第28卷第4期　　大　气　科　学　　Vol. 28　No. 4
2004　年　7　月　　Chinese Journal of Atmospheric Sciences　　July　2004

半隐式半拉格朗日平方守恒计算格式的构造*

陈嘉滨[1)]　季仲贞[2)]

1)（中国科学院大气物理研究所，北京 100029）

2)（中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京 100029）

摘　要　在显式半拉格朗日完全平方守恒格式基础上，构造出半隐式半拉格朗日完全平方守恒计算格式，它继承了显式半拉格朗日完全平方守恒格式的优点，并突破计算不稳定柯朗条件对时间步长的约束，使时间步长大为增长。此外，还给出这种新的计算格式在一维原始方程上的应用。

关键词： 半隐式半拉格朗日格式；平方守恒

文章编号　1006-9895（2004）04-0527-09　**中图分类号**　P435　**文献标识码**　A

1　引言

半拉格朗日平流格式，已被广泛用于天气和气候预报和摸拟，这是由于它与欧拉格式相比在节省计算工作量和计算精度方面有明显优越性。关于半拉格朗日平流格式和有关问题，早在 1991 年 Staniforth 和 Cote 就有一个很好的评论[1]。然而，与欧拉格式不一样，半拉格朗日平流格式普遍存在的问题是，由于内插造成物理量，如总质量、总能量等缺乏守恒性，这给长时间数值积分带来误差。针对这一守恒性问题，10 多年来，有不少人致力于这方面的研究[2~6]，他们研究半拉格朗日质量守恒格式的构造，并应用到二维和三维问题。主要想法是：对于一个流体微团（用坐标格点表示为格网元）从出发点移动到标准网格点上，在质量守恒条件下计算这个微团（格网元）在出发点和到达点的质量。不同作者对标准网格内质量分布有不同假设，例如逐段常定、逐段线性、逐段抛物线（PPM）、逐段立方曲线（PCM）等。

本文构造的守恒格式的思路和前面叙述的不同之处在于，本文中的控制方程引入耗散算子，在每步计算中将多余的物理量，如质量、能量等耗散掉，使之总物理量保持守恒。

在文献［7］中，欧拉空间显式完全平方守恒格式[8]已被发展和推广到半拉格朗日空间，并放松对 B 算子为正定假定的要求，使格式更为灵活。

但需指出的是，这种半拉格朗日平方守恒计算格式，仅具有理论意义。因为，在此格式中，对产生重力波的项，例如气压梯度项和辐散（合）项，仍然取显式格式，这就

2003-01-10 收到，2003-04-17 收到修改稿

* 中国科学院知识创新工程项目 ZKCX2-SW-210、国家重点基础研究发展规划项目 G1999032801 和 2001BA603B-4 共同资助

限制了时间步长的拉长。

在本文中，我们将研究半拉格朗日平方守恒的半隐式格式。这就可以突破重力波对时间步长的约束，增大时间步长，节省计算机时间，使格式具有实用性。

本文构造半隐式半拉格朗日平方守恒格式是在显式格式[7]基础上发展，它要用到显式格式的结果。

半隐式半拉格朗日平方守恒格式的构造分为两部分。第一部分是针对出发点与到达点之间的守恒格式构造，称为守恒格式构造；第二部分是标准等距网格上的平方守恒量插值到由出发点组成的非等距网格上平方守恒插值的构造，称为守恒插值构造。本文略去了第二部分的表述，有兴趣的读者可参见文献［7］。

2 显式格式

在拉格朗日空间中，发展方程数值求解问题可归结为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}+HF=G,\quad \lim_{t\to 0}F=F^{(0)}(x),\tag{1}$$

