

有效的正压原始方程拟能 守恒保真（拟）谱模式*

钟 青

（中国科学院大气物理研究所，北京 100080）

提 要

本工作遵循保真计算原理与方法，对正压原始方程气象传统全球（拟）谱模式方案进行改造，构造了正压原始方程拟能完全守恒（拟）谱模式新型保真计算方案，解决了正压原始方程的（非线性）计算稳定性问题和拟能守恒整体性质保持问题，改进了相应正压原始方程气象传统全球（拟）谱模式方案的计算效能。新型保真方案的数值实验表明，计算实践中，新方案在解决拟能守恒问题的同时，可解决（非线性）计算稳定问题，并在一定条件下可解决非线性计算收敛性问题。进一步的比较数值实验还表明，计算实践中，新型保真计算方案在提高相应气象传统方案的计算精度、减少计算量、延长其计算时效、解决其由计算方法引入的“气候漂移”问题等诸多方面具有应用潜力。本工作原理也适用于斜压原始方程的情形。

关键词：非线性；计算稳定性；计算收敛性；拟能守恒保真模式；长时效；气候漂移。

一、引 言

非线性计算稳定性与非线性计算收敛性问题一直是计算数学界与计算物理界尚在致力解决的高散计算基本问题，高散系统保持原系统特征性质问题也是高散计算基本问题之一。近来的工作^[1-6]在这方面已不断有所进步与突破。

继以往国际国内构造某些瞬时（加权）平方守恒计算格式^[7-9]，以及认识到在控制方程一种正定表示形式下进一步采用克兰克-尼科尔森隐式格式可获得隐式完全平方守恒格式^[9-10]的工作，曾庆存和张学洪^[11]进一步提出“瞬时线性化”方法，找到了实现克兰克-尼科尔森隐式完全平方守恒方案的一种途径。以后，王斌和季仲贞^[2]提出采用加耗散的方式可构造显式完全平方守恒计算格式，建立了一个在发展问题控制方程一种特定表示形式下显式平方守恒格式构造（定理）方案，并具体实现了一个相应的时空差分显式平方守恒格式。

在大气动力学中具有能量、拟能等整体（加权）平方守恒性质的同一发展、演变问题可以有各种表示形式，如，特定的 IAP 形式（能量形式），以及业务与研究中广泛采用的不属于特定类的流函数形式、（半）动量形式等等；而且，高散计算格式也有半

1992年3月10日收到，1992年12月3日收到再改稿。

* 本工作得到国家“七五”、“八五”攻关项目及中国科学院大气物理研究所所长择优基金部分资助。

隐式、显式与隐式之分, 常用与不常用之分。考虑到计算格式的好坏与其相应的控制方程在何种表达形式下离散关系密切, 与采用何类格式关系密切, 如, 在通量或平流形式下差分离散效果大不一样; 采用半隐式或显式格式计算效果大不一样; 考虑到对于常用的非特定类的表示形式问题, 经方程变换间接应用此特定构造法在技术上可行性问题, 如, 在对于数值天气预报常用的谱表示形式下模式的改造问题, 经方程变换间接应用此特定构造法在实践上仅工作量问题几乎就是不可想象的。钟青^[3-6]引入了两类辅助构造算子, 在解决了发展问题完全平方守恒格式半隐式构造方案建立问题的同时, 建立了可同时适用于在发展问题控制方程的特定和非特定类表述形式下, 直接离散构造半隐式、显式和隐式完全平方守恒计算格式的构造(定理)方案, 并对其不断加以完善。实际上, 前述特定完全平方守恒隐式或显式(定理)方案也都可作为这些(定理)方案的特例给出。更为重要的是这些工作还揭示出, 采用直接法构造实现的二次完全平方守恒计算格式具有同时解决非线性计算稳定性与非线性计算收敛性二个前述离散计算基本问题, 以及经济计算格式问题方面的效用; 并进一步提出保真计算格式概念, 建立了可以适用于发展问题平方与非平方整体特征性质保持的任意阶时间差分精度的保真计算格式的一般补偿构造原理和方法, 且应用该补偿保真计算理论, 分别具体构造与实现了关于(加权)平方或非平方整体守恒性质的相应时间差分—空间拟谱展开保真方案^[6]。

