为 Kelvin 波的谱点; $\sigma = 0.5956$ 为慢
 波离散谱的谱点; $0.6 < \sigma < 0.8$ 为慢波连续谱的谱点。

$$\sigma = m \left(U - \frac{\beta}{m^2 + n^2 \pi^2} \right),$$

n 越大, y 方向的节点越多, 故由上式可见 σ 越大, n 越大, 在 y 方向节点越多。从图上还可看到, 这些特征函数在 y 方向的变化大体上仍有简谐波的形式, 但与标准简谐波相比仍有一些畸变, 这是由于基流的切变造成的。由图还可见这些特征函数 φ 的波型与 v 的波型相似, 仅差一个比例因子, 这反映了这些波动的准地转性质, 并体现了慢波的特点, 而图上 u 的波型的位相则大致与 v (或 φ) 的位相相差 $\pi/2$ 。

图 2 对应于 $\sigma = 0.5746$ 的慢波离散谱函数的结构图 3 对应于 $\sigma = 0.5969$ 的慢波离散谱函数的结构

为便于比较在此还给出沿基流传的一个重力惯播的 Kelvin 波 (其 $\sigma=2.794$) 和最慢波 (其 $\sigma=4.717$) 的波型 (参见图 4、图 5)。由图 4 可见在低速线性缓变切变基流中, Kelvin 波的 u 与 φ 大体在 y 方向仍是指数变化, 而 v 很小。当基流为零时 Kelvin 波的 u 、 φ 在 y 方向呈指数变化而 v 为零。由图 5 可见此时重力惯性波的波型在 y 方向仍呈准简谐波动, 但与慢波离散谱不同的是此时 φ 与 v 波型的位相大致相差 $\pi/2$, 而这正反应了重力惯性波的非地转性。

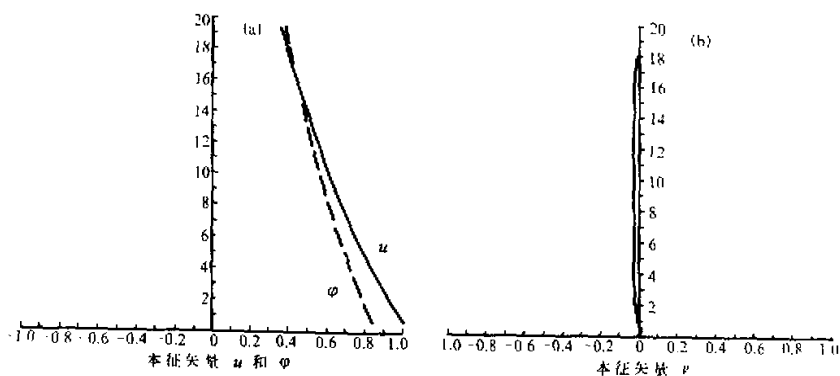


图 4 Kelvin 波的结构

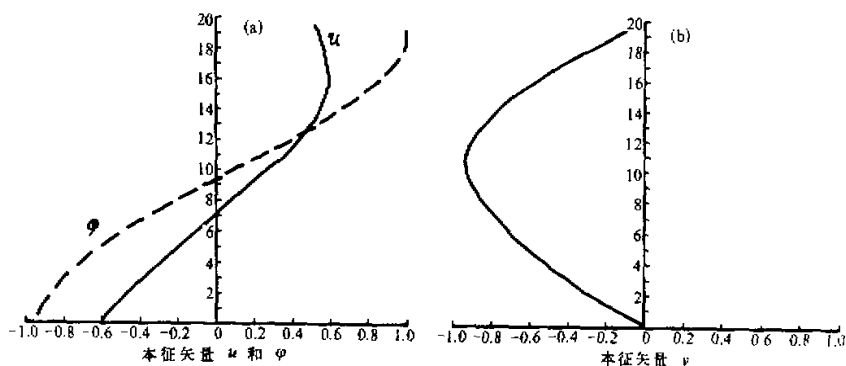
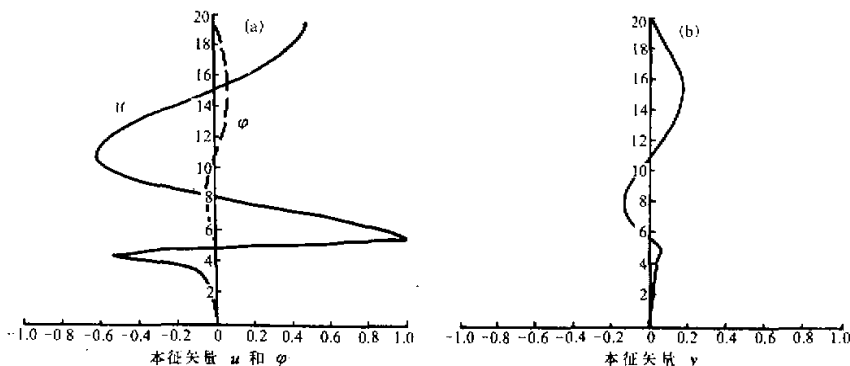


