中尺度大气波动的波谱和谱函数——数学模型和计算方法

张铭 安洁

解放军理工大学气象学院大气环流与短期气候预测实验室，南京 211101

摘 要 作者得到了准二维Boussinesq方程组，并用其研究了中尺度大气波动的波谱和谱函数。在一定条件下对该方程组线性化并取标准模后，可将其初边值问题转化为矩阵的广义特征值问题来进行数值求解，这样就可知原问题波谱和谱函数的性质。当无基本流且取地转参数、层结参数为常数时，可求得其波谱和谱函数的解析解。此时该模式中仅包含有一对重力惯性内波模态，且各模态均是简谐波；模态越高，垂直波数越大则波动传播得越慢，所有的模态均为离散谱，并存在聚点。对此作者用数值解作了验算，结果表明，该数值求解方案合理可行，对不太高的模态其精度也令人满意。在无基本流然而考虑层结的垂直变化后，则一般无法求取解析解，为此进行了数值求解。这时该模式仍仅包含有一对重力惯性内波的离散谱模态，不过由于层结参数的变化，各模态结构与简谐波出现了偏差。

关键词 中尺度波动 波谱 谱函数

文章编号 1006－9895（2007）04－0666－09 **中图分类号** P433 **文献标识码** A

Spectrum and Spectral Function Analysis of Mesoscale Wave—Mathematic Model and Numerical Calculation Method

ZHANG Ming and AN Jie

Laboratory of Atmospheric Circulation and Short-range Climate Forecast Meteorological College, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101

Abstract As one of basic researches in the mesoscale system, it is necessary to made clear the waves and their characteristics in the mesoscale system. But, what are characteristics of the vortex wave and the inertia-gravitational wave? Do they have separability? All these are the new problems that need to be solved urgently. So in this paper the authors try to answer the questions. The spectrum and spectral function of the mesoscale wave are studied by using non-static equilibrium quasi-two-dimensional Boussinesq equations. It is supposed that the basic flow is only the function of z. The equations of are linearized under definite conditions, and then the initial and boundary value problem is changed into the eigenvalue problem of generalized matrix after assuming normal mode solution. The characters of spectrum and spectral function can be realized. And conclusions can be got as follows. When the basic flow is zero and the stratification parameter and the Coriolis parameter are constant, it is easy to get analytical solution of the spectra and spectral function. In this circumstance, only a couple of internal inertial gravity waves exist and all kinds of modes are simple harmonic wave. The higher mode is, the slower the wave travels and the greater the vertical wave number is. All modes are discrete spectrum, and there are accumulation points. In addition, checking numerical computation is discussed. It is shown that the scheme of numerical calculation is reasonable and the precision

收稿日期 2006－01－04收到，2006－05－08收到修改稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目40575023

作者简介 张铭，男，1945年出生，教授，博士生导师，研究方向：大气动力学和数值预报。E-mail：gq068@jlonline. com

of numerical calculation is higher in lower mode. If a variety of vertical stratification structure is considered, in general, the analytical solution of eigenvalue problem cannot be gotten, even no basic flow. Accordingly, the numerical solutions are applied. Here only discrete spectrum of the internal inertial gravity wave exists, and as the stratification parameter changes, the structures of mode deviate from that of simple harmonic wave. When the basic flow is not equal to zero, the question becomes more complex. And there are three waves in the equations: a couple of internal inertial gravity waves and a vortex wave. These three waves all have continuous spectrum, critical layer and the critical wavelength which depend on the geostrophic parameter f and the vertical shear of basic flow. When the disturbance wavelength is less than the critical wavelength and greater than half of that, there exists the overlapping section of an internal inertial gravity wave and a vortex wave. And when the disturbance wavelength is less than half of the critical wavelength, there exists the overlapping section of the three waves. Here, there is no pure continuous spectrum section of the vortex wave, and the fast wave or the slow wave cannot be distinguished. The critical wavelength can be considered as the criterion of dividing scale of atmosphere motion.

Key words mesoscale wave, wave spectrum, spectral function

1 引言

飑线、暴雨等中尺度天气系统往往造成严重的自然灾害，给国民经济和人民生命财产带来巨大损失。故对中尺度系统的研究一直受到人们的重视和关注。在该方面以往也有很多工作，如 Bennetts 和 Hoskins[1] 发现中尺度对称不稳定性扰动可能在组织启动雨带方面有重要作用，Emanuel[2] 给出了对称不稳定的判据和结构。高守亭等[3, 4] 打破传统的 Kelvin－Helmholtz 研究切变不稳定的观点，研究了切变线上涡层不稳定理论，并针对具有水平切变流区的涡层不稳定问题进行了研究，找出存在不稳定的必要条件。沈新勇等[5,6] 使用二维中尺度横波型扰动的动力学方程组，分析了这种沿基流方向传播的中尺度扰动发生不稳定时，大尺度背景场在垂直方向上的各种分布特征，并利用横波型扰动的总涡度守恒方程对涡旋 Rossby 波形成的物理机制做出了解释，并提出了梅雨锋暴雨中 β 尺度暴雨系统发生发展的一种可能物理过程。