本文工作遵循保真计算原理与方法^[6], 改造了一气象传统(拟)谱模式, 实现了拟能完全守恒(拟)谱模式, 解决了相应非线性计算稳定性问题和拟能守恒特征性质的保持问题; 并试图展示能量完全守恒类(拟)谱模式在改进了相应传统方案计算效能, 解决诸如“气候漂移”问题, 延长计算时效问题, 提高计算精度问题, 建立经济计算格式问题上的潜力。本文工作遵循的保真计算原理和相应方法还适用于正压原始方程其他特征性质保持问题与斜压原始方程情形特征性质保持问题。

二、控制方程(组)

描述具有自由表面的均匀不可压缩地球流体运动的正压原始(“浅水”)方程形如

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -f\vec{k} \times \vec{V} - \nabla\Phi, \quad (1a)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi \nabla \cdot \vec{V}. \quad (1b)$$

其中 $\vec{V}$ 是水平风矢量, 分别具有向东与向北的速度分量 u 和 v , Φ 是自由表面的位势高度, f 是科里奥利参数, $\vec{k}$ 是垂直单位矢量, ∇ 是水平梯度算子, d/dt 是时间全导数。

在地球球面坐标系里, 式(1)等价变换形式如下:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [U(\nabla^2 \psi + f)] + \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} [V(\nabla^2 \psi + f)] \right\}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [V(\nabla^2 \psi + f)] - \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} [U(\nabla^2 \psi + f)] \right\}$$

$$-\nabla^2 \left[\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \Phi' \right], \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U \Phi') + \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} (V \Phi') \right] - \bar{\Phi} D. \quad (2c)$$

其中独立自变量 λ 、 φ 和 t 分别为经度、纬度和时间; $\mu = \sin \varphi$; a 是地球半径, ψ 和 χ 分别为流函数与速度势; $\zeta = \nabla^2 \psi$ 为相对涡度的垂直分量, $D = \nabla^2 \chi$ 为水平散度, $\bar{\Phi}$ 为不依赖于时间的全球平均位势场, Φ' 为时变的扰动位势场, $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$, 变量 U 、 V 满足

$$U = -\frac{\cos^2 \varphi}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (3a)$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\cos^2 \varphi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu}. \quad (3b)$$

方程组(1)或(2)具有拟能、能量、角动量和质量守恒整体性质表示如下:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\zeta + \beta)^2}{\Phi} 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}, \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \Phi + \frac{1}{2} \Phi'^2 \right] 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}, \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(u \cos \varphi + \Omega \cos^2 \varphi) 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}, \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi' 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}. \quad (7)$$

对于正压无辐散运动($D=0$), 其控制方程简化为式(2a), 相应拟能与能量守恒整体性质分别简化为

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \zeta^2 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) 4\pi a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \text{常量}. \quad (9)$$

而且 Rossby-Haurwitz 波此时是方程(2a)的准确解, 它也是有辐散正压原始方程组的近似解。正压原始方程能够描写大气和海洋运动的重要特征^[11]。

三、气象传统(拟)谱模式

正压原始运动方程气象传统(拟)谱半隐式模式形如^[12]

$$\frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = F \zeta_{lm}^n, \quad (10a)$$

$$\frac{D_{lm}^{n+1} - D_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = F D_{lm}^n + \frac{l(l+1)}{2a^2} (\Phi_{lm}^{n+1} + \Phi_{lm}^{n-1}), \quad (10b)$$

$$\frac{\Phi'_{lm}^{n+1} - \Phi'_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = F\Phi_{lm}^n - \bar{\Phi} \frac{D_{lm}^{n+1} + D_{lm}^{n-1}}{2}, \quad (10c)$$

