第3卷 第3期 气候与环境研究 Vol. 3, No. 3
1998 年 9 月 Climatic and Environmental Research Sept. 1998

湍流不同尺度间的相互作用*

刘式达 刘式适 胡 非
(北京大学地球物理系，北京 100871) (中国科学院大气物理研究所，北京 100029)

摘 要 湍流是由各种不同尺度的涡旋构成的。从整体上讲，存在 Kolmogorov 导得的惯性区结构函数的 2／3 次方定律和能谱的−5／3 次方定律。这种幂律相关的湍流是由每种尺度上指数相关的局部相似的 Brown 运动所构成，从而从理论上解释了不同尺度之间的相互作用以及湍流系数 K 随尺度变化的规律，初步论证了大气不同层结下湍流系数的差别。结果对研究大气、海洋不同尺度间的相互作用有重要意义。

关键词 尺度 湍流 自相似

1 引言

湍流是由各种不同尺度的涡旋所组成的[1]。实践告诉我们，不同尺度的涡旋所造成的动量、热量和物质的输送是有很大不同的[2]。如何解释呢？湍流的难点是各种不同尺度的涡旋之间是相互作用的。在地震问题中，小尺度的断裂可以引起大尺度的断裂[3]。类似，在非均匀的大气中，小尺度的涨落和大尺度的涨落是密切相关的。我们将湍流整体上幂函数形式的自相关函数分解成各种不同尺度上指数衰减函数的自相关函数之和。这种分解可以帮助我们解释湍流不同尺度间的相互作用，并可解释湍流系数 K 随着尺度和层结构稳定度的变化。

2 湍流整体上的自相关函数

对于湍流速度场 $v(x)$，其二阶结构函数为[4]

$$\langle[v(x_0+x)-v(x_0)]^2\rangle\sim x^{2\alpha}, \tag{1}$$

其中，角括号表示对所有x_0的平均，α 称为标度指数，一般 $0<\alpha<1$。Kolmogorov 在 1941 年用量纲分析法导得 $\alpha=1/3$。湍流功率谱$S(k)$也可以写为波数k的下列幂函数形式:

$$S(k)\sim k^{-\beta}, \tag{2}$$

β 称为功率谱指数。由于$kS(k)$和结构函数都具有能量的量纲，从而导得 β 与 α 的关系为[5]

$$\beta=2\alpha+1. \tag{3}$$

1998−01−12 收到
* 本文得到攀登项目"非线性科学"和大气边界层物理和大气化学国家重点实验室的资助

Kolmogorov 在 1941 年导得 $\beta=5/3$。

由结构函数（1）很容易导得自相关函数为

$$C(x)\equiv \langle v(x_0+x)v(x)\rangle\sim \langle v^2(x_0)\rangle-\frac{1}{2}x^{2\alpha}, \tag{4}$$

其中，$\langle v^2(x_0)\rangle$为一常数。（4）式也为幂函数形式。

（1）式意味着速度存在下列自相似关系[6]

$$v(\lambda x)=\lambda^{\alpha}v(x), \tag{5}$$

这里 λ 为一正的常数，x 为湍流两点间的距离。对湍流而言，若将 x 换为时间 t，（5）式化为

$$v(\lambda t)=\lambda^{\alpha}v(t). \tag{6}$$

相应地，可将（4）式中的 x 换为 t，（2）式中的 k 换为圆频率 ω。

3　自相关函数的分解

由（4）式看出，湍流整体上的自相关函数是一个幂函数，而且由（2）式看出，湍流既不是白噪声（因为白噪声的自相关函数$c(x)=0$，功率谱$S(k)\sim k^0$为一个常数），也不是 Brown（褐色）噪声（因为它的自相关函数$C(x)=\mathrm{e}^{-x/L}$，L 为空间或时间的特征尺度，功率谱$S(k)\sim k^{-2}$）。从形式上看，（2）式所表征的湍流功率谱介于白噪声和褐色噪声之间。