其中，$\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ 是随体微商，非线性的平流项已被吸收进去；$H\equiv H(F,x,t)$ 是外力项，例如气压梯度项和辐散（合）项等，是重力波产生源。一般来讲，在方程中它表现为非线性。方程（1）可时间离散化为

$$\frac{F_j^{n+1}-F_*^n}{\tau}+A_nF_*^n=G_*^n,\tag{2}$$

其中，上标 n 和 $n+1$ 分别表示现在和未来时间层；下标 j 表示标准网格点坐标，而 $*$ 则表示流体质点经过 τ 时间到达标准网格点 j 的出发点坐标；A_n 是算子 H 的空间离散算子。一般来讲，这个出发点坐标 $*$ 是不规则的。流体质点在出发点 $*$ 的变量，是由标准网格 j 的变量值内插求得。本文不讨论这种内插问题，这是一般半拉格朗日中讨论的问题。在下面推导中，将（2）式中源项 G 去掉，不失一般性。

为了便于计算，在以下推导中使用了与文献［7］中相同的如下符号

$$(G,F)=\sum_m F_mG_mh_m\tag{3}$$

为两个网格函数的内积。而

$$\|F\|=(F,F)^{\frac{1}{2}}\tag{4}$$

为函数 F 的范数。

在文献［7］中，构造了显式格式，其形式为

$$(F_j^{n+1})_{\exp}=F_*^n-\tau A_nF_*^n-\varepsilon_n\tau^2B_nF_*^n,\tag{5}$$

其中，下标 exp 表示为显式解，空间离散化算子 A_n，它应具有反对称性质。而 B 是耗散算子，ε_n 是耗散系数，它是在平方守恒条件下，解如下二次方程求得

$$\tau^2\|B_nF_*^n\|^2\varepsilon_n^2-2[(B_nF_*^n,F_*^n)-\tau(B_nF_*^n,A_nF_*^n)]\varepsilon_n$$
$$+\left[\|A_nF_*^n\|^2-\frac{2}{\tau}(F_*,A_nF_*^n)\right]=0.\tag{6}$$

如果离散化算子 A_n 具有反对称性质，则上式中的项（F_*，$A_nF_*^n$）为零。解得 ε_n 为

$$\varepsilon_n = \frac{K_1}{\left(1-\frac{\tau}{h}K_2\right)+\sqrt{\left(1-\frac{\tau}{h}K_2\right)^2-\left(\frac{\tau}{h}\right)^2K_3^2}}, \tag{7}$$

其中，

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\| A_nF_*^n \|^2 - \dfrac{2}{\tau}(F_*, A_nF_*^n)}{(B_nF_*^n, F_*^n)}, \\ K_2 = \dfrac{(B_nF_*^n, A_nF_*^n)h}{(B_nF_*^n, F_*^n)}, \\ K_3^2 = \dfrac{\| B_nF_*^n \|^2\left[\| A_nF_*^n \|^2 - \dfrac{2}{\tau}(F_*, A_nF_*^n)\right]h^2}{(B_nF_*^n, F_*^n)^2}. \end{cases} \tag{8}$$

而耗散算子 B 定义为

$$B_nF^n = \frac{A_n\widetilde{F}^{n+1} - A_nF_*^n}{\tau}, \tag{9}$$

其中

$$\widetilde{F}^{n+1} = F_*^n - \tau A_nF_*^n,$$

h 表示空间格距。如果离散化算子 A_n 具有反对称性质，可证明

$$\| A_nF_*^n \|^2 = (B_nF_*^n, F_*^n),$$

因此，K_1 为 1。

3 半隐式格式的构造

由上面显式格式可知，在半拉格朗日空间，发展方程（1）的平方守恒的半拉格朗日显式计算格式是（5）式。反过来讲，公式（5）是满足平方守恒的半拉格朗日计算格式。这种显式格式，时间步长受到重力波项的制约。为此，必须对重力波项作半隐式处理。在（5）式中，重力波项是包含在右端第二项中。这一项表现为非线性项，为了构造半隐式格式，应在此项中分裂出线性项来[9]，具体操作如下。

由（5）式，右端加减一项 τLF_*，有

$$(F_j^{n+1}) = F_*^n - \tau(A'_nF_*^n - LF_*) - \tau LF_* - \varepsilon_n\tau^2B'_nF_*^n, \tag{10}$$