其中 $F\zeta$, FD 和 $F\Phi$ 分别为非线性项

$$F\zeta = -\frac{1}{a\cos^2\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} [U(\nabla^2\psi + f)] + \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} [V(\nabla^2\psi + f)] \right\}, \quad (11a)$$

$$FD = \frac{1}{a\cos^2\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} [V(\nabla^2\psi + f)] - \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} [U(\nabla^2\psi + f)] \right\} - \nabla^2 \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)}, \quad (11b)$$

$$F\Phi = -\frac{1}{a\cos^2\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} (U\Phi') + \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} (V\Phi') \right]. \quad (11c)$$

这里, F_{lm}^n 表示为变量 F 在 n 时刻以球谐系数 $P_l^n(\mu)e^{im\lambda}$ 为基函数拟谱截断展开后的相应谱系数。这里的非线性项的谱系数是通过谱变换方法^[13]确定的。

四、拟能完全守恒 (拟) 谱模式

遵循误差补偿思想, 正压原始方程拟能完全守恒 (拟) 谱模式可构造如下:

$$\frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^n}{\Delta t} = F\zeta_{lm}^n + \varepsilon^n B\zeta_{lm}^n, \quad (12a)$$

$$\frac{D_{lm}^{n+1} - D_{lm}^n}{\Delta t} = FD_{lm}^n + \varepsilon^n BD_{lm}^n + \frac{l(l+1)}{a^2} \Phi'_{lm}^{n+1}, \quad (12b)$$

$$\frac{\Phi'_{lm}^{n+1} - \Phi'_{lm}^n}{\Delta t} = F\Phi'_{lm}^n + \varepsilon^n B\Phi'_{lm}^n - \bar{\Phi} D_{lm}^{n+1}. \quad (12c)$$

这里, 误差补偿算子 BX 取为

$$BX_{lm}^n = \frac{1}{2} (X'_{lm} + X''_{lm}) - X'_{lm}, \quad (13)$$

且 $X' = X^n + \Delta t FX^n$, $X'' = X' + \Delta t FX'$, $X = \{\zeta, D, \Phi'\}$; 误差补偿系数 ε^n 可通过迭代求解

$$\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} G_j^{(k_2)} \frac{[\zeta_{i,j}^{n+1}(\zeta^n, D^n, \Phi'^n, \varepsilon^n) + f_j]^2}{\Phi + \Phi'_{i,j}^{n+1}(\zeta^n, D^n, \Phi'^n, \varepsilon^n)} = \text{拟能初值} \quad (14)$$

确定, 对于正压无辐散情形 ε^n 可解析确定如下:

$$\varepsilon^n = -\frac{C_2}{C_1} (1 - \sqrt{1 - C_3 C_1 / C_2^2}), \quad (15)$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} G_j^{(k_2)} (B\zeta_{i,j}^n)^2, \quad (16a)$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} G_j^{(k_2)} (\zeta_{i,j}^n + \Delta t F\zeta_{i,j}^n) B\zeta_{i,j}^n, \quad (16b)$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} G_j^{(k_2)} [(\zeta_{i,j}^n + \Delta t F \zeta_{i,j}^n)^2 - \zeta_{i,j}^2]_{t=0}, \quad (16c)$$

$$G_j^{(k_2)} = \frac{2(1 - \mu_j^2)}{k_2 P_{k_2-1}(\mu_j)}, \quad (j=1, 2, \dots, k_2), \quad (17)$$

式中的 $G_j^{(k_2)}$ 为高斯权重因子。

显然, 无论是作为加权平方拟能完全守恒还是作为平方拟能完全守恒计算格式(12)都是稳定的计算格式, 都可解决正压原始方程的非线性计算稳定性问题。

五、数值实验

在 1959 年 Phillips 的工作^[14]之后, Rossby-Haurwitz 波已经成为检验关于正压原始方程计算格式的常识性方法。这主要是由于 Rossby-Haurwitz 波不仅具有明确的气象学上的意义, 而且还是绝无仅有的非线性的正压无辐散原始方程的准确解, 以及大尺度正压有辐散运动的近似解。