指数衰减的自相关函数与幂函数的自相关函数之间有什么联系呢？从物理上讲，前者意味着有一个固定的特征尺度，而后者意味着无特征尺度。

从（6）式看，我们可以将湍流的整体速度场 $v(t)$看成是各种不同尺度的速度场 $v_i(t)$（$i=0$，1，…）之和，即

$$v(t)=\sum_{i=0}v_i(t). \tag{7}$$

而不同尺度的速度之间满足下列的自相关似关系[3]：

$$v_{i-1}(\lambda t)=\lambda^{\alpha}v_i(t),\qquad i=1,\ 2,\ \cdots \tag{8}$$

（8）式中的下标 i 不同表征尺度不同。通常 $\lambda>1$，因而 i 的数值从小到大，相应所代表的尺度越来越小。

由（8）式，我们很容易导得不同尺度的自相关函数的递推关系为

$$C_{i-1}(\lambda t)=\lambda^{2\alpha}C_i(t),\qquad i=1,\ 2,\ \cdots \tag{9}$$

其中，

$$C_i(t)=\langle v_i(t_0+t)v_i(t_0)\rangle,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots \tag{10}$$

表示某种尺度的自相关函数。

由于 i 固定就表示有特征尺度，因而我们可以假设它们均为指数衰减形式的自相关函数。为此，设最大尺度层次上的自相关函数为

$$C_0(t)=\frac{D}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu t}, \tag{11}$$

其中，D 称为随机扰动强度，$\mu>0$ 称为阻尼系数。

由（11）式所表征的 Brown 运动的 Langevin 方程为

$$\dot{v}_0(t)+\mu v_0(t)=\Gamma_0(t), \tag{12}$$

其中，“.”表示对时间的导数，$\mu v_0(t)$表示阻尼，而随机力$\Gamma_0(t)$满足

$$\langle\Gamma_0(t_0)\Gamma_0(t_0+t)\rangle=2D\delta(t), \tag{13}$$

其中，$\delta(t)$为 Dirac delta 函数。

由递推公式（9），从$C_0(t)$我们可以求得其它尺度上的自相关函数为

$$\begin{cases} C_1(t)=\dfrac{1}{\lambda^{2\alpha}}C_0(\lambda t)=\dfrac{1}{\lambda^{2\alpha}}\cdot\dfrac{D}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu\lambda t}, \\ C_2(t)=\dfrac{1}{\lambda^{4\alpha}}\cdot\dfrac{D}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu\lambda^2 t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{14}$$

从（14）式看出，因为 $\lambda>1$，所以，随着尺度的减小，自相关函数的振幅越来越小，且指数衰减得越快，这是符合一般认识规律的。

由于随着尺度的减小，$C_i(t)$中的指数数值依次以 λ 倍增加，这意味着在 Brown 运动的 Langevin 方程中的阻尼也依次以 λ 倍增加，因而对$v_1(t)$、$v_2(t)$、…的 Langevin 方程分别为

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t)+\lambda\mu v_1(t)=\Gamma_1(t), \\ \dot{v}_2(t)+\lambda^2\mu v_2(t)=\Gamma_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{15}$$

其中各个不同尺度的随机力$\Gamma_i(t)$（$i=1, 2, \cdots$）必然为

$$\Gamma_{i-1}(\lambda t)=\lambda^{\alpha-1}\Gamma_i(t). \qquad i=1, 2, \cdots \tag{16}$$

例如，由（8）式，将$v_1(t)=\dfrac{1}{\lambda^{\alpha}}v_0(\lambda t)$代入（15）式第 1 式得

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}v_0(\lambda t)}{\mathrm{d}t}+\lambda\mu\frac{1}{\lambda^{\alpha}}v_0(\lambda t)=\Gamma_1(t),$$

即

$$\lambda^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}v_0(\lambda t)}{\mathrm{d}(\lambda t)}+\lambda^{1-\alpha}\mu v_0(\lambda t)=\lambda^{1-\alpha}\Gamma_0(\lambda t),$$