其中，为了后面书写方便，将（5）式中的 A_n 和 B_n 算子表示为 A'_n 和 B'_n 算子；LF_* 是分裂出的线性项，L 是线性算子。与（10）式对应的平方守恒半隐式格式可写为

$$F_j^{n+1} = F_*^n - \tau(A'_nF_*^n - \beta L_{n+1}F_*^n) - \tau\beta L_{n+1}F_j^{n+1} - \varepsilon_n\tau^2B'_nF_*^n. \tag{11}$$

注意线性算子 L 是取定为 L_{n+1}。β 是半隐式可调常数。对上式进行整理，最后平方守恒半隐式格式写为

$$F_j^{n+1} = F_*^n - \tau A_nF_*^n - \varepsilon_n\tau^2B_nF_*^n, \tag{12}$$

其中，

$$A_n = MA'_n,\quad M = (I+\tau\beta L_{n+1})^{-1},\quad B = MB'_nF^n,$$

$$B'_nF^n = \frac{A_n\widetilde{F}^{n+1} - A_nF_*^n}{\tau},\quad \widetilde{F}^{n+1} = F_*^n - \tau A'_nF_*^n,$$

M 是表示矩阵（$I+\tau\beta L_{n+1}$）的逆矩阵。耗散系数 ε_n 同前面公式（6），只不过 A_n 的是

由公式（12）定义。注意，在（12）式中矩阵 A_n 一般不具有反对称性质。

4 半隐式半拉格朗日平方守恒格式在一维正压原始方程上的应用

4.1 基本方程

对于一维正压原始方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\varphi\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{14}$$

引入符号 $\phi=\sqrt{\varphi}$，$(U,V)=\phi(u,v)$和散度的如下表示[5]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\delta x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x), \tag{15}$$

则(13)～(14)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U\sqrt{\delta x})=-\sqrt{\delta x}\left[\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)\right], \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi\sqrt{\delta x})=-\sqrt{\delta x}\left[\frac{\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u)\right]. \tag{17}$$

其总能量方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2+\varphi}{2}\varphi\delta x\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u\varphi^2}{2}\right)\delta x. \tag{18}$$

对（16）和（17）式的右端分出一线性项，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U\sqrt{\delta x})=-\left[\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)\sqrt{\delta x}-\beta\phi_0\frac{\partial(\varphi\sqrt{\delta x})}{\partial x}\right]-\beta\phi_0\frac{\partial(\varphi\sqrt{\delta x})}{\partial x}, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi\sqrt{\delta x})=-\left[\frac{\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u)\sqrt{\delta x}-\beta\frac{\phi_0}{2}\frac{\partial(U\sqrt{\delta x})}{\partial x}\right]-\beta\phi_0\frac{\partial(U\sqrt{\delta x})}{\partial x}. \tag{20}$$

4.2 向量形式

方程（19）、（20）可化为如下的向量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=-[H(\boldsymbol{F})-L(\boldsymbol{F})]-L(\boldsymbol{F}), \tag{21}$$

其中，

$$H(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{CF}),\quad L(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{E}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{GF});$$

矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{\delta x}}{\phi}, & 0\\ 0, & \dfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\delta x}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0, & \dfrac{\varphi}{2\sqrt{\delta x}}\\ \dfrac{1}{\phi\sqrt{\delta x}}, & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\beta\phi_0, & 0\\ 0, & \beta\dfrac{\varphi_0}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix};$$

向量

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}U\sqrt{\delta x}\\ \varphi\sqrt{\delta x}\end{pmatrix}.$$

4.3　守恒格式

应用半隐式半拉格朗日平方守恒格式（12）式，（21）式可写为

$$\boldsymbol{F}_j^{n+1}=\boldsymbol{F}_*^n-\tau A_n\boldsymbol{F}_*^n-\varepsilon_n\tau^2B_n\boldsymbol{F}_*^n,\tag{22}$$

