

大气边界层风速脉动的分形模拟

刘 罡 李 昕 胡 非

(中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029)

摘 要 应用曲线分数维计算方法计算大气边界层实际风速观测资料的分数维值, 并根据分形理论构造出一个理论模型来模拟真实的大气边界层风速时间序列。将模拟和真实数据的一些重要的统计特征, 例如方差、风速概率分布、谱密度函数和自相关函数等, 进行了比较, 结果表明二者具有很好的一致性。

关键词 边界层 湍流 分形

1 引言

在湍流研究中, 分形方法为理解能量串级的物理机制及其对湍流间歇性的影响提供了一种新的途径^[1, 2]。完全发展湍流及展现出复杂行为的流体运动现象等都成为了分形学的研究对象。对湍流分形特征的研究主要集中在不同尺度的运动或涡旋的能量分布以及能量从大尺度向小尺度的输送上。许多研究者发现, 湍流的涡旋结构可以用分形概念来理解。这一发现表明, 湍流速度本身在一定程度上可以用分形函数来描述, 这就为我们找到一个能体现出湍流的间歇性和耗散性特点的分形模式提供了可能性。

近年来, 关于大气边界层湍流的混沌与分形特征的研究受到了广泛的关注。真实的湍流脉动速度是不可能用确定性的光滑函数来表示的, 但是我们可以从分形几何的角度对它的一些主要统计特征进行模拟。近年来, 人们已提出了几种描写湍流风速的分形模型。这些模型利用分形的概念生成一个时间序列, 用以近似代替实际的风速时间序列, 并应用于理论和工程实践中, 取得了较好的效果^[1~3]。

本文应用曲线分数维计算方法, 由实际边界层风速观测资料中提取分数维, 利用分形概念产生出一个合成的时间序列, 再用此时间序列模拟原实际风速时间序列, 并比较二者在统计意义上的定量相似程度。对比的内容包括一些重要的统计特征, 如方差、概率分布、自相关函数及谱密度函数等。对比的结果表明, 二者是比较一致的。

2 分形的产生

2.1 分数维的计算

分数维是表征一个物体或者现象复杂程度的量^[1], 有多种计算分数维的方法, 其中所谓变分法^[3]可以方便地提取实际观测的风速时间序列的分数维。

变分法通过测量覆盖一条曲线的盒子的总面积来确定这条曲线的分数维, 这一面积

是盒子边长的函数。这类似于 Richardson 的“不同尺码给出不同的海岸线长度”的观点。计算过程如下(参见图 1): 假定 $f(x)$ 为一分形曲线, 我们用底边长为 2ε 的盒子去覆盖它, 盒子的垂直边长称为 $f(x)$ 的 ε 摆动函数 $v(x, \varepsilon)$, 为

$$v(x, \varepsilon) = \sup f(x') - \inf f(x'), \quad x' \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \quad (1)$$

其中, x 为 $f(x)$ 中任意点, $\sup$ 为 x 的 ε 邻域上确界, $\inf$ 为 x 的 ε 邻域下确界。

覆盖曲线的底边长为 2ε 的盒子的总面积称为 $f(x)$ 的 ε 变分函数 $V(\varepsilon, f)$, 为

$$V(\varepsilon, f) = \int v(x, \varepsilon) dx, \quad (2)$$

其中, dx 等于 2ε , $v(x, \varepsilon)dx$ 为一个盒子的面积, (2) 式的积分给出了底边长为 2ε 的盒子覆盖的面积。不同的 ε 得出不同的面积, 描述这一变化关系的分数维 D 为

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log V(\varepsilon, f)}{\log \varepsilon} \right]. \quad (3)$$

实际计算中, 由不同的点 $\left(\log \frac{1}{\varepsilon}, \log \frac{V(\varepsilon, f)}{\varepsilon^2} \right)$, 利用最小二乘法可拟合出一条直线, 计算这条直线的斜率就得到 D 。

2 Weierstrass-Mandelbrot 函数

若已知分数维, 可以有许多种函数能够产生出分形曲线, 例如分形布朗运动、双随机 Takagi 函数和 Weierstrass-Mandelbrot (WM) 函数等^[1,4]。本文使用 WM 函数, 这个函数本身是连续的, 但看上去很不规则, 如图 2 所示。Mandelbrot 最先认识到 WM 函数具有分形特征, 将其用于描述分形几何学, 并建议用它来描写湍流中的质点运动轨迹。

常用的 WM 函数的基本形式是^[4]

$$u(t) = A \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega^H}, \quad (4)$$