图 5 最慢的重力惯性波的结构

慢波除有离散谱之外还有连续谱, 图 6 给出了 $\sigma=0.6051$ 时连续谱的特征函数。在线性缓变切变基流中, 慢波连续谱的特征函数与文献[2]中给出的有相似之处, 它们均是广义解, 解存在不可微的奇点, 且它们均是准地转的 (v 与 φ 的波型相似), 但也有不同之处, 在缓变的情形下特征函数在 y 方向有波动出现, 这是与文献[2]中基流为 $U=0.3+0.3y$ 时连续谱的波型不同的 (可参见文献[2]中的图 4)。

计算中还发现, β 效应对慢波谱函数波形结构的影响并不大。当取 $f=1+0.3y$ ($\beta=0.3$), $U=0.3+0.01y$ 时算得的慢波离散谱点的特征函数与不考虑 β 效应时 (即取

图 6 对应于 $\sigma=0.6051$ 的慢波离散谱函数的结构

$f=1$) 的非常相似。这点不难理解, 当基流为零时, 则不管有无 β , 特征波动的波型均为正弦波, 这是众所周知的事实。

四、与准地转模式的比较

文献[5]计算并讨论了准地转模式中的谱点与特征函数, 在那个模式中慢波有离散谱。故将原始方程模式与准地转模式做一比较是很有意义的。为便于比较, 本文采用以下准地转模式^[3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} + U \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial U}{\partial y} - \beta y v_0 - f_0 v_1 = 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + U \frac{\partial v_0}{\partial x} + \beta y u_0 + f_0 u_1 = 0, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + C_0^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \\ f_0 u_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \\ f_0 v_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

将方程组 (1) 消元, 可得以下关于单一未知数 ϕ_0 的方程:

$$\left(\Delta - \frac{f_0^2}{C_0^2} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \left(\beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2)$$

这里 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。

令 $\phi_0 = \phi(y) e^{im(x-ct)}$, 则有

$$\left[\left(U(y) - c \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - m^2 \right) + \frac{f_0^2}{C_0^2} c + \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \right] \varphi(y) = 0, \quad (3)$$

于是有以下广义特征值问题^[3]:

$$\begin{cases} \left[U \frac{d^2}{dy^2} + \beta - \left(m^2 U + \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \right] \varphi = c \left[\frac{d^2}{dy^2} - \left(m^2 + \frac{f_0^2}{C_0^2} \right) \right] \varphi, \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

将 (4) 式离散化则可将微分方程的广义特征值问题化成以下矩阵的广义特征值问题:

$$(B - cD)\varphi = 0, \quad (5)$$

这里 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{N-1})^T$, 矩阵 B 、 D 为

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & U_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ U_2 & \alpha_2 & U_2 & \cdots & 0 \\ 0 & U_3 & \alpha_3 & U_3 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & U_{N-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & U_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \gamma_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_3 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \gamma_{N-1} \end{bmatrix},$$