作为中尺度系统研究的基础之一，必须弄清中尺度系统中包含的波动以及其性质，而首先就要回答以下的问题：

（1）在中尺度波段涡旋波和重力惯性波各自具有什么特点？在大尺度，该问题易答。此时涡旋波与重力惯性波的性质完全不同，前者是准静力和准地转的，在 β 平面上称为 Rossby 波；而后者是非地转的，并具有明显的辐合辐散。然而，在中尺度波段，涡旋波和重力惯性波均是非地转的，甚至是非静力的，故该问题的准确答案目前仍然不清楚。

（2）中尺度系统中涡旋波和重力惯性波是否具有可分性？在大尺度，该问题也易答。在正压大气中，重力惯性波的频率（指绝对值，下同）明显大于涡旋波，故前者称之为快波，而后者则称之为慢波，两者按频率就能明显区分[7]。在斜压大气中，两者的频率虽较接近，但前者的频率仍大于后者的频率；在考虑到前者是非地转、后者是准地转的特点后，两者仍易被区分。然而在中尺度系统中，当基流存在垂直切变时，这两类波动的频率范围可发生重叠[8]，此时这两类波动的可分性就成为亟待研究的关键问题，而有无新波型（如混合波）出现，也是待研究的新问题。

以上两问题均涉及到中尺度系统波谱的分布规律和特征波动（谱函数）的性质、结构。在当前中尺度动力学中尚无直接现成的答案，我们试图在该方面进行研究并回答以上问题。

本文给出研究中尺度大气波动波谱和谱函数的数学模型及相应的计算方法，我们推导了当基流存在非线性垂直切变和层结参数为非常数时的准二维 Boussinesq 方程组，而以前多讨论线性切变和层结参数为常数的情况[9]。在导出控制方程组并将其线性化后，结合边界条件，可得一个常微分方程组的特征值问题，求解该问题就可得到相应的波谱和特征波动。我们给出了求解的数值方法，并对无基流的情况作了试算，此时当层结参数为常数时，可求出解析解，并可用该解估计数值方法的精度。最后，还对几种典型的中尺度系统层结参数计算了其波谱和谱函数。

2 数学模型和计算方法

取无粘深对流非静力大气运动方程组[9]为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv, \tag{1-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu, \tag{1-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g, \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0, \tag{1-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi\dot{Q}}{c_p}, \tag{1-5}$$

这里 u，v，w 为速度的三个分量，ρ，θ 分别为密度和位温，c_p 为定压比热，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},$$

$\dot{Q}$ 为非绝热加热，本文采用参数化方法处理，具体表达式见下文（15）式，$\pi=[1000/p_0(z)]^{R/c_p}$，$p_0(z)$为与 z 相应的标准气压。设 $z=0$ 处为地面，$z=H$ 处为逆温层高度（含对流层顶），则该方程组可有以下边条件：

$$\begin{cases}w=0,\ z=0,\\ w=0,\ z=H.\end{cases} \tag{2}$$

在方程（1）中引入基本流 $\boldsymbol{U}$，并设其方向与波动传播方向（设为 x 轴）有一个夹角 δ，且其流速仅随高度 z 变化而流向不变，即有 $U=\|\boldsymbol{U}\|$，$U=U(z)$，夹角 δ 为常数。此时，有 $\bar{u}=U\cos\delta$，$\bar{v}=U\sin\delta$，$\bar{u}$、$\bar{v}$ 分别为 $\boldsymbol{U}$ 在 x 轴和 y 轴上的分量，且 $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}z$、$\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}z$ 仅为 z 的函数。在这种情况下，有

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}-\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=U\cos\delta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\sin\delta-U\sin\delta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\cos\delta=0. \tag{3}$$

设 u'，v'，w'为速度场对该基本流的偏差，可有

$$\begin{cases}u(x,y,z,t)=\bar{u}(z)+u'(x,y,z,t),\\ v(x,y,z,t)=\bar{v}(z)+v'(x,y,z,t),\\ w(x,y,z,t)=w'(x,y,z,t).\end{cases} \tag{4}$$

将方程组（4）代入方程组（1）中，并将热力学变量亦分为基本场和对基本场的偏差（即对热力学变量进行标准层结扣除），引入温度偏差 T'、位温偏差 θ'、密度偏差 ρ'和气压偏差 p'，则有

$$\begin{cases}p(x,y,z,t)=\bar{p}(x,y,z)+p'(x,y,z,t),\\ \rho(x,y,z,t)=\bar{\rho}(z)+\rho'(x,y,z,t),\\ \theta(x,y,z,t)=\bar{\theta}(x,y,z)+\theta'(x,y,z,t).\end{cases} \tag{5}$$