其中，

$$A_n=MA'_n,$$
$$M=(I+\tau\beta L_{n+1})^{-1},$$

$()^{-1}$为逆矩阵，A'_n 是（21）式中算子 H 的离散算子。

$$B_n\boldsymbol{F}^n=MB'_n,\quad B'_n\boldsymbol{F}^n=\frac{A_n\widetilde{\boldsymbol{F}}^{n+1}-A_n\boldsymbol{F}_*^n}{\tau},\tag{23}$$
$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{n+1}=\boldsymbol{F}_*^n-\tau A_n\boldsymbol{F}_*^n.$$

注意，如果线性算子 L 取为 L_n，则矩阵（$I+\tau L_n$）$^{-1}$每一步都要计算。因为它是在出发点上计算，这里 δx 是非等距的。注意 $L_{n+1}\boldsymbol{F}_*^n$ 的计算方法，它是将出发点的值移动到对应的到达点（标准点）上，再进行计算。类似于平方守恒半拉格朗日显式格式[7]，在平方守恒条件下，求解方程（22）式得到耗散系数为

$$\varepsilon_n=\frac{K_1}{\left(1-\frac{\tau}{h}K_2\right)+\sqrt{\left(1-\frac{\tau}{h}K_2\right)^2-\left(\frac{\tau}{h}\right)^2K_3^2}},\tag{24}$$

其中

$$\begin{cases}K_1=\dfrac{\|A_nF_*^n\|^2}{(B_nF_*^n,F_*^n)},\\[2ex] K_2=\dfrac{(B_nF_*^n,A_nF_*^n)h}{(B_nF_*^n,F_*^n)},\\[2ex] K_3^2=\dfrac{\|B_nF_*^n\|^2\left[\|A_nF_*^n\|^2-\dfrac{2}{\tau}(F_*,A_nF_*^n)\right]h^2}{(B_nF_*^n,F_*^n)^2},\end{cases}\tag{25}$$

h 表示空间格距。

4.4　具体计算

对（19）和（20）式时间离散化，有

$$\left[U\sqrt{\Delta x}+\tau\beta\phi_0\frac{\partial(\varphi\sqrt{\Delta x})}{\partial x}\right]^{n+1}=\left[U\sqrt{\delta x}+\beta\tau\phi_0\frac{\partial(\varphi\sqrt{\delta x})}{\partial x}\right]_*^n-\left[\frac{\tau}{\phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)\sqrt{\delta x}\right]_*^n-\varepsilon_n\tau^2B_nU\sqrt{\delta x},\tag{26}$$

$$\left[\varphi\sqrt{\Delta x}+\tau\beta\phi_0\frac{\partial(U\sqrt{\Delta x})}{\partial x}\right]^{n+1}=\left[\varphi\sqrt{\delta x}+\frac{\beta\tau\phi_0}{2}\frac{\partial(U\sqrt{\delta x})}{\partial x}\right]_*^n-\left(\frac{\tau\varphi}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\sqrt{\delta x}\right)_*^n-\varepsilon_n\tau^2B_n\varphi\sqrt{\delta x},\tag{27}$$

4.4.1　矩阵（$I+L_{n+1}$）

为了简化，以下以 $n=5$ 来举例。将（26）和（27）式左端离散化，

$$\sqrt{\Delta x}\begin{bmatrix}U_i+a(\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}\\ \varphi_i+b(U_{i+1}-U_{i-1}\end{bmatrix},\quad (i=1,\cdots,5),$$

其中，

$$a=\beta\frac{\tau\phi_0}{2\Delta x},\quad b=\beta\frac{\tau\varphi_0}{4\Delta x}.$$

进一步展开，则有

$$(I+\beta L_{n+1})\boldsymbol{F},$$

列向量定义为

$$\boldsymbol{F}=\sqrt{\Delta x}(U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)^{-1},$$