本文中 Rossby-Haurwitz 波数值实验的初值条件如下: 无辐散的初始速度场($D=0$)由流函数

$$\psi_0 = -a^2 A_0 \sin \varphi + a^2 A_1 \cos^{m_0} \varphi \sin \varphi \cos m_0 \lambda \quad (18)$$

确定(见图 1), 位势场 Φ_0 取为

$$\Phi_0 = \bar{\Phi} + a^2 A(\varphi) + a^2 B(\varphi) \cos m_0 \lambda + a^2 C(\varphi) \cos 2m_0 \lambda, \quad (19)$$

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} A_0 (2\Omega + A_0) \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} A_1^2 \cos^{2m_0} \varphi [(m_0 + 1) \cos^2 \varphi + (2m_0^2 - m_0 - 2) - 2m_0^2 \cos^{-2} \varphi], \quad (20)$$

$$B(\varphi) = \frac{2(\Omega + A_0) A_1}{(m_0 + 1)(m_0 + 2)} \cos^{m_0} \varphi [m_0^2 + 2m_0 + 2 - (m_0 + 1)^2 \cos^2 \varphi], \quad (21)$$

$$C(\varphi) = \frac{1}{4} A_1^2 \cos^{2m_0} \varphi [(m_0 + 1) \cos^2 \varphi - (m_0 + 2)]. \quad (22)$$

在本文工作实际计算中, 地球球面上选取经向 $K_1 = 32$ 个等距格点, 纬向 $K_2 = 26$ 个不等距高斯格点。这是为了尽可能提高经圈积分离散求和近似表示的精度。球谐函数展开采用菱形截谱方法, 最大截断波数 11。其他有关参数分别取为 $A_0 = A_1 = 3.924 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $m_0 = 4$, $a = 6371 \times 10^6 \text{ m}$, $\bar{\Phi} = 7.84 \times 10^4 \text{ m}$, $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。传统方案式(10a—c)采用的是一种传统的半步长起步方法, 也就是令 $t = \Delta t / 2$ 时刻计算初条件与 $t = 0$ 时刻计算初条件相同, 以半时间步长 $\Delta t / 2$ 起步积分一次, 然后以正常时间步长 Δt 积分下去。此外, 本

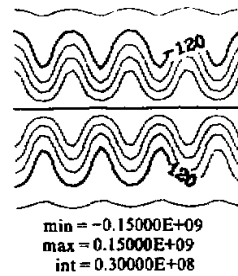


图 1 Rossby-Haurwitz 波
初始流场图

文所有的数值实验均是在 Convex-1 型数字计算机上进行的。这些模式的数值计算在主程序中均采用单精度 (7 位有效数字), 子程序中采用双精度。

以式(18)、(19)为物理初条件, 对于一般情形下 (有辐散) 的正压原始方程传统格式 (10) 与能量守恒格式 (12) 的数值积分实验显示: 传统半隐式格式中, 存在一类“气候漂移”问题, 表现为, 存在一时间积分临界步长 (约为 100 min), 当时间步长小于临界值时, 虽可较长数值积分时间内保持质量守恒性质, 但其能量、拟能和角动量积分守恒量的相对误差均呈现从振荡变化—对称振荡增长—迅速单调正增长 (非线性计算失稳) 规律, 且不能通过减小时间步长改变此规律 (实验范围: 时间步长 ≥ 10 min), 其稳定积分时间不到 190 天 (参见图 2)。当时间步长大于此临界值时, 其原守恒性质的相对误差迅速呈现单调增长 (非线性计算失稳), 其稳定积分时间远远小于 190 天。