它就是（12）式。（16）式表示随着尺度的增大，随机力相应减小，这也是合理的。

从（11）式和（14）式看出，各种尺度的自相关函数的振幅均与 D 成正比、与 μ 成反比。而且，每当尺度减小一级（从 i-1 变为 i），μ 就变成了 $\lambda\mu$，而 D 就变成了 $\lambda^{1-2\alpha}D$。因而，从（13）式我们即可推断出各种尺度随机力的自相关函数有下列递推关系：

$$\langle \Gamma_i(t_0)\Gamma_i(t_0+t)\rangle = \lambda^{1-2\alpha}\langle \Gamma_{i-1}(t_0)\Gamma_{i-1}(t_0+t)\rangle. \qquad i=1,\ 2,\ \cdots \tag{17}$$

因为 $\lambda>1$，则从（17）式看出，只要 $\alpha<1/2$，则尺度越小，随机力的自相关函数值越大，因而随机力触发的次数越多。

我们将所有尺度的自相关函数 $C_i(t)$（$i=0,\ 1,\ \cdots$）相加，就得到整个湍流的自相关函数 $C(t)$，即

$$C(t)=\sum_{i=0} C_i(t). \tag{18}$$

但从（11）式和（14）式看出，随着 i 的增加，$C_i(t)$的振幅逐渐减小，而且随着指数衰减越快，所以，可以断定，级数（18）是收敛的，由（14）式很容易判断其级数和的上界为 $1/[1-(1/\lambda^{2\alpha})]$。

利用（18）式，在（9）式两边对所有 i 求和就有

$$C(\lambda t)=\lambda^{2\alpha}C(t)+C_0(\lambda t). \tag{19}$$

（19）式是非齐次的函数方程。为了和（4）式比较，它的解为

$$C(t)=\frac{C_0(\lambda t)}{\lambda^{2\alpha}-1}-\frac{1}{2}t^{2\alpha}. \tag{20}$$

（20）式在形式上与（4）式是相似的。

为了满足 $C(0)=1$ 的条件，并取 $\alpha=1/3$，定出 $\lambda=2.828$，故（20）为

$$C(t)=e^{-2.828t}-\frac{1}{2}t^{2\alpha}. \tag{21}$$

表 1 列出（21）式右端两项对不同 t 的大小数值。

表 1　（21）式右端两项对不同 t 的大小数值

t	0	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
$e^{-2.828t}$	1.00	0.99	0.95	0.90	0.86	0.82	0.78	0.74	0.67	0.61
$-(1/2)t^{2/3}$	−0.00	−0.03	−0.07	−0.11	−0.14	−0.17	−0.20	−0.23	−0.27	−0.31

从表 1 可以看出，随着 t 的加大，（21）右端第 1 项愈来愈小，而右端第 2 项愈来愈大。也就是说当相距的间隔比较小时，指数相关是重要的，但相距间隔较大时，幂函数相关就占优了。

由于（21）式右端是指数函数和幂函数之和，因而它的傅立叶变换也是两者相应的傅立叶变换之和。若用 f 代表频率，则（21）式的傅立叶变换即湍流的功率谱为

$$S(f)\sim af^{-2}+bf^{-5/3}. \tag{22}$$

（22）式说明，在谱空间中当频率较高时，（22）式右端第 2 项占优，这和（2）式 Kolmogorov 的结果一致。

总之，湍流在整体上幂函数形式自相关函数可以视为各种不同尺度指函数形式的自相关函数叠加所致。

4 不同尺度之间的相互作用

湍流的各种不同尺度之间的涡旋是如何相互作用的呢？Reynolds 平均运动方程显示，大尺度湍流（用平均量表征）是小尺度湍流的能源，而小尺度湍流通过动量、热量和物质的输送给大尺度湍流以反馈[9]。

根据上节关于湍流自相似的分析，湍流中的大尺度涡旋包含有许多小的涡旋，而后者又包含更多更小的涡旋。因此，各种尺度湍流涡旋的运动都是相互牵制的。在一定自相似的尺度范围内，尺度较小的涡旋速度较小、涨落随机力较大，随机触发的次数较多，其扰动衰减也较快。速度和随机力以及它们的自相关函数随尺度的变化快慢完全决定于标度指数 α[10]。尽管这种自相似性是统计意义上的，但较小尺度涡旋的活动受到较大尺度涡旋的制约不能太“出格”，而较大尺度涡旋的活动必然控制着较小尺度的涡旋。