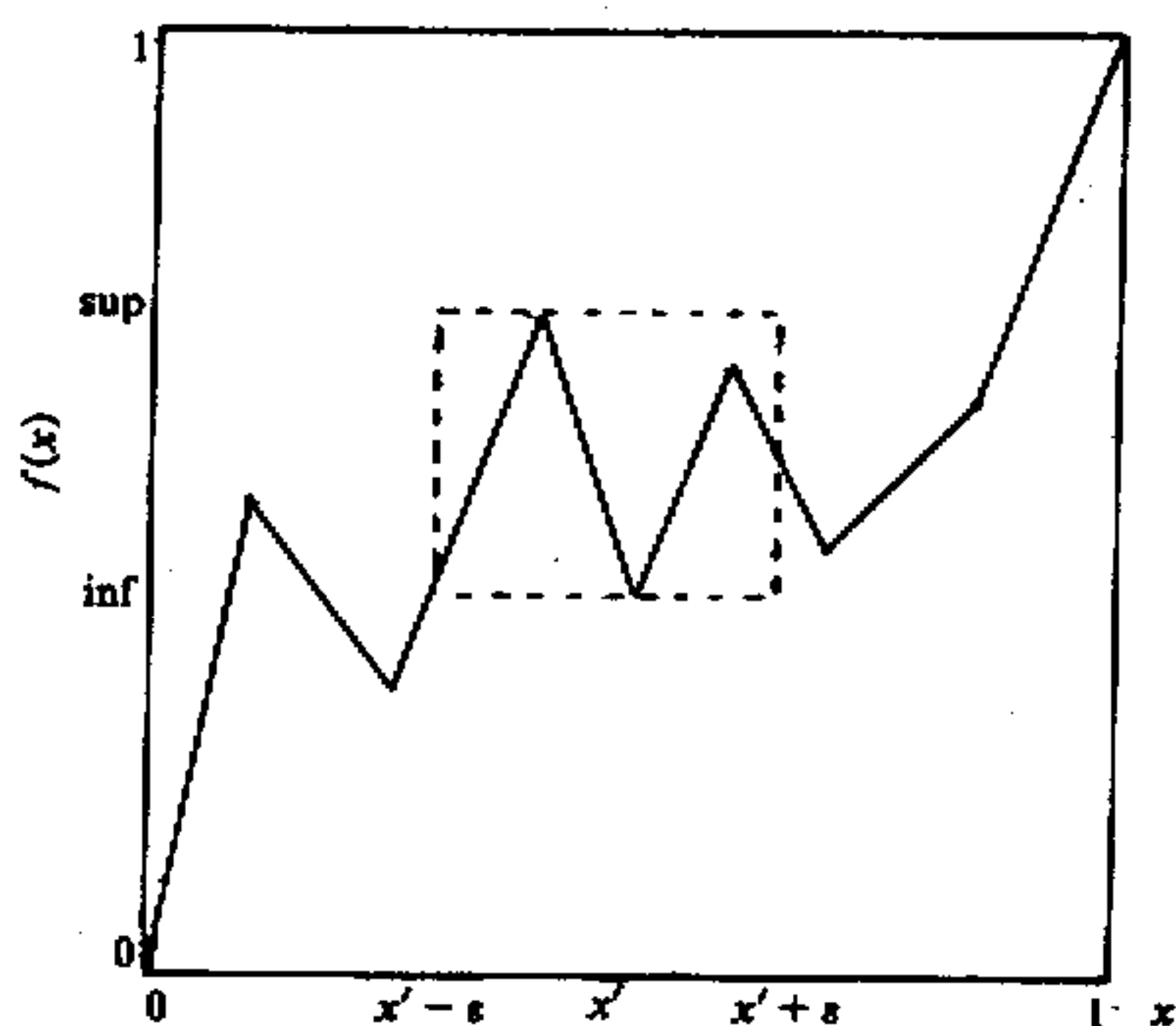


图 1 分维数的计算

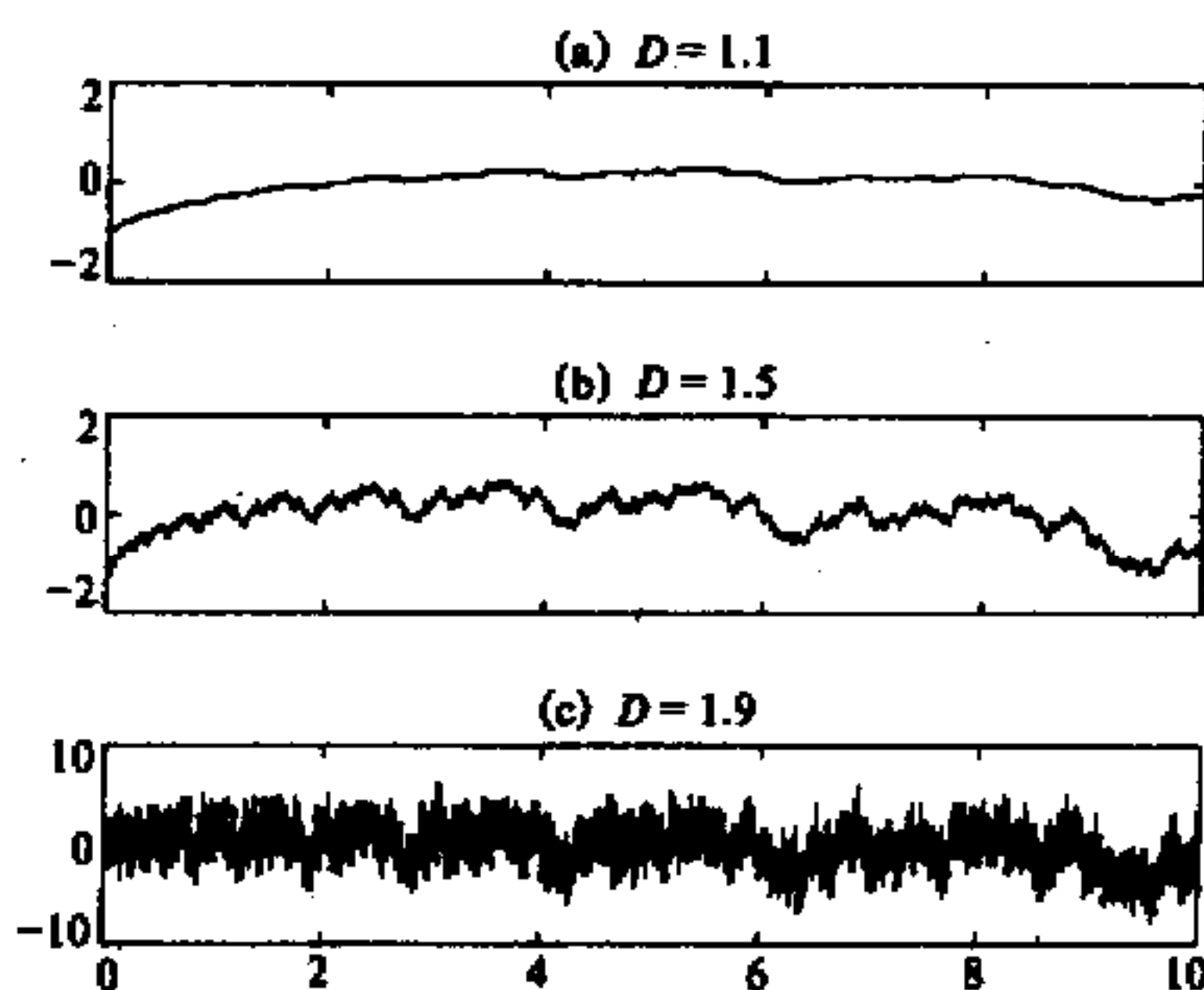


图 2 不同分维数的 WM 函数曲线

其中, t 表示时间, A 为常数, $\omega = b^n$, b 为常数, n 为求和整数, H 是一个与分数维 D 有关的标度因子, 它与欧几里德维数 E 及分数维 D 的关系为 $H = E + 1 - D$, 在一维时间序列中, $E = 1$, 于是 $H = 2 - D$ 。

图 2 是 WM 函数产生的分形曲线, 分数维分别是 1.1, 1.5 和 1.9。由图可见, 分数维越大, 曲线越显得不规则。根据这一特点, 我们就可以由不同的分数维值构造出不同复杂程度的时间序列来, 并使之满足一定的统计要求。

3 结果

我们将公式 (4) 用于不同的实测风速个例, 实测资料分别在我国西北 (甘肃黑河)、华北 (北京市及河北香河) 地区的外场试验中获得, 均由超声风速仪测量, 其中在黑河和北京使用的是日本和美国生产的仪器 (采样频率分别为 16 Hz 和 20 Hz), 在香河使用的则是中国科学院大气物理所自行研制的仪器 (采样频率 10 Hz), 观测高度均在近地层内。所选资料分别代表了沙漠、农田和城市下垫面上大气边界层湍流风速脉动。表 1 给出了三个典型例子, 从表中看出, 它们均处于不稳定层结条件下。

用变分法计算提取黑河、香河和北京风速观测资料的分数维, 得到的结果分别为 1.67、1.69 和 1.75 (图 3 中直线的斜率)。利用已知的分数维和 WM 函数产生出一个人工合成的风速时间序列 (如图 4b、5b 和 6b 所示), 再将此时间序列的统计特征与原外场试验的观测资料进行对比 (如表 1 所示), 对比的结果是令人满意的。需要说明的是, 由于湍流运动的不确定性, 我们不可能精确地模拟出风速脉动本身, 而只能在统计意义上寻求一致。