而矩阵（$I+L_{n+1}$）定义为

$$(I+\tau\beta L_{n+1})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&a&0&0&-a\\0&1&0&0&0&-a&0&a&0&0\\0&0&1&0&0&0&-a&0&a&0\\0&0&0&1&0&0&0&-a&0&a\\0&0&0&0&1&a&0&0&-a&0\\0&b&0&0&-b&1&0&0&0&0\\-b&0&b&0&0&0&1&0&0&0\\0&-b&0&b&0&0&0&1&0&0\\0&0&-b&0&b&0&0&0&1&0\\b&0&0&-b&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

4.4.2 列向量 $\boldsymbol{A}$

向量 $\boldsymbol{A}'$ 的元素为

$$(\boldsymbol{A}')_i=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{\delta x}}{\phi}, & 0\\ 0, & \dfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\delta x}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi^2}{2}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(u)\end{bmatrix}=\sqrt{\delta x}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi^2}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2}\varphi\dfrac{\partial}{\partial x}(u)\end{bmatrix}\equiv\begin{pmatrix}A_nU\\A_n\varphi\end{pmatrix},$$

列向量 $\boldsymbol{A}'$ 定义为

$$\boldsymbol{A}'=(A_nU_1,A_nU_2,A_nU_3,A_nU_4,A_nU_5,A_n\varphi_1,A_n\varphi_2,A_n\varphi_3,A_n\varphi_4,A_n\varphi_5)^{\mathrm{T}},$$

其中，$()^{\mathrm{T}}$ 表示转置，而列向量 $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}',$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是（$I+\tau\beta L_{n+1}$）的逆矩阵。

4.4.3 列向量 $\boldsymbol{B}$

列向量耗散算子 $\boldsymbol{B}'$ 类似于列向量 $\boldsymbol{A}'$，定义为

$$\boldsymbol{B}'=(B_nU_1,B_nU_2,B_nU_3,B_nU_4,B_nU_5,B_n\varphi_1,B_n\varphi_2,B_n\varphi_3,B_n\varphi_4,B_n\varphi_5)^{\mathrm{T}},$$

而列向量耗散算子 $\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}'.$$

为保证平方守恒，列向量 $\boldsymbol{A}'$ 的分量 A_nU_i，$A_n\varphi_i$ 的离散形式分别为

$$A_nU_i\equiv-\sqrt{\delta x}\left[\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)\right]\approx\sqrt{\delta x}\left[\frac{1}{\phi}\overline{\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)_x^x}\right],\tag{28}$$

$$A_n\phi_i \equiv \sqrt{\delta x}\,\frac{\varphi}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} \approx \sqrt{\delta x}\left[\frac{\varphi}{2}\,\overline{u}_x^x\right], \tag{29}$$

这里

$$\overline{(A)}_x^x = \left(\frac{A_{j+1}+A_j}{2} - \frac{A_j - A_{j-1}}{2}\right)\frac{1}{\delta x_j} = \frac{A_{j+1}-A_{j-1}}{2\delta x_j}. \tag{30}$$

4.4.4　列向量 $\boldsymbol{B}$ 的计算

耗散算子

$$B'_n F^n = \frac{A_n\widetilde{F}^{n+1} - A_n F_*^n}{\tau},$$

其中

$$\widetilde{F}^{n+1} = F_*^n - \tau A_n F_*^n.$$

而算子

$$A_n F_*^n = \sqrt{\delta x}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\phi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi^2}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}(u)\end{bmatrix} = \sqrt{\delta x}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\phi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi}{2\sqrt{\delta x}}\varphi\sqrt{\delta x}\right)\\[2ex] \dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\varphi\sqrt{\delta x}}U\sqrt{\delta x}\right)\end{bmatrix} \equiv A_n\begin{pmatrix}\varphi\sqrt{\delta x}\\ U\sqrt{\delta x}\end{pmatrix}^n,$$

$$A_n F^{n+1} = \sqrt{\delta x}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\phi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi^2}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}(u)\end{bmatrix} = \sqrt{\delta x}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\phi}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi}{2\sqrt{\delta x}}\widetilde{\varphi}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)\\[2ex] \dfrac{\varphi}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\varphi\sqrt{\delta x}}\widetilde{U}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)\end{bmatrix} \equiv A_n\begin{pmatrix}\varphi\sqrt{\Delta x}\\ U\sqrt{\Delta x}\end{pmatrix}^{n+1},$$