在此，$\bar{p}(x,y,z)$，$\bar{\theta}(x,y,z)$可看作气压和位温的气候值，$\bar{\rho}(z)$则可认为是标准大气密度分布。

注意到基本场应满足原方程，这意味着基本场水平方向满足地转平衡，垂直方向满足静力平衡，故有

$$f\bar{v}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}, \tag{6-1}$$

$$f\bar{u}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}, \tag{6-2}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=-g. \tag{6-3}$$

当研究中尺度问题时，不妨取地转参数 f 为常数。对方程组（1）进行线性化，即认为偏差为微扰，且为方便，再记

$$(u,v,w,\theta)\equiv\left(\bar{\rho}u',\bar{\rho}v',\bar{\rho}w',\frac{\bar{\rho}g}{\theta_0}\theta'\right),$$

这里，θ_0 为位温的标准值，取常数。这样，可得大气运动的 Boussinesq 方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial u}{\partial y}-fv+\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}w=-\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{7-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v}{\partial y}+fu+\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}w=-\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{7-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial w}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial w}{\partial y}-\theta=-\frac{\partial p'}{\partial z}, \tag{7-3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\theta}{\partial y}+S^2u+M^2v+N^2w=\frac{g\bar{\rho}}{\theta_0}\frac{\pi Q}{c_p}, \tag{7-4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{7-5}$$

因为基本场满足地转平衡和静力平衡，在考虑了热成风关系后，有

$$M^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}=-f\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z},$$

$$S^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}=f\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z},$$

$$N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}, \tag{8}$$

在此，N^2 为层结参数。对于位温方程，考虑到方程组（8）后可知，基本量 $\bar{\theta}$ 满足方程

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}=0. \tag{9}$$

基本流场满足（3）式，因基本场满足地转关系，基本场也显然满足连续方程。

由方程组（8）的前两式可知，等式右边仅为 z 的函数，故等式左边 $\partial\bar{\theta}/\partial y$，$\partial\bar{\theta}/\partial x$ 也仅能为 z 的函数，故 $\bar{\theta}$ 是关于变量 x、y 的一次函数。这样 $\bar{\theta}$ 可有以下形式：

$$\bar{\theta}=\theta_0+\hat{\theta}(z)+\frac{f\theta_0}{g}\Big(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}x-\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}y\Big).\tag{10}$$

此时，有

$$N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}=\frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}(z)}{\mathrm{d}z}+f\Big(\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}z^2}x-\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}z^2}y\Big)=N_0^2(z)+\widetilde{N}^2(x,y,z).\tag{11}$$

这里

$$N_0^2(z)=\frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}(z)}{\mathrm{d}z}$$

仅为 z 的函数，而

$$\widetilde{N}^2(x,y,z)=f\Big(\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}z^2}y-\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}z^2}x\Big)$$

为 x、y、z 的函数。注意到 N^2 在方程（7-4）中处于系数地位，当 $x\to0$ 和 $y\to0$ 时有 $\widetilde{N}^2\to0$，此时有 $N^2=N_0^2(z)$。若假设 $\widetilde{N}^2\ll N_0^2$，则此时可不考虑层结参数在水平方向的变化，并认为其垂直方向的变化仅由 N_0^2 决定，这样有 $N^2\approx N_0^2$，方程（7-4）中的 N^2 可代之以 $N_0^2(z)$。当基流随高度仅呈线性切变时，显然有 $\widetilde{N}^2(x,y,z)\equiv0$，这样严格有 $N^2=N_0^2(z)$。通过尺度分析可知，以上假设通常在中尺度情况下成立。

当方程（7-4）中的 N^2 代之以 $N_0^2(z)$ 时，若再设大气内部的波动沿 x 方向传播，且在 y 方向是均匀的（中尺度线状系统如飑线等往往具有该特点[10]），此时对扰动量有 $\partial/\partial y=0$，且 $\dot{Q}$ 与 y 无关，方程组（7）可进一步简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}-fv+\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}w=-\frac{\partial p'}{\partial x},\tag{12-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v}{\partial x}+fu+\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}w=0,\tag{12-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial w}{\partial x}-\theta=-\frac{\partial p'}{\partial z},\tag{12-3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \theta}{\partial x}+f\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}u-f\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}v+N_0^2w=\frac{g\bar{\rho}}{\theta_0}\frac{\pi\dot{Q}}{c_p},\tag{12-4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.\tag{12-5}$$

注意到这里 $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}z$，$N_0^2$ 均为 z 的函数。由方程（12-5）引入流函数 ψ，并消去气压扰动，可得

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\Big)v+f\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\tag{13-1}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\theta+f\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial\psi}{\partial z}-f\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}v-N_0^2\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{g\bar{\rho}}{\theta_0}\frac{\pi\dot{Q}}{c_p},\tag{13-2}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\nabla^2\psi-f\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}z^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\tag{13-3}$$

这里，

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial z},\ w=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