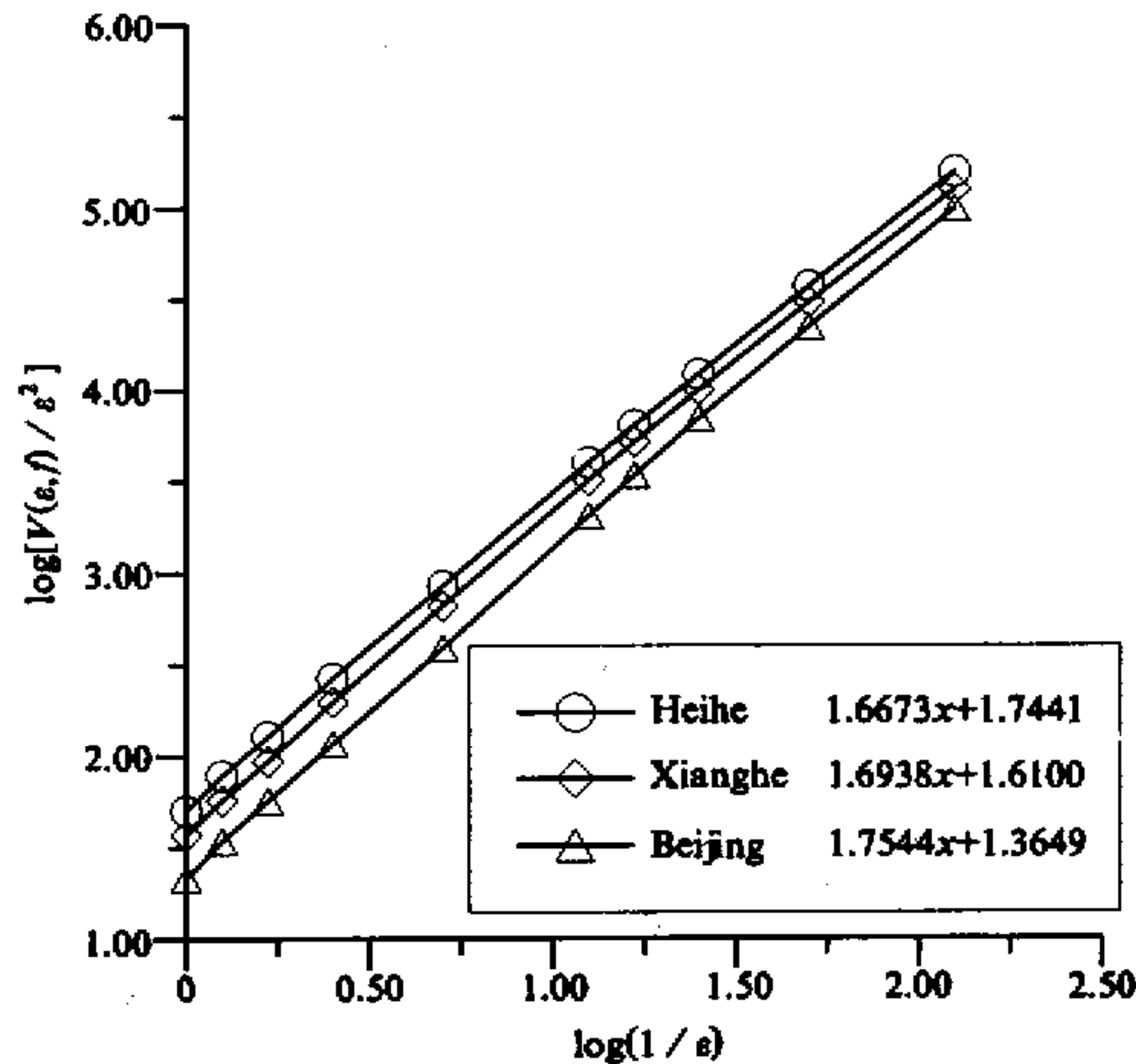


图 3 由实测风速计算的分数维

表 1 湍流风速脉动统计特征及分形模拟对比

		采样频率 / Hz	平均风速 / $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	方差 / $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$u_* / \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	L / m
黑河	实测	16	1.186	0.6971	0.488	-37.385
	模拟			0.4471		
香河	实测	10	-1.344	0.3959	0.409	-92.995
	模拟			0.5370		
北京	实测	20	-0.098	0.1104	0.195	-43.032
	模拟			0.8527		

图 7、8 和 9 分别是黑河、香河和北京观测资料及其各自的分形模拟的风速分布图。由图可见，二者吻合得非常好，都十分接近于高斯分布。实际风速和合成风速的功率谱谱线形状一致，产生峰值的频率位置基本相同，从低频到高频对能量的贡献非常相似。对自相关函数的比较结果也相当的好。图 4、5 和 6 分别比较了黑河、香河和北京三地实际风速与合成风速的变化。综上所述，各种特征的一致性表明，黑河、香河和北京风速的分形模拟能很好地描写和刻画三地的实际风速，具有典型的代表性。