其中，

$$\frac{\sqrt{\delta x}}{\phi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{2\sqrt{\delta x}}\widetilde{\varphi}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right) = \frac{1}{4\phi\sqrt{\delta x}}\left[\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\delta x}}\widetilde{\varphi}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\varphi}{\sqrt{\delta x}}\widetilde{\varphi}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)_{i-1}\right],$$

$$\frac{\varphi\sqrt{\delta x}}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi\sqrt{\delta x}}\widetilde{U}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right) = \frac{\varphi}{4\sqrt{\delta x}}\left[\left(\frac{1}{\varphi\sqrt{\delta x}}\widetilde{U}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{\delta x}}\widetilde{U}^{n+1}\sqrt{\Delta x}\right)_{i-1}\right].$$

以上各节构造出半隐式半拉格朗日平方守恒格式的第一部分——守恒格式。第二部分——守恒插值，与文献［7］中相应部分完全相同，不在此叙述。

5　计算结果

初值给定为

$$u = U + u_0\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right),$$

$$h = H + h_0\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right),$$

其中，$U=10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$，$H=8000\ \mathrm{m}$，$L=6400\ \mathrm{km}$，$u_0=0.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ 和 $h_0=u_0\sqrt{H/g}$。积分范围是由 64 个格点组成的一维区域，空间格距为 $\Delta x=100\ \mathrm{km}$，时间步长 Δt 给定为：显示格式为 100 s，半隐式格式为 600 s。

由表 1 可见，半隐式半拉格朗日守恒格式与显式的格式一样，总能量可保持到小数点后 12 位有效数字不变化。但细心的读者会发现，小数点后第 13 位数似乎在下降，

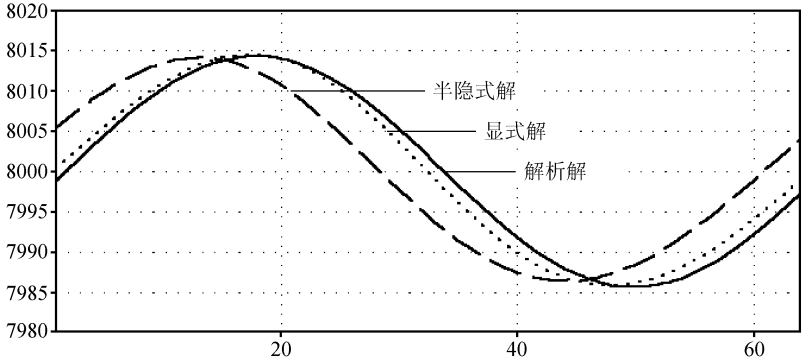

图 1 解析解（实线）、半拉格朗日显式解（点线）和半拉格朗日半隐式解（虚线）分别积分 30.5 小时后的高度场纵坐标表示高度值（单位：m)；横坐标表示距离（格点为单位）