此时，边界条件为

$$\psi_{z=0}=\psi_{z=H}=0.\tag{14}$$

对于非绝热加热 $\dot{Q}(z)$，可采用 Emanuel[11] 的 Wave-CISK 参数化方法，即可取 $\dot{Q}$ 为

$$\dot{Q}=-N^2Q_0G(z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=z_0},\tag{15}$$

其中，Q_0 为加热振幅，是一个无量纲常数，它反映了凝结加热反馈的程度，在积云对流加热情形下，其粗略的与大范围积雨云的稳定性有关；$-\partial\psi/\partial z|_{z=z_0}$ 是 $z=z_0$ 处的垂直速度，z_0 为边界层顶高度。

设方程组（13）满足边界条件（14）的解为

$$\begin{pmatrix}v\\ \theta\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}V(z)\\ \Theta(z)\\ \Psi(z)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\sigma t)},\tag{16}$$

代入方程组（13）后，再考虑到（15）式，则有

$$(\bar{u}k-\sigma)V+\mathrm{i}k\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}\Psi-f\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}=0,\tag{17-1}$$

$$(\bar{u}k-\sigma)\Theta-kN_0^2\Psi-\mathrm{i}f\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}-f\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}V=-\eta N^2G(z)\Psi(z_0),\tag{17-2}$$

$$(\bar{u}k-\sigma)\Big(\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2}-k^2\Psi\Big)-f\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}+k\Theta-k\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}z^2}\Psi=0,\tag{17-3}$$

在此，$\eta=\eta(z)=\eta_0\bar{\rho}(z)\bar{\pi}(z)$，而

$$\eta_0\equiv\frac{kgQ_0}{c_p\theta_0}$$

为常数。

方程组（17）可通过消去变量 V，Θ 化为以下一个关于变量 Ψ 的方程：

$$(\bar{u}k-\sigma)[(\bar{u}k-\sigma)^2-f^2]\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2}+2kf[f\bar{u}_z+$$

$$\mathrm{i}(\bar{u}k-\sigma)\bar{v}_z]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}-k\{(\bar{u}k-\sigma)[(\bar{u}k-\sigma)^2k+(\bar{u}k-\sigma)\bar{u}_{zz}-kN_0^2]+\mathrm{i}f[2k\bar{u}_z\bar{v}_z-(\bar{u}k-\sigma)\bar{v}_{zz}]\}\Psi=k(\bar{u}k-\sigma)\eta N^2G(z)\Psi(z_0). \tag{18}$$

此时，边条件仍可写为

$$\Psi_{z=0}=\Psi_{z=H}=0. \tag{19}$$

这样，方程组（17）或方程（18）与边界条件（19）构成一个复的变系数常微分方程（组）的特征值问题。在绝热情况下，则有 $\eta=0$，方程（18）等式右端为0。

该问题一般无法解析求解，但可求数值解。为此，我们将区间[0，H]等距分为 M 个子区间，即将其分为 M 层，并采用交错网格，将 Ψ 写在整数层网格点上，Θ、V 写在半数层网格点上，此时微分方程组（17－1）、（17－2）、（17－3）可离散化为差分方程组。

令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_j,\cdots,\boldsymbol{X}_M)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{X}_j=(V_{j-\frac{1}{2}},\Theta_{j-\frac{1}{2}},\Psi_j)^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\cdots,M$，则可得复矩阵的广义特征值问题

$$\sigma\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}, \tag{20}$$

这里，σ 为特征值，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $(3M-1)\times(3M-1)$ 阶的矩阵，且 $\boldsymbol{B}$ 为复矩阵。这样，常微分方程组的特征值问题[（16）、（17）式]可离散化成一个复矩阵的广义特征值问题数值求解。虽然在该矩阵的特征值问题（20）式中仅存在有限个离散谱点，且连续谱被歪曲为计算离散谱，但随着分层数 M 的增加，这种歪曲将减少，且通过分析不同分层数 M 的计算结果，仍可判断原谱点是连续谱还是离散谱[12～14]。

3 绝热无基本流时的谱和谱函数

若绝热且基本流为常数（含无基本流），此时方程（组）可有很大简化，并可转化为实矩阵的特征值问题数值求解。

3.1 层结参数为常数

当基本流和层结参数均为常数时，方程组（17－1）、（17－2）、（17－3）退化为实的常系数常微分方程组，此时它和边界条件（19）式构成的特征值问题可解析求解，并易求其频散关系为

$$\sigma_1=\bar{u}k, \tag{21-1}$$

$$\sigma_{2,3}=\bar{u}k\mp\sqrt{\frac{f^2\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2+k^2N^2}{\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2+k^2}},\ m=1,2,\cdots, \tag{21-2}$$