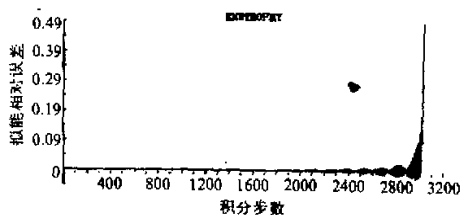


图 2 拟能全球积分相对误差-积分时间关系曲线
积分时间 = 189 d, 积分步长 = 90 min, 7 位有效数字,
正压原始方程传统半隐式拟谱模式

半隐式拟能“加权”平方守恒性质保真格式的积分时间远在 190 天以上, 稳定积分时间步长远大于相应传统半隐式格式时间积分临界步长 (约为 100 min), 并且可以保持拟能守恒性质式 (4) 与质量守恒性质式 (7) (见图 3a、b)。守恒方案 (12) 还模拟出了球面正压大气尺度守恒^[15]性质所特别允许的能量向带状环流一致转移的现象 (比较图 1 与图 3c)。

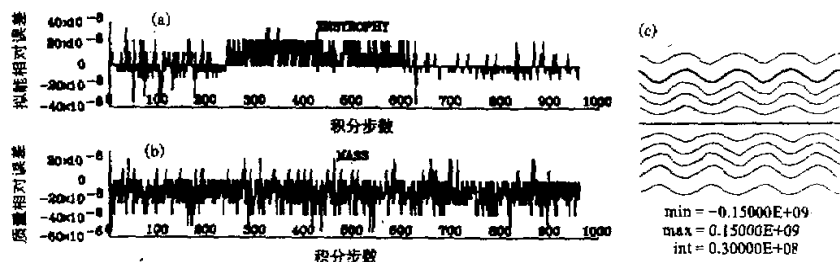


图 3 正压原始方程全球积分守恒量计算变化与计算流场
积分步长 5 h, 7 位有效数字, 拟能保真半隐式拟谱模式
(a) 200 天的拟能全球积分相对误差与积分时间关系曲线; (b) 200 天的
质量全球积分相对误差与积分时间关系曲线; (c) 第 100 天的计算流场

由于 Rossby-Haurwitz 波式 (18) 仅是有辐散正压原始方程 (1a—c) 的近似解, 因此对于稳定的数值积分, 无法根据其波型变化与否确切判断有关计算格式的优劣。虽然, 通过该项积分可在一定程度上检验有关计算格式的基本性能。为确切考察拟能守恒格式的性能, 并鉴于 Rossby-Haurwitz 波式 (18) 是无辐射散正压原始方程 (1a) 的准确解, 可以为检验该方程有关数值计算格式的性能提供一个客观的标准, 本工作利用 Rossby-Haurwitz 波式 (18) 对气象传统与拟能守恒的正压无辐散原始方程全球 (拟) 谱模式式 (10a) 和 (12a) 进行了进一步的数值积分检验。实验显示, 类似于有

辐散情形, 存在一类“气候漂移”问题, 表现为, 存在一时间积分临界步长 (约为 320 min), 当时间步长小于临界值时, 动能和拟能全球积分守恒量的相对误差均呈现从振荡变化—对称振荡增长—单调正增长 (非线性计算失稳) 规律 (参见表 1 与图 4a、b), 其波型基本保持时间约为 60 天 (< 70 天) (参见图 4c、d), 不能通过减小时间步长改变此规律以及延长此计算“时效”, 仅能减小误差振荡变化阶段的振幅 (实验范围 $\Delta t \geq 10$ min), 若令此误差初始振荡振幅减至计算机舍入误差水平 (千万分之几), 步长值需降至 3 min 以下; 此外, 当时间步长大于此临界值时, 其守恒性质的相对误差迅速呈现单调正增长 (非线性计算失稳), 其波型基本保持时间远小于 60 天。