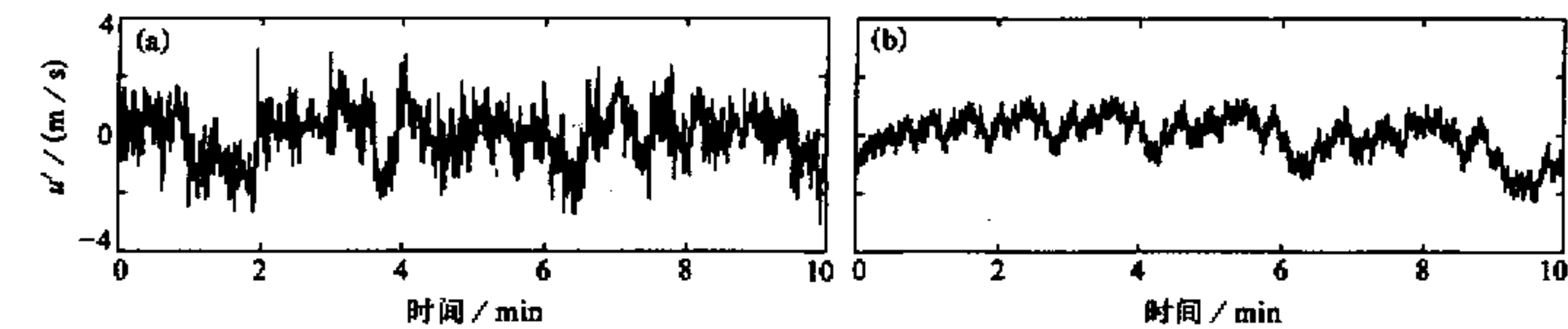


图 4 黑河实测风速 (a) 及其分形模拟 (b)

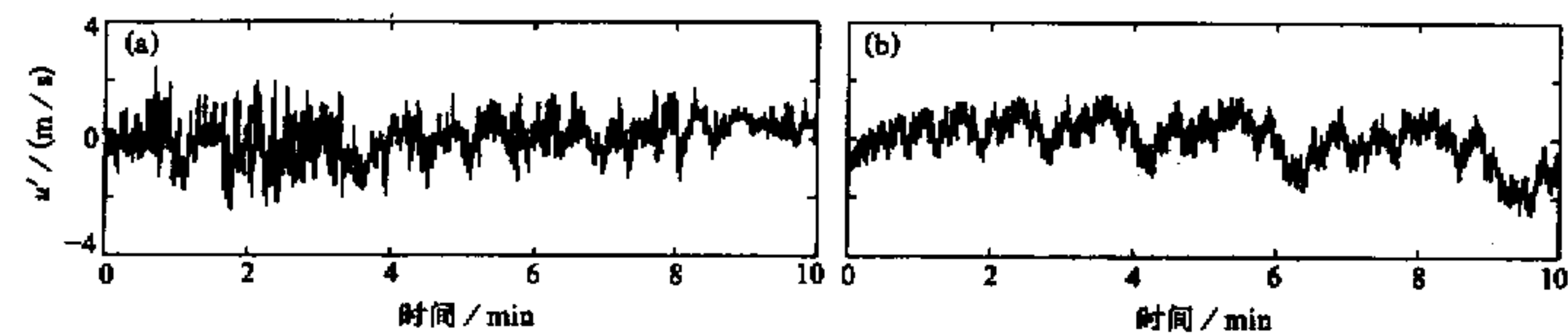


图 5 香河实测风速 (a) 及其分形模拟 (b)

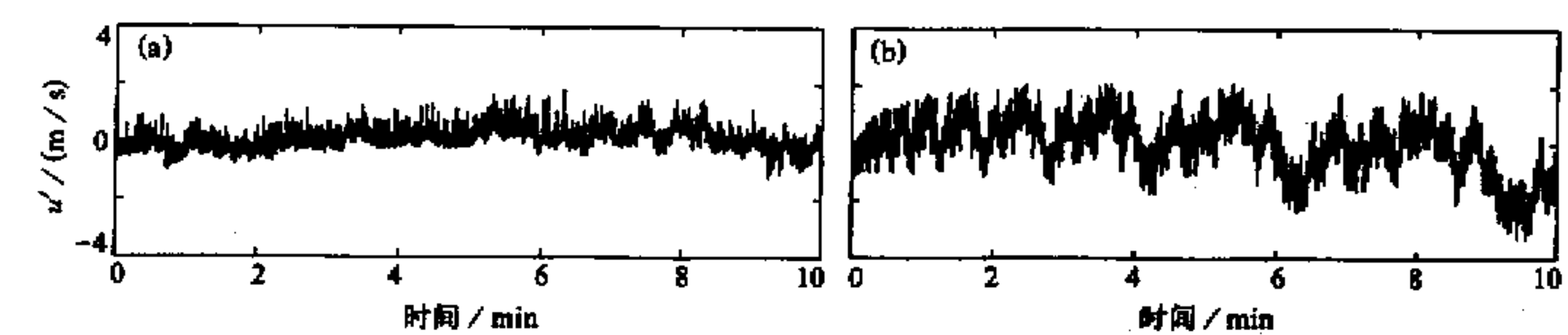


图 6 北京实测风速 (a) 及其分形模拟 (b)