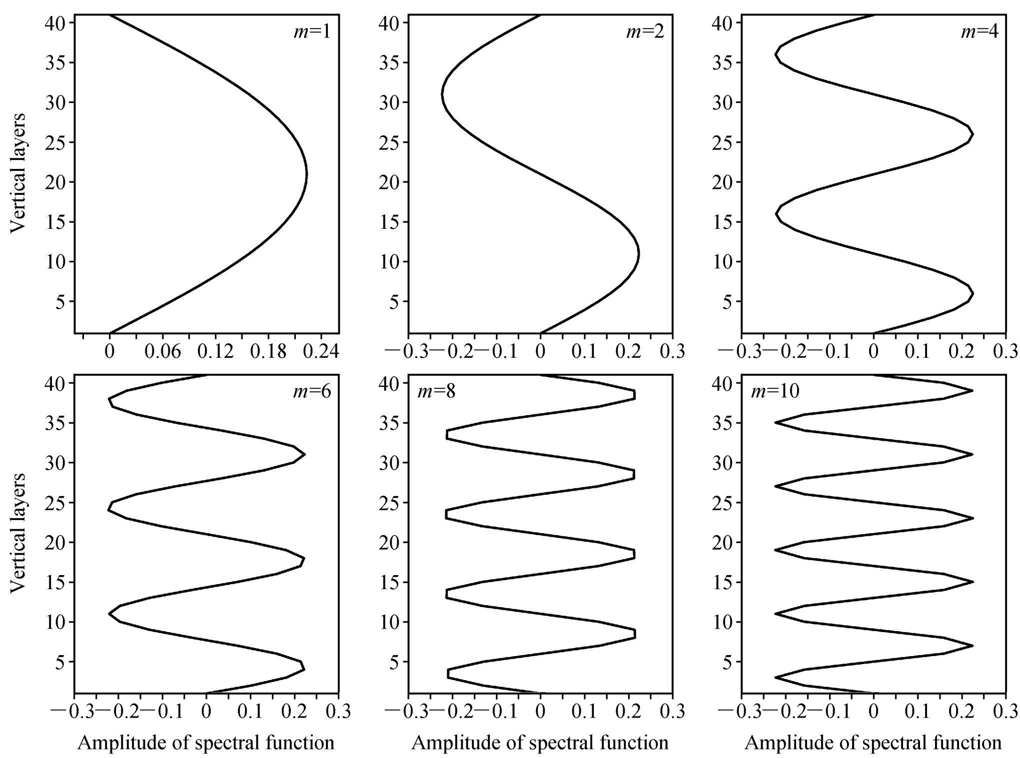

图1 流函数谱函数的结构

Fig. 1 The structure of stream function's spectral function

这里 N^2 为层结参数，取为常数，m 为垂直波数。

从该频散关系可见，此时该 Boussinesq 方程包含有两支重力惯性内波，它们分别相对于基本流作正向传播和反向传播，圆频率分别为 σ_2 和 σ_3。此外，还有一个相对于基本流静止的地转平衡基本态，其圆频率为 σ_1。重力惯性内波的圆频率不仅与环境参数 $\bar{u}$，N^2，f 有关，还与其垂直波数 m 和水平波数 k 有关。此时重力惯性内波均为离散谱。当环境参数和水平波长固定后，当 $m\to\infty$ 时，有 $\sigma_{2,3}\to\bar{u}k\pm f$，这表明这两支重力惯性内波的离散谱分别以 $\bar{u}k+f$ 和 $\bar{u}k-f$ 为聚点。

以下讨论无基本流的情况。此时由（21－1）、（21－2）式可知，它和边界条件（19）构成的特征值问题有以下特征值（特征频率），

$$\sigma_1=0, \tag{22-1}$$

$$\sigma_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{f^2\left(\dfrac{\pi m}{H}\right)^2+k^2N^2}{\left(\dfrac{\pi m}{H}\right)^2+k^2}}, \tag{22-2}$$

这里，m 为垂直波数，其取值为 $m=1,2,3,\cdots$。

由该关系可见，此时 Boussinesq 方程组包含有一对传播方向相反的重力惯性内波，圆频率为 σ_2 和 σ_3，其大小处于地转参数 f 和 Brunt-Väisälä 频率 N 之间。此时因无基本流，且取地转参数 f 为常数，故不存在涡旋波和地转平衡基本态，σ_1 为 0。

这时，易求得其谱函数（特征波动）的解析解为

$$\Psi=\sin(\lambda z), \tag{23-1}$$

$$\Theta=-\frac{kN_0^2}{\sigma}\sin(\lambda z), \tag{23-2}$$

$$V=-\frac{f}{\sigma}\lambda\cos(\lambda z), \tag{23-3}$$

这里，参数

$$\lambda=\frac{m\pi}{H}=\sqrt{\left(\frac{k^2}{\sigma^2}N_0^2-k^2\right)\Big/\left(1-\frac{f^2}{\sigma^2}\right)}.$$