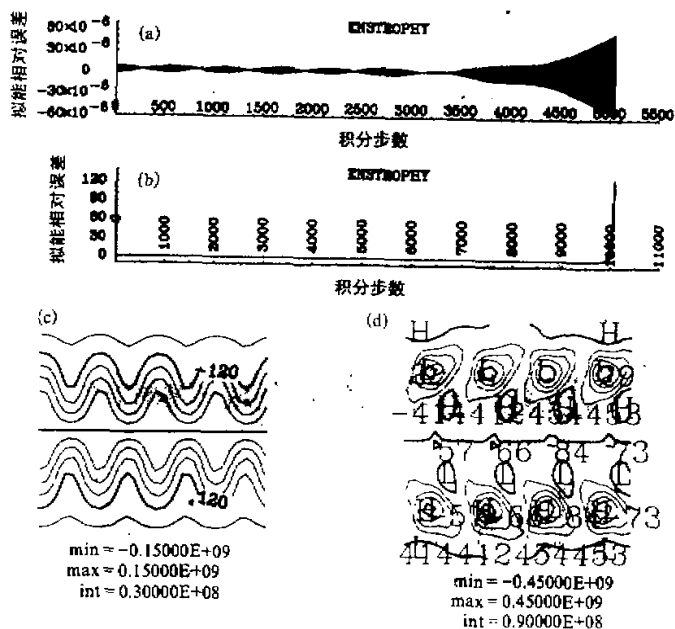


图 4 无辐散正压原始方程全球积分守恒量计算变化与计算流场

积分步长 10 min, 7 位有效数字, 传统显式拟谱模式

(a) 35 天的全球拟能积分相对误差与积分时间关系曲线; (b) 70 天的全球拟能积分相对误差与积分时间关系曲线; (c) 第 60 天的计算流场; (d) 第 70 天的计算流场

拟能平方守恒性质保真格式关于 Rossby-Haurwitz 波准确解式 (18) 的数值积分模拟实验显示: 拟能保真格式可在计算机舍入误差水平上同时保持动能和拟能守恒性质 (参见表 2 与图 5a、b), 从而完全解决非线性计算稳定问题, 且在比气象传统计算方案计算“时效”长的多的积分时间 (90 天) (比较图 4c、d 与图 5c) 内, 在计算机舍入误差水平上, 解决非线性计算收敛性问题 (参见表 2, 图 5c 并比较图 1 与图 5c), 从而在一定条件下解决“气候漂移”问题 (参见并比较图 1, 图 5a—c 与图 4a—d; 表 2 与表 1)。但非线性计算稳定性问题与非线性计算收敛性问题并无等价性 (见图 5a、d)。与气象传统计算方案比较, 动能守恒性质保真格式还可在大大减小其计算量, 提高其计算精度

的同时,大幅度地延长其计算“时效”(比较表 1、图 4a—d 与表 2、图 5a—c)。其可用收敛积分步长可达 57 小时。与传统方案相比较,本工作目前采用的构造守恒方案的附加工作量约近于原工作量,这意味着只要时间步长加大一倍或一倍以上就可以减少传统方案的计算量。

表 1 传统拟谱显式格式总动能和总拟能演变

积分步长 10 min, 7 位有效数字, 无辐散正压原始方程

d	总动能 (m^2/s)	总拟能 (m^2/s)
0	0.1220760×10^5	0.8847784×10^8
30	0.1220771×10^5	0.8847945×10^8
35	0.1220796×10^5	0.8848321×10^8
40	0.1220877×10^5	0.8849525×10^8
45	0.1221150×10^5	0.8853549×10^8
50	0.1222102×10^5	0.8867624×10^8
55	0.1225634×10^5	0.8919797×10^8
60	0.1241432×10^5	0.9152241×10^8
65	0.1348819×10^5	0.1071767×10^8
70	0.2136956×10^5	0.9839725×10^8

表 2 拟能保真拟谱显式计算格式动能和总拟能演变

积分步长 3 h, 7 位有效数字, 无辐散正压原始方程

d	总动能 (m^2/s)	总拟能 (m^2/s)
0	0.12207602×10^5	0.8847784×10^8
10	0.12207596×10^5	0.8847784×10^8
20	0.12207596×10^5	0.8847784×10^8
30	0.12207597×10^5	0.8847784×10^8
40	0.12207599×10^5	0.8847784×10^8
50	0.12207602×10^5	0.8847784×10^8
60	0.12207596×10^5	0.8847780×10^8
70	0.12207600×10^5	0.8847784×10^8
80	0.12207598×10^5	0.8847784×10^8
90	0.12207600×10^5	0.8847784×10^8