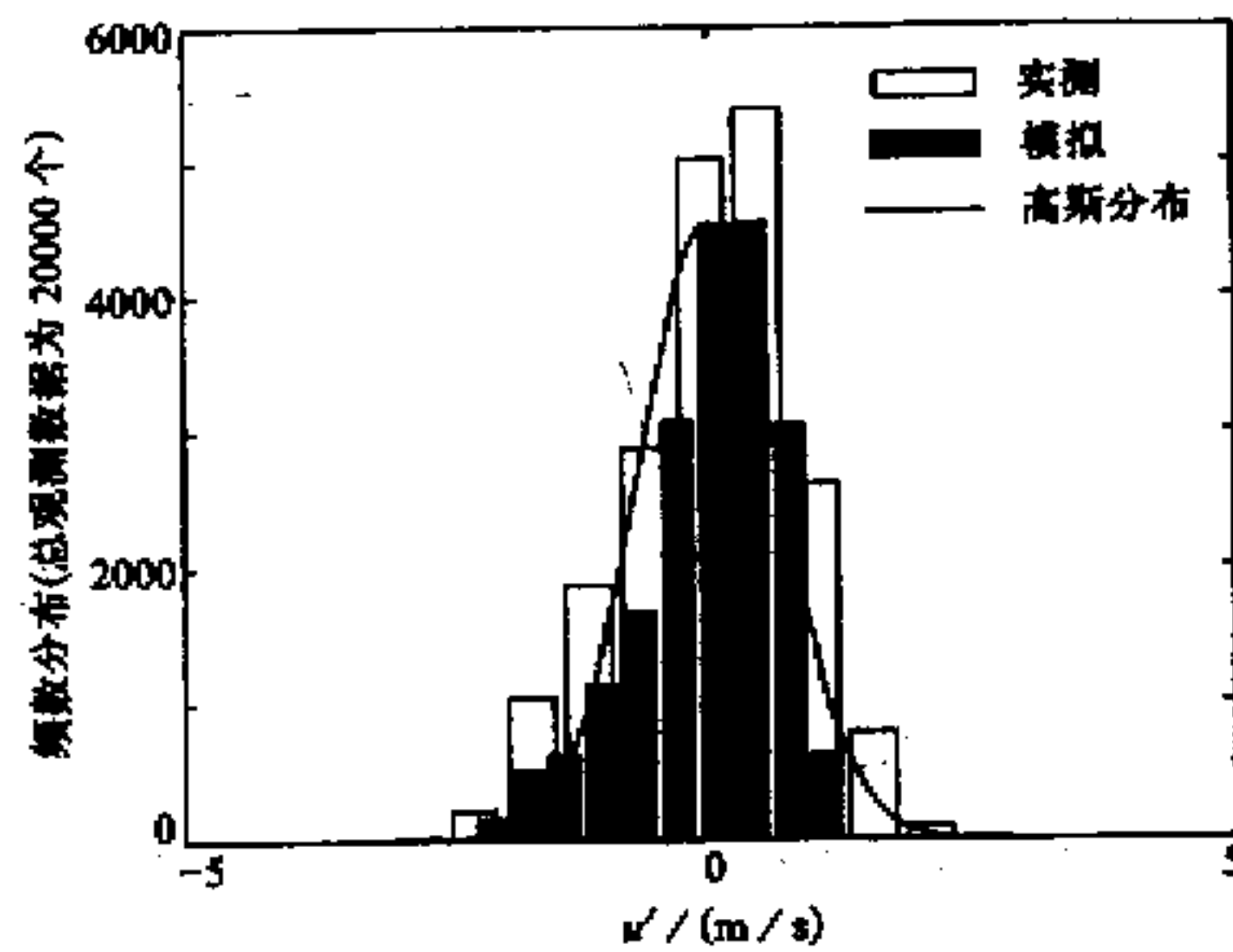


图7 黑河分形模拟结果与实际观测的比较

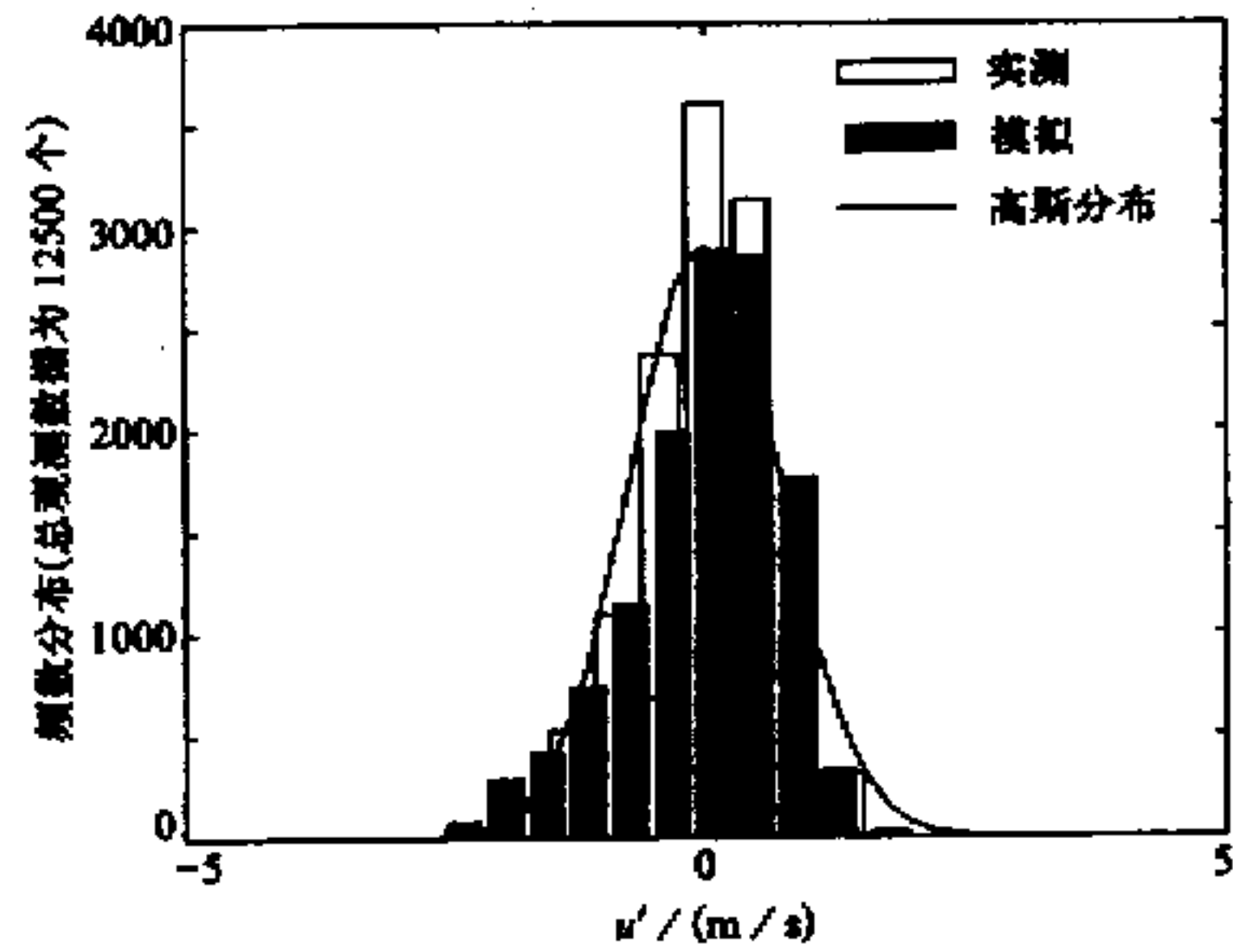


图8 香河分形模拟结果与实际观测的比较

4 结论与讨论

只要有效地求取风速资料的分数维, 并考虑合适的分数维 D 值的 WM 函数便能较

好地模拟风速资料。除了个别的资料外, 我们从不同地点、不同观测时间、具有不同的平均风速和方差的几组风速观测资料数据中发现, 它们的分数维均在 $D=1.7 \pm 0.03$ 左右。所以, 根据这些结果, 我们认为, 大多数风速观测资料数据的分数维大约在 1.7 左右。

$D=1.7$ 也与目前人们普遍接受的大气湍流的功率谱密度 d_{ps} 与频率 f 的关系

$$d_{ps} \sim \frac{1}{f^\beta}$$

相一致, 这里 $\beta=5/3^{[5]}$ 。West 和

Shlesinger 提出的 $\beta=5-2D$ 的普适性关系^[6], 表明风速的分数维值 D 应该是 1.67, 与我们得到的结果 1.7 只相差 2%。

综上所述, 风速的分形模拟是一种非常有效的方法, 它具有实用和精确等优点, 与现有的其它风速模式相比更显示出其独特的优越性。

以上计算的分维数代表湍流脉动的全局特征, 由于湍流包含了各种不同的尺度结构, 因而不同尺度的湍流具有不同的分维数^[7]。我们对此利用小波分解进行研究, 所得结果将另文发表。