利用该解析解可对以上的数值解法进行验算。

为验证数值解的正确性和精度，对以上情况，用数值方法作了验算。取分层数 $M=40$，环境参数取典型值 $N^2=10^{-4}\ \mathrm{s}^{-2}$，$H=10000\ \mathrm{m}$，$f=10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$，水平波长取 100 km，其相应的波数 $k=6.28\times10^{-5}\mathrm{m}^{-1}$。若不特别申明，下文计算中均取这些值。图 1 给出了数值计算得到的垂直模态 $m=1,2,4,6,8,10$的流函数谱函数的结构，图中纵坐标为垂直子区间的序号，即分层数，横坐标为谱函数的振幅（以下类似图的坐标说明均与此相同）。由图 1 可见，数值解与解析解的结果几乎完全相同，其结构均表现为不同波数的简谐波波形，V 和 Θ 也有同样的特点。对很高的垂直模态（m 很大），因其垂直方向波长太短，而分层数 M 有限，故数值解会有较大误差，甚至不能准确分辨[9, 10]。各模态越高，其模态垂直结构就越复杂，该模态波动传播得也越慢，而各模态的垂直结构则均为正弦函数。表 1 给出了取以上环境参数时解析解的特征值和数值解的特征值，由表可见，数值解与解析解符合得很好，并随着垂直分层数 M 的增加，计算解趋于解析解。

图 2 给出了在不同分层数 M 下频谱即特征值的分布情况，图中横坐标为特征值的序号，纵坐标为特征值 σ。由图 2 可见，不管分层数 M 的取值如何，整个频谱分布均分为三段，且其分布范围基本不变，而中间一段的特征值则恒为 0，其相应于（23－1）式。这说明垂直分层数 M 的大小主要影

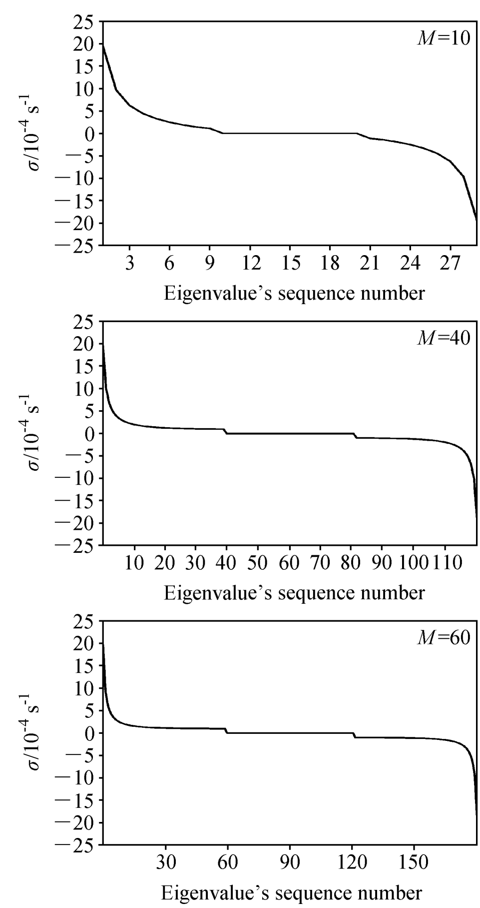

图 2　不同分层数 M 下的频谱分布图

Fig. 2　Spectrum distribution for different vertical layers M

响特征值的个数，而对其总体分布则影响很小，且随着特征值个数增多（因 M 增加），但相邻两特征值之间无加密现象，故其确为离散谱点（可参见表 1）。

此外还可见，随着 m 的增加，$|\sigma|$ 减小且趋于极限 f，即有聚点存在。

本文还就层结参数 N^2 的大小对特征波动的影响作了计算，发现层结较弱时（N^2 小），波速慢；层结强时（N^2 大），波速快；在低模态区域，层结对波速的影响更加明显（图略）。该计算结果与解析式（21－2）完全一致。

为考察不同地转参数 f 的变化对特征波动的影响，取 $f=0.5\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$，$1\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$，$0.5\times10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$，$1\times10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ 作了计算。计算结果（图略）可见，地转参数 f 对波动的频率和相速有较大的影响。f 值越大，则特征值越大，波动的相速也越大，这也与解析式（21－2）相一致。

为比较不同重力惯性内波波长对其波谱特性的影响，还对不同的波长作了相应计算。计算表明（图略），此时只存在一对重力惯性内波，不存在涡旋波（因无基本流）。对这对重力惯性内波，模态越低，频率越快，波长越短，频率也越快。这些也均与解析式（21－2）相一致。

表 1 解析解和计算解特征值的比较（单位：s^{-1}）

Table 1 Comparison of eigenvalues between analytical solutions and numerical solutions

	模态 1 Mode 1	模态 2 Mode 2	模态 3 Mode 3	模态 4 Mode 4	模态 5 Mode 5
40 层计算解 Numerical solution for 40 layers	1.963×10^{-3}	0.9979×10^{-3}	0.6697×10^{-3}	0.5052×10^{-3}	0.4069×10^{-3}
60 层计算解 Numerical solution for 60 layers	1.963×10^{-3}	0.9992×10^{-3}	0.6712×10^{-3}	0.5074×10^{-3}	0.4098×10^{-3}
解析解 Analytical solution	1.9636×10^{-3}	1.0000×10^{-3}	0.6726×10^{-3}	0.5093×10^{-3}	0.4120×10^{3}