N 为模式离散化后在 y 方向分层的数目,

$$\alpha_j = h^2 \left[\beta - \left(m^2 U_j + \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_j \right) \right] - 2U_j, \quad \gamma_j = -h^2 \left(m^2 + \frac{f_0^2}{C_0^2} \right) - 2.$$

其中 $h = 1/N$ 为 y 方向的格距。若基流为线性切变则 $(d^2 U / dy^2)_j \equiv 0$ 。

特征值问题 (5) 与文献[5]中的特征值问题本质是相同的, 虽然从形式上看二者有些差异。下面给出用该准地转模式计算的结果。为与上述的原始方程模式作比较, 以下计算中均取 $C_0^2 = 1$, $m = 2$ 。

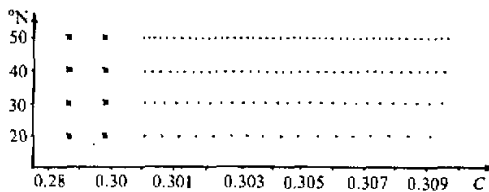


图 7 准地转模式计算的谱点分布
 $U = 0.3 + 0.01y$, $f = 1$, $N = 20, 30, 40, 50$
 × 慢波的离散谱点; · 慢波连续谱点

图 7 是取 $f = 1$, $U = 0.3 + 0.01y$ 时用 20—50 层模式算得的谱点分布。此时有 2 个离散谱点, 其 c 分别约为 0.287 和 0.298 (注意, 这里的特征值为波速 c , 乘以 m 后即 σ 。由于计算中取 $m = 2$, 故相应的 σ 则约为 0.574 和 0.596)。当模式取 20 层时算得的特征值见表 4。将图 7 和表 4 与图 1 和表 1 比较后可见, 采用

准地转模式则快波 (包括 Kelvin 波) 均被滤除, 仅慢波 (包括离散谱和连续谱) 得以保存下来。在准地转模式中慢波离散谱的相速则略有减少, 采用 20 层方案的原始方程模式算得的慢波的离散谱的相速为 0.2873 和 0.29845, 而相应准地转模式算的则为 0.2869 和 0.2981。图 8 为此时用准地转模式算得的 φ 的特征函数, 这里把计算得到的

全部特征函数都综合画在一张图上。从该图可见, 有两个离散谱, 其波型分别为半个波和一个波。其余的则是连续谱的波型。该图与文献[5]中的图 2 很相似。

当基流不变取 $f=1+0.3y$ ($\beta=0.3$) 时准地转模式算得的谱点见表 5, 此时有 4 个离散谱, 其相速分别为 0.2670, 0.2919, 0.2980, 0.2997, 而相应的原始方程模式则仅有 3 个慢波的离散谱, 其相速分别为 0.26295, 0.2910 和 0.29805 (参见表 2, 但那是 σ , 除以 m ($m=2$) 后即相速)。由此可见准地转模式中慢波的离散谱较原始方程模式中的更易出现。这是由于在准地转模式中慢波的相速较原始方程模式中要慢的缘故 (可比较本文中的表 1 与表 4、表 2 与表 5, 注意表 4、表 5 中的值要乘 $m=2$ 换算成 σ), 这样在准地转模式中慢波的相速 c 恒小于 $U(y)$ 则更容易满足。准地转模式中慢波特征函数的结构则与原始方程模式中的差别并不大 (参见图 8 及图 2、图 3、图 6)。

当基流取 $U=0.3+0.3y$, $f=1$ 时则在准地转模式中慢波亦无离散谱出现, 此时算得的全部特征函数均是连续谱, 其结构与相应原始方程中慢波的特征函数十分相似。

计算表明, 在大尺度低速基流的情形下, 原始方程模式和准地转模式算得的慢波的谱点和特征函数二者差别不大, 然而对于快波, 准地转模式则完全将其滤去了。在非线性情形下由于快波与慢波有相互作用, 滤去了快波势必不可能准确地描写慢波的演变, 故准地转模式有一定的精度范围。至于造成这两个模式差别的原因, 请参阅文献[3]中泛函空间中特征量和摄动法收敛性问题这一节, 本文在此不再赘述。