我们在上节提出的每种尺度的湍流都按照 Brown 运动演化，而整体上的湍流经 Brown 运动叠加后按幂律变化的观点能够帮助我们了解不同尺度的湍流涡旋在整体中的作用。

根据 Fich 扩散定理[7]，Brown 运动形成的扩散方差为

$$\sigma^2 = 2Kt, \tag{23}$$

其中

$$K \equiv \frac{D}{\mu^2}, \tag{24}$$

即是湍流系数。

从上节分析我们已经知道：每当尺度减少 1 级，μ 就增大为 $\lambda\mu$，D就增大为 $\lambda^{1-2\alpha}D$。这样，由（24）式便知，不同尺度之间的湍流系数的递推关系为

$$K_{i-1} = \lambda^{1+2\alpha}K_i. \tag{25}$$

（25）式清楚地说明，随着尺度的增加，湍流系数按（25）式的规律而增加。这一点在物理上也是很清楚的。因为在（24）式中的D/μ是能量v^2的量纲，它是随着尺度的增加按$\lambda^{2\alpha}$倍增加的，而 $1/\mu$ 具有时间的量纲，它随尺度的增加按 λ 倍增加，因而 K 随尺度增加按$\lambda^{2\alpha+1}$倍增加。（23）式同样也显示，K 随速度尺度和空间长度尺度的增加而增加，这是因为 K 正比于速度和距离，而它们都随尺度增加而增加的缘故。

从（25）式还可看出，K 随尺度的变化还决定于标度指数 α，用大气实际的湍流资料通过子波变换计算表明，在大气近地面层，对稳定层结、中性层结和不稳定层结而言，α 的平均值分别为 $\alpha=0.23$、0.25 和 0.27[11]。这说明，在同样条件下，湍流系数 K 在稳定层结中最小，中性层结次之，不稳定层结时最大。这也是符合一般认识的[12]。

参 考 文 献

1 胡非，1995，湍流间隙性与大气边界层，北京：科学出版社，p288.
2 Panofsky, H. A. and Dutton, J. A., 1984, *Atmospheric Turbulence*, ISMB, p261.

3 Koyama, J. and Hara, H., 1992, Scaled Langevin equation to describe the $1/f^{\alpha}$ spectrum, *Physical Review A*, 46(4), 1245～1256.

4 Monin, A. S. and Yaglom, A. M., 1975, *Statistical FluidMechanics*, MIT Press, Cambridge, M. A., p798.

5 刘式达、刘式适，1993，孤波和湍流，上海：上海科技教育出版社，p127.

6 刘式达、刘式适，1991，分形和分维引论，北京：气象出版社，p75.

7 胡岗，1994，随机力与非性线系统，上海：上海科技教育出版社，p296.

8 刘式达、刘式适，1988，特殊函数，北京：气象出版社，p789.

9 欣茨，1987，湍流，黄永念、颜大椿译，北京：科学出版社，p463.

10 Peitgen, H. O., Jurgens, H. and Saupe, D., 1996, Chaos and Fractals, *New Frontiers of Science*, Spring–Verleg, p984.

11 Qian Minwei and Liu Shida, 1995, Scale exponents of atmospheric turbulence under different stratification, *Fractal*, 4(1), 45～48.

12 塞恩菲尔德著，1986，空气污染——物理和化学基础，北京大学地球物理系译，北京：科学出版社.

The Interaction between Different Turbulent Scale

Liu Shida and Liu Shikuo

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing* 100871)

Hu Fei

(*State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Physics and Atmospheric Chmistry, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029)

Abstract The turbulence consists of many different scale vortexes. Generally, there are the Kolmogorov's two–thirds law of second order structure function and the K–5 / 3 law of energy spectrum in the inertial range. It is shown that the autocorrelation power function of global turbulence is composed of all local exponent autocorrelation of different scale Brown motion. The interaction between different scale and the variance of turbulent coefficient with scale are explained. It also shows the difference of the turbulent coefficient for different atmospheric stratification.

Key words scale turbulence autocorrelation