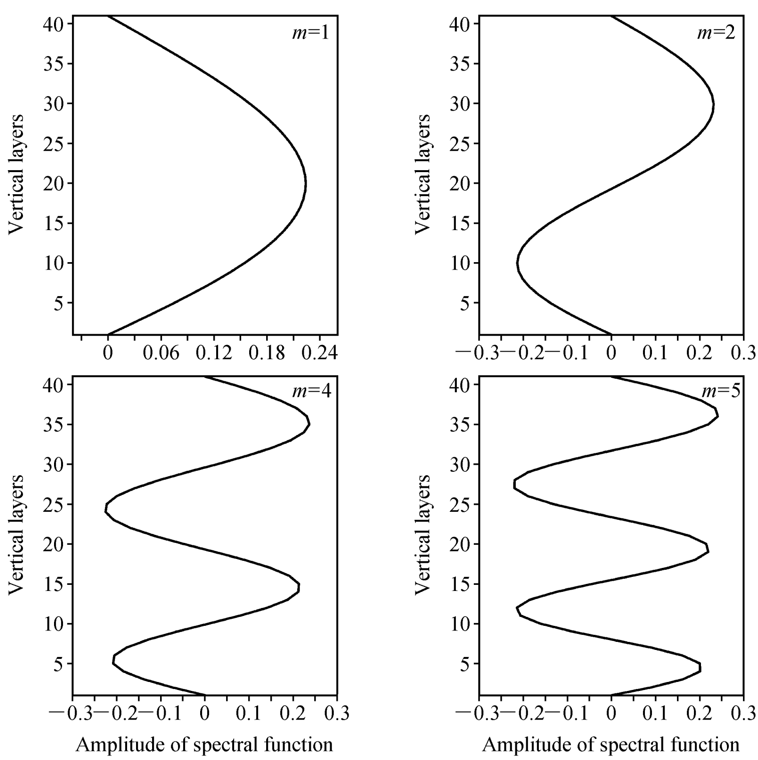

图 3 流函数谱函数的结构

Fig. 3 The structure of stream function's spectral function

以上所有结果均表明，数值解与解析解吻合得很好，解析解的主要特点数值解均体现出来了，这说明该数值解的计算方案合理可行，对不过分高的模态，其精度也令人满意。

3.2 层结参数有垂直变化

下面讨论无基本流而层结参数有垂直变化时的情况，此时因 N_0^2 是 z 的函数，故一般得不到解析解，但可用数值方法求解。以下取水平波长为 100 km，对给出的几种典型层结参数作了计算。

图 3 是此时计算得到的流函数谱函数的结构。计算中取 N_0^2 是 z 的线性函数，即取

$$N_0^2 = N_{00}^2 + N_z^2 z, \tag{24}$$

这里，$N_{00}^2=10^{-4}\,\mathrm{s}^{-2}$，$N_z^2=10^{-8}\,\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-1}$，其他环境参数均取得与上面相同。此时的计算结果与层结参数取常数的情况大致相同，不过因此时的层结参数随高度呈线性变化，故其谱函数的结构与标准的正弦函数有偏差。

4 结语

本文给出了研究大气中尺度波动波谱、谱函数时所用的更一般的非静力 Boussinesq 方程组。在一定假设条件下，对该方程组进行了线性化，在取标准模解后可将该偏微分方程组的初边值问题转化为复的变系数常微分方程组的特征值问题。

当绝热无基本流并取地转参数、层结参数为常数时，则该复的变系数常微分方程组退化为实的常系数常微分方程组，易求得其特征波动的解析解。此时该模式中仅包含一对重力惯性内波模态。在稳定层结下，由该模态的频散关系可知，其传播频率处于地转参数 f 和 Brunt-Väisälä 频率 N 之间；模态的垂直结构越复杂，即模态越高，波动就传播得越慢；而各模态的垂直结构则均是简谐波。因无基本流，故所有的特征波动均为离散谱并有聚点存在。

在考虑了层结、基本流的空间变化后，此时一般不能得到该特征值问题的解析解。但可将该常微分方程组特征值问题离散化后转化为一个复系数矩阵的广义特征值问题来数值求解。在无基本流的情况下，本文用数值解对以上的解析解作了验算，结果表明，该数值求解的计算方案合理可行，对不太高的模态其精度也令人满意。

当考虑层结的垂直变化后，即使不考虑基本气流并仍取地转参数为常数，此时一般也无法求得解析解，在这种情况下我们作了数值求解。此时，该模式仍仅包含有一对重力惯性内波的离散谱模态，总的情况与层结参数取常数时一致，不过此时因层结参数随高度变化，故各模态的结构与简谐波有偏差。