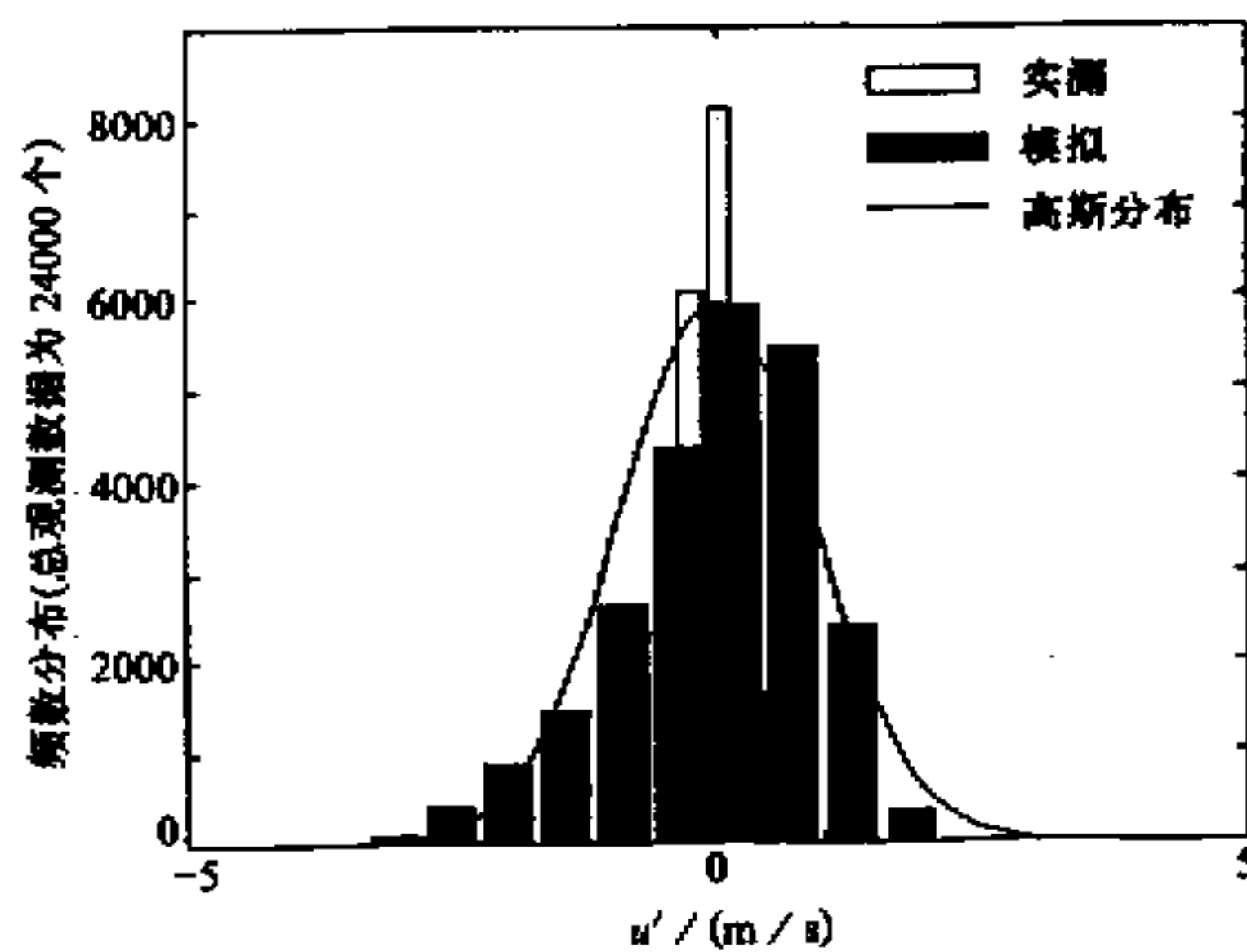


图9 北京分形模拟结果与实际观测的比较

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot, B. B., 1983, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.
- 2 胡非, 1995, 湍流、间歇性与大气边界层, 北京: 科学出版社.
- 3 Syu, C. Y., Kirchhoff, R. H. and Donovan, J. A., 1990, Fractal wind: Model for wind speed history, *Scaling in Disordered Materials: Fractal Structure and Dynamics*, Published by Materials Research Society of USA.
- 4 Humphrey, J. A. C., Schuler, C. A. and Rubinsky, B., 1992, On the use of the Weierstrass-Mandelbrot function to describe the fractal component of turbulent velocity, *Fluid Dynamics Research*, 9, 81~95.
- 5 Panofsky, H. A. and Dutton, J. A., 1984, *Atmospheric Turbulence*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- 6 West, B. J. and Shlesinger, M., 1990, The noise in natural phenomena, *American Scientist*, 40, 78.
- 7 李 昕, 1998, 中国科学院大气物理研究所博士学位论文.

Fractal Representation of Wind Speed Fluctuation in Atmospheric Boundary Layer

Liu Gang, Li Xin and Hu Fei

(State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract In this paper, the fractal dimensions of the observed turbulent wind speed fluctuation in atmospheric boundary layer were computed with the so-called variation method, and a fractal model was used to generate a synthetic wind speed time series based on the real data. Some important statistical characteristics between the model and real observations, such as the variance, the wind speed probability distribution, the spectral density function and the autocorrelation function, were compared. Excellent agreement was found.

Key words atmospheric boundary layer turbulence fractals