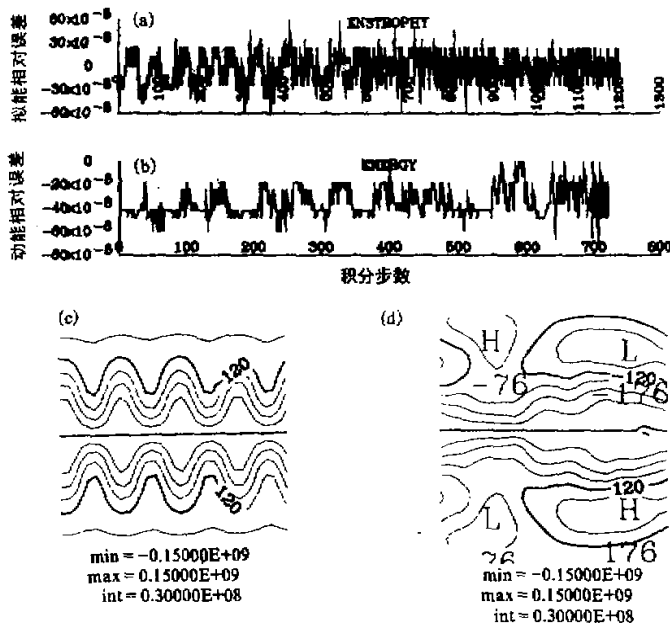


图 5 无辐散正压原始方程全球积分守恒量计算变化与计算流场

积分步长 3 h, 7 位有效数字, 拟能保真显式拟谱模式

(a) 150 天的拟能全球积分相对误差与积分时间关系曲线; (b) 90 天的动能全球积分相对误差与积分时间关系曲线; (c) 第 9 天的计算流场; (d) 第 150 天的计算流场

六、总结与讨论

离散计算误差的引入是造成离散计算若干基本问题的根本原因。因此, 如果可以按照离散计算误差引入的来源与方式加以完全准确地消除, 就可以完全准确地离散计算。本工作就是遵循保真原理与方法, 采用在相应正压原始方程传统(拟)谱模式的每一个计算谱分量(格点)上, 按照其时间离散误差引入的方式, 以保持原问题拟能守恒整体性质为原则, 加以相应的平均消除的构造方法, 构造并具体实现了不含与含重力波物理过程的新型拟能完全守恒计算格式。该保真计算格式也因此理论上具备了多方面优于相应传统格式、甚至解决其若干计算基本问题的可能性。

首先, 拟能完全守恒保真谱模式的实现表明, 全离散保真计算方案具有可行性, 可解决原问题特征性质保真问题(在计算机舍入误差水平)与非线性计算稳定性问题(参见图 3、图 5 与表 2)。数值实验结果还表明, 保真计算方案具有解决非线性计算收敛性问题方面的应用潜力(参见图 5 与表 2)。

其次, 大家知道, “气候漂移”现象产生的原因是模式中系统误差的存在, 无论是不完善的计算方法还是不完善的物理过程描述或者其他因素引入的系统误差, 都可导致“气候漂移”现象的出现。本文工作揭示, 现仍广泛采用的传统蛙跳拟谱模式方案中, 存在一种计算方法引入的系统误差, 从而导至一类不能通过减小时间积分步长改变的“气候漂移”现象(参见图 2、图 4 及表 1), 而拟能完全守恒保真谱模式在同样的积分时段里, 可在计算机舍入误差水平上消除此类“气候漂移”现象(比较图 4、表 1 与图 5、表 2)。这表明保真计算方案具有解决此类“气候漂移”问题方面的应用潜力。