若存在基本流，则问题要复杂得多，此时该方程组中存在三支波动：一对重力惯性内波和一支涡旋波。三支波动均可有连续谱并存在临界层，并有由地转参数 f 和基本气流垂直切变决定的临界波长存在。当扰动波长小于该临界波长但大于其一半时，存在一支重力惯性内波连续谱区和涡旋波连续谱区的两波重叠现象，当扰动波长小于该临界波长的一半时，则存在两支重力惯性内波连续谱区和涡旋波连续谱区的三波重叠现象，此时已无纯粹的涡旋波连续谱区，并不能简单区分快、慢波，滤波模式（准平衡模式或无辐散模式）也已不能用。临界波长可作为划分运动尺度的标准，当运动尺度大于临界波长时，是大尺度的；当运动尺度小于临界波长，但为两波重叠时，是 α 中尺度的；三波重叠时，则是 β 中尺度的。该方法划分尺度的标准与通常的标准在量级上相一致。我们将在另文中给出这种情况的研究成果。

参考文献（References）

[1] Bennetts D A，Hoskins B J. Conditional symmetric instability—A possible explanation for front rainbands. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*，1979，**105** (4)：945～962

[2] Emanuel K A. Inertial instability and mesoscale convective systems. Part Ⅰ：Linear theory of inertial instability in rotating viscous fluids. *J. Atmos. Sci.*，1979，**36**：2425～2449

[3] Gao Shouting. The instability of vortex sheet along the shear line. *Adv. Atmos. Sci.*，2000，**17**：525～537

[4] 高守亭，周玉淑. 水平切变线上涡层不稳定理论. 气象学报，2001，**59**：393～404
Gao Shouting，Zhou Yushu. The instability of the vortex sheet along the horizontal shear line. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese)，2001，**59**：393～404

[5] 沈新勇，倪允琪，张铭，等. β 中尺度暴雨系统发生发展的一种可能物理机制 I. 涡旋 Rossby 波的相速度. 大气科学，2005，**29** (5)：727～733
Shen Xinyong，Ni Yunqi，Zhang Ming，et al. A possible mechanism of the genesis and development of meso-β rainstorm system. Part I. Phase velocity of vortex Rossby waves. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chi-

nese), 2005, **29**(5): 727～733

[6] 沈新勇，倪允琪，沈桐力，等. β中尺度暴雨系统发生发展的一种可能物理机制 II. 涡旋 Rossby 波的形成. 大气科学，2005，**29** (6): 854～863
Shen Xinyong, Ni Yunqi, Shen Tongli, et al. A possible mechanism of the genesis and development of meso-β rainstorm system. Part II. Formation of vortex Rossby waves. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2005, **29** (6): 854～863

[7] 刘式适，刘适达. 大气动力学（上册）. 北京：北京大学出版社，1991. 269pp
Liu Shikuo, Liu Shida. *Atmospheric Dynamics* (Volume 1) (in Chinese). Beijing: Beijing University Press, 1991. 269pp

[8] 曾庆存，李荣凤，张铭，等. 正压大气超高速情形下的谱点和特征函数. 空军气象学院学报，1991，**12** (2): 1～7
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming, et al. Spectrum and characteristic function in barotropic atmosphere of ultra high speed. *Journal of the Air Force Institute of Meteorology* (in Chinese), 1991, **12** (2): 1～7

[9] 张立凤，王丽琼，张铭. 垂直切变基流中非地转涡旋波的不稳定. 大气科学，2001，**25** (3): 391～400
Zhang Lifeng, Wang Liqiong, Zhang Ming. A study of instability of ageostrophic vortex wave on the condition of vertical shearing basic flow. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2001, **25** (3): 391～400

[10] 杨国祥. 中小尺度天气学. 北京：气象出版社，1983. 231pp
Yang Guoxiang. *Meso-and Micro-Scale Synoptics* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 1983. 231pp

[11] Emanuel K A. Inertial instability and mesoscale convective systems. Part II: Symmetric CISK in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1982, **39**: 1080～1097

[12] 曾庆存，李荣凤，张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 I. 谱点分析. 大气科学，1990，**14** (2): 129～142
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. The spectra and spectral functions in rotating two-dimensional compressive motion. Part I. Distribution of spectra. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (*Scientia Atmospherica Sinica*) (in Chinese), 1990, **14** (2): 129～142

[13] 曾庆存，李荣凤，张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 II. 谱和谱函数结构的分析. 大气科学，1991，**15** (1): 1～5
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. Spectra and spectral functions of rotating two-dimensional compressive motion. Part II. Structure of spectral functions and further discussion on spectra. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (*Scientia Atmospherica Sinica*) (in Chinese), 1991, **15** (1): 1～5

[14] 张立凤，张铭. 斜压切变基本流中横波型扰动的特征波动 I: 谱点分布. 气象学报，1999，**57** (5): 571～580
Zhang Lifeng, Zhang Ming. Characteristic wave of transversal disturbance at baroclinic shear flow. Part I: Spectrum analysis. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1999, **57** (5): 571～580