通过以上讨论, 可有以下主要结论:

- (1) 在低速线性缓变切变基流中, 正压原始方程中的慢波可有离散谱出现。这与用 WKBJ 方法得到的结果相一致。
- (2) 在该情形下, 基流切变越小, 慢波的离散谱点个数就越多, 考虑 β 后有利于慢波离散谱点个数的增加。

表 4 准地转模式计算的谱点值, $U=0.3+0.01y$, $f=1$

0.2869	0.2981	0.3001	0.3006	0.3011
0.3091	0.3017	0.3084	0.3022	0.3078
0.3028	0.3072	0.3033	0.3066	0.3038
0.3061	0.3044	0.3055	0.3049	

注: $c=0.2869, 0.2981$ 为慢波离散谱的谱点, 其余为连续谱点。

表 5 准地转模式计算的谱点值,
 $U=0.3+0.01y$, $f=1+0.3y$

0.2670	0.2919	0.2980	0.2997	0.3004
0.3009	0.3015	0.3088	0.3020	0.3081
0.3026	0.3074	0.3032	0.3068	0.3038
0.3061	0.3043	0.3049	0.3055	

注: $c=0.2670, 0.2919, 0.2980, 0.2997$ 为慢波离散谱的谱点, 其余为连续谱点。

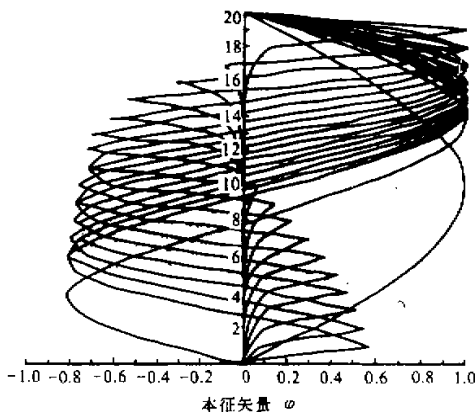


图 8 准地转模式计算的 φ 的谱函数结构

(3) 在大尺度低速基流的情形下, 原始方程中慢波谱函数的结构与准地转模式中的差别不大, 这表明对慢波而言准地转模式是原始方程模式的一个较好的近似, 但准地转模式中慢波离散谱的个数有时可比原始方程多。

当基流存在切变时, 即使对线性切变的简单情形, 要解析地求解本文中的特征问题也是十分困难的。用 WKB 方法虽可在基流缓变的情形下得到近似解, 但从本文的讨论可见当基流切变较大时 (如 $U = 0.3 + 0.3y$), 则基流不能认为是缓变的, 该方法不能用, 故本文采用数值计算的方法来近似求解并给出了计算的结果。这些结果对我们加深了解切变基流下扰动的性质和结构是很有用的。但对这些结果作进一步的理论分析尚比较困难, 这也是我们今后要做的工作。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存、李荣凤、张铭, 1990, 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数, I: 谱点的分布, 大气科学, 14, No.2, 129—142.
- [2] 曾庆存、李荣凤、张铭, 1991, 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数, II: 谱和谱函数结构的分析, 大气科学, 15, No.1, 1—15.
- [3] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社, 260—262, 283—287, 310—313.
- [4] 曾庆存, 1991, 有关中尺度动力学中的几个基本问题及其他, 空军气象学院学报, 12, No.3, 67—72.
- [5] 卢佩生、卢理、曾庆存, 1986, 正压准地转模式的谱和扰动的演变, 中国科学, B 辑, 第 11 期, 1225—1233.

Discrete Spectra and Their Characteristic Functions of Slow Waves in Barotropic Models

Zhang Ming, Li Rongfeng and Zeng Qingcun

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

In this paper discrete spectra and their characteristic functions of slow waves in barotropic models are calculated. It is found by numerical calculations that in the case of slowly varying low-speed basic flow with linear shear, there are discrete spectra of slow waves in the barotropic primitive model. Here spectra and their characteristic functions are given in the basic flow and they are checked against ones in the quasi-geostrophic model.

Key words: discrete spectrum; characteristic function; slow wave.