这意味着总能量有微小的变化。造成的原因可能是耗散系数计算不够精确所致。半隐式传统格式却只能保持持到小数点后 4 位有效数字不变化。

表 1 半隐式半拉格朗日格式总能量变化列表

步数	半隐式传统格式 (Δt=600 s)	半隐式守恒格式 (Δt=600 s)	显式守恒格式 (Δt=100 s)
0	$0.308138511188873000\times10^{10}$	$0.308138511188873000\times10^{10}$	$0.308138511188873000\times10^{10}$
1000	$0.308118591482476000\times10^{10}$	$0.308138511188801300\times10^{10}$	$0.308138511188800200\times10^{10}$
2000	$0.308118591482476000\times10^{10}$	$0.308138511188729300\times10^{10}$	$0.308138511188727300\times10^{10}$
3000	$0.308109019767468500\times10^{10}$	$0.308138511188657300\times10^{10}$	$0.308138511188655700\times10^{10}$
4000	$0.308099093229862800\times10^{10}$	$0.308138511188585000\times10^{10}$	$0.308138511188583200\times10^{10}$
5000	$0.308089495990482500\times10^{10}$	$0.308138511188513100\times10^{10}$	$0.308138511188510900\times10^{10}$
6000	$0.308079942113564700\times10^{10}$	$0.308138511188441300\times10^{10}$	$0.308138511188439100\times10^{10}$
7000	$0.308070225572951200\times10^{10}$	$0.308138511188369600\times10^{10}$	$0.308138511188366000\times10^{10}$
8000	$0.308060944326684500\times10^{10}$	$0.308138511188296800\times10^{10}$	$0.308138511188294000\times10^{10}$
9000	$0.308051346192782000\times10^{10}$	$0.308138511188223400\times10^{10}$	$0.308138511188221700\times10^{10}$
10000	$0.308042046262497000\times10^{10}$	$0.308138511188152100\times10^{10}$	$0.308138511188149300\times10^{10}$

图 1 分别表示出平方守恒半拉格朗日的半隐式解（虚线），显式解（点线）和对应的解析解（实线），它们是第 30.5 小时的高度场。由图 1 可见，半隐式解和显式解的振幅与解析解非常相近，只是前者有明显的位相落后。

6 结语

本文在半拉格朗日显式平方守恒格式的基础上，构造了半拉格朗日半隐式平方守恒格式，并对简单的一维重力波方程作了实际计算，与显式格式一样，基本保持总能量守恒，高度分布也较为合理，波幅与解析解相近。位相落后可能与本文守恒插值中使用线性插值有关，这有待进一步研究正明。

参 考 文 献

1 Staniforth, A., and J. Cote, Semi-Lagrangian schemes for atmospheric model-a review, *Mon. Wea. Rev.*,

1991，**119**，2206～2223.
2 Colella，P.，and P. R. Woodward，Piecewise parabolic method for gas dynamical simulations，*J. Comput. Phys.*，1984，**54**，174～201..
3 Carpenter，R. L.，K. Droegemeier，P. R. Woodward et al.，Application of the piecewise parabolic method (PPM) to meteorological modeling，*Mon. Wea. Rev.*，1990，**118**，586～612.
4 Ranic，M.，Semi-lagrangian piecewise biparabolic scheme for two dimens- ional horizotal advection of passive scalar，*Mon. Wea. Rev.*，1992，**120**，1394～1406.
5 Machenhauer，B.，The Implementation of the Semi-implicity Scheme in Cell-integrated Semi-lagrangian Models，Max-Planck-Institut fur Meteorologie，1995，Rep. No. 156，1～32.
6 Nair，R.，and B. Machenhauer，The mass-conservative cell-integrated semi-lagrangian advection scheme on the sphere，*Mon. Wea. Rev.*，2002，**130**，649～667.
7 陈嘉滨、季仲贞，半拉格朗日平方守恒计算格式的研究，大气科学，2001，**25**（6），837～846.
8 王斌、季仲贞，一种省时的显式数值积分方案，科学通报，1991，**36**，2247～2250.
9 钟青，长效、经济的发展问题保真计算格式反演补偿，科学通报，1993，**38**（12），1101～1105.

A Study of Complete Square-Conserving Semi-Implicit Semi-Lagrangian Scheme

Chen Jiabin[1)]，and Ji Zhongzhen[2)]

1)（*Institute of Atmospheric Physics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100029）

2)（*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics*，*Institute of Atmospheric Physics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100029）

Abstract　A new complete square-conserving semi-implicit semi-Lagrangian scheme has been constructed and developed based on a complete square-conserving explicit semi-Lagrangian scheme. The new scheme can use the time step which is for 5～6 times larger than that of the explicit semi-Lagrangian scheme，and its total energy is conserved. The new scheme has been applied to one-dimensional primitive equations.

Key words：semi-implicit semi-Lagrangian scheme；complete square-conserving scheme