再次, 关于 Rossby-Haurwitz 波准确解新型拟能守恒保真计算方案与传统计算方案的比较数值实验表明, 新方案可以在加大相应传统方案积分步长 18 倍, 约 9 倍地减少计算量的同时, 延长其积分时效 50% 以上, 并且在此积分时间内可使计算解完全收敛于物理解(计算机舍入误差水平)。这表明, 保真计算方案还具有提高计算精度, 延长计算时效, 减少计算量方面的应用潜力。

此外, 传统计算观念^[1,6]认为时间差分离散误差很小而不重要, 但本文及最近其他工作^[2-6]所展示的计算格式性能量与质的重大改进恰恰是在努力合理消除时间离散引入的系统误差之后获得的。这表明此传统观念至少不具普适性, 需重新考虑。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存、张学洪, 1981, 完全保持能量守恒的可压缩流体时-空差分格式及其协调的分解算法, 中国科学, B 辑, 11, 1355—1366。
- [2] 王 斌、李仲贞, 1990, 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验, 科学通报, 35, No.10, 766—768。
- [3] 钟 青, 1991, 半隐式完全平方守恒时间差分格式的构造及其初步检验, 科学通报, 36, No.19, 1480—1483。
- [4] 钟 青, 1992, 发展问题新计算理论及其一应用, 中国科学技术协会首届青年学术年会论文集(理科分册), 中国科学技术出版社, 473—479。
- [5] Zhong Qing, 1992, Theory of perfect square conservative scheme and its preliminary application, CAS / JSC

- Working Group of Numerical Experiment 1992 Report, No.17, 3.26.
- [6] 钟 奇, 1992, 论发展问题保真格式的一般构造原理和若干应用, 计算物理, 9, No.4, 758—764.
- [7] Arakawa, A., 1966, Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow, Part I, *J. Comput. Phys.*, 1, 119—143.
- [8] Lilly, D. K., 1965, On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems, *Mon. Wea. Rev.*, 93, 11—26.
- [9] Zeng Qingcun, Ji Zhongzhen and Yuan Chongguang, 1982, Design of difference schemes for the primitive equations, *Scientia Sinica*, 25 (B), 183—199.
- [10] Chang, J., 1977, *General Circulation Models of the Atmosphere*, Academic Press, New York.
- [11] Pedlosky, J., 1979, *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd edition, Springer Verlag.
- [12] William Bourke, 1972, An efficient, one-level, primitive equation spectral model, *Mon. Wea. Rev.*, 100, No.9, 683—689.
- [13] J. Haltiner and R.T. Williams, 1980, *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*, second edition, Wiley, New York.
- [14] Phillips, N.A., 1959, Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere, *Mon. Wea. Rev.*, 87, 333—345.
- [15] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社.
- [16] 薛伯诚、周振中、常谦顺, 1989, 计算物理中的谱方法——FFT 及其应用, 湖南科学技术出版社.

An Effective Enstrophy (Pseudo) Spectral Fidelity Scheme of Barotropic Primitive Equations

Zhong Qing

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

In this paper, a meteorological traditional global pseudo-spectral scheme of barotropic primitive equation is restructured and a corresponding new perfect enstrophy conservative scheme is formulated in accordance with the principle of discrete compensation. Thus, the problems of both nonlinear computational instability and perfect enstrophy conservation retaining are completely solved, and the computational performance of the traditional scheme is improved. As the numerical experiments of the new schemes show, by solving the problem of enstrophy conservation scheme design, the new scheme in computational practice can solve their own problem of (nonlinear) computational instability and that of (nonlinear) computational convergence under certain condition. Further comparison between the new schemes and the traditional one also indicates that, in discrete computational practice the new scheme applied to the case of nondivergence is capable of enlarging the valid integral time of the corresponding traditional scheme, capable of solving its own problem of "climate drift", while at the same time improving its computational accuracy and reducing its amount of computation. This principle can also be applied to the case of baroclinic primitive equation.

Key words: nonlinear; computational instability; computational convergence; enstrophy fidelity scheme; long valid integral time; climate drift.