

$m \geq 2d + 1$ (d 是吸引子的维数) 时, 可重现出原吸引子的几何特征, 由此来研究系统的演化规律。实际应用中, 只要观测数据充分长, 较少噪声干扰, 选择适当的嵌入维 m 和延迟时间 τ , 就可以做到由部分把握整体。

2.1 延迟时间与嵌入维数的确定

在利用重构相空间研究混沌吸引子时, 嵌入维数 m 和延迟时间 τ 的选取是较重要的。实际应用中, 如何选取 τ 要取决于对物理过程的时间尺度的了解, 选取的方法很多, 其中主要是自相关函数法。对于长度为 N 的观测序列 $\{x_i\}$, 自相关函数定义为

$$R(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2)$$

式中 τ 为滞后时间。显然, $R(0)=1$, $R(\infty)=0$ 。对于周期或准周期信号, $R(\tau)$ 呈振荡型; 对于随机过程, $R(\tau)$ 应该迅速下降到零 (理想白噪声为 δ 函数); 对于混沌信号, $R(\tau)$ 则在一定的 τ 值处衰减到零。

如图 1 所示, 可选取 $R(\tau)$ 首次通过零点或衰减到 $1/e=0.37$ 、 $1/10$ 、 $1/20$ 时的 τ 值为重构相空间的延迟时间。

选择嵌入维数 m 同样需要对所研究的物理对象有深入的了解, 其方法也很多^[15]。在实际应用中, 一般选取的 m 比吸引子的维数 d 略大, 但不要超过饱和和嵌入维数的最低值过多。

3.2 相关维

设 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 为有 m 个分量的相空间矢量, 在相空间中选取半径为 r 的 m

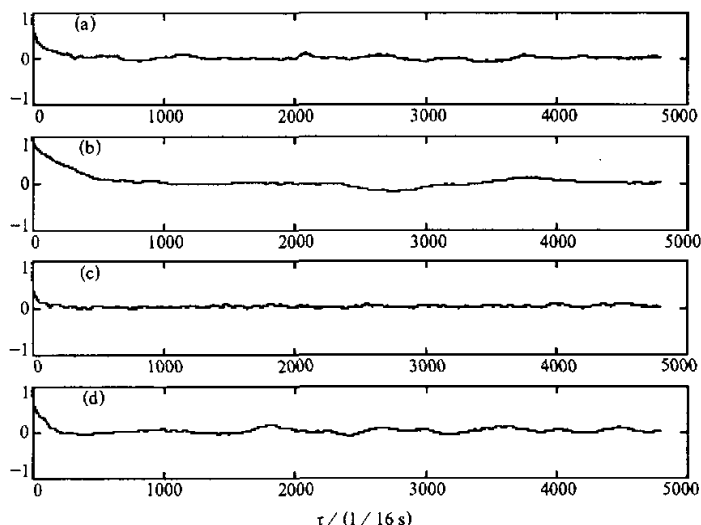


图 1 4 组湍流变量的自相关函数 (黑河, 8 月 13 日, 11 时 45 分)

(a) 湍流动能; (b) 湍流纵向风速; (c) 湍流垂直风速; (d) 温度

维小球。定义:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(\|x_i - x_j\| - r), \quad (3)$$

式中, $\theta(x)$ 为分段函数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$\|\cdot\|$ 代表欧氏空间中的范数, 即 x_i 与 x_j 之间的距离。 $C(r)$ 即表示相空间中距离小于 r 的点对数占所有可能的点对数的比例, 描写了相空间中吸引子上两点距离小于 r 的概率, 刻划了相点的聚散程度。

由于分形具有标度变换下的不变性, 从而关联函数 $C(r)$ 是幂函数形式。于是定义相关维^[6] (简称 G-P 算法):

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}, \quad (5)$$

注意(5)式, 当 r 很小时, 近似有

$$C(r) \approx r^{D_2}. \quad (6)$$

从而实际计算时, 在双对数图上可由斜率确定相关维 D_2 。

3.3 Lyapunov 指数

对于一个 n 维流的动力系统,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

在已知解 x_0 附近展开, $x_i = x_{i0} + \delta x_i$, 其中 $\{\delta x_i(t), i = 1, 2, \dots, n\}$ 表示在 t 时刻系统的误差, 只要 $\{\delta x_i(t)\}$ 足够小, 由 (7) 式的泰勒展开一阶近似可得切空间 (即误差空间) 的线性微分方程:

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

其中,

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n, a)}{\partial x_j} \right|_{(x_1, \dots, x_n)}$$

是 (7) 式右端的函数 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的 Jacobi 矩阵。由 (8) 式可看出, A_{ij} 的特征值给出了误差 δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 在给定时刻沿相空间中特征量方向的指数增长率, 用这些特征值长时间平均来描述 n 维相空间中的无穷小体积的指数变化率, 即 Lyapunov 指数, 以 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示, 并按其大小顺序排列起来:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n. \quad (9)$$

负的 Lyapunov 指数表示相体积在该方向是收缩的, 运动是稳定的, 正的

Lyapunov 指数反映了相体积在某个“方向”上不断膨胀, 不断伸长和折迭以致吸引子中本来邻近的状态变得越来差别越大, 从而使初态有任何不确定性的系统的长期行为成为不可预测的, 此即所谓的初值敏感依赖性。此时的运动就是混沌状态, 所以混沌系统至少有一个 Lyapunov 指数是大于零的。

实际中, 最大的 Lyapunov 指数 λ_1 是区别混沌行为的极好指标, 易于计算, 且 λ_1 定量描述了混沌系统对初始不确定性的放大率, $1/\lambda_1$ 称为最大可预报性^[12]。在湍流研究中, 通常关心的是最大 Lyapunov 指数。

在 m 维相空间里, 取一初始点 $X_1 = \{x_1, x_1 + \tau, \dots, x_1 + (m-1)\tau\}$, 找出该点在欧氏距离下的最近邻点, 用 $L(t_0)$ 表示这两点之间的距离; 在下一个时刻 t_1 , 原始长度 $L(t_0)$ 将演变成 $L(t_1)$, 则在某一时段内最大 Lyapunov 指数 λ_1 为^[12,13]

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \frac{L(t_k)}{L(t_{k-1})}, \quad (10)$$

式中, M 是代换总步数。运动若是混沌的, 则必有 $\lambda_1 > 0$; 运动若是规则的, 则 $\lambda_1 \leq 0$ 。

3 观测资料

本文采用的边界层湍流观测资料来源于黑河和北京的观测。

1992 年中国和日本两国科学组织在中国西部甘肃黑河地区进行了大气边界层综合观测实验, 其湍流观测使用了多台超声风温仪, 这里选取的是北京大学的 TR-16A 型三分量超声风速仪资料, 采样频率为 16 Hz, 声程为 20 cm。观测高度为 4.9 m。观测场地处甘肃河西走廊黑河流域中段。下垫面为戈壁沙漠和绿洲^[7]。

1997 年 12 月 13~17 日, 中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室大气物理研究小组在北京 325 m 气象观测塔 10 m 高度上同时架设二台高精度湍流观测仪器进行了连续 100 个小时的测量。这二台仪器分别为 SAT-211/3K 型三分量超声风速温度仪 (采样频率为 20 Hz, 声程为 15 cm) 和 M100 型红外湿度脉动仪 (采样频率为 10 Hz, 光程为 15 cm)。观测场周围存在建筑物群, 是典型的城市边界层结构^[14]。

4 结果及分析

运用 Theiler 改进后的 G-P 算法^[11]和 Wolf 改进的 Lyapunov 指数算法^[13], 对黑河与北京两个地区的边界层湍流资料进行大量反复的相关维和最大 Lyapunov 指数计算。这里以四组资料的计算结果为例进行分析。

4.1 湍流吸引子的相关维

图 2~4 给出黑河地区 1992 年 8 月 13 日 11 点 45 分三组变量 (长度为 30 min) 的相关维计算结果。图 5~8 为北京地区 1997 年 12 月 15 日 14 点四组变量 (长度为 30 min) 的结果 (其中 D 即为 D_2)。从图中可以看到 $C(r)$ 与 r 之间的标度关系 ($\log C(r)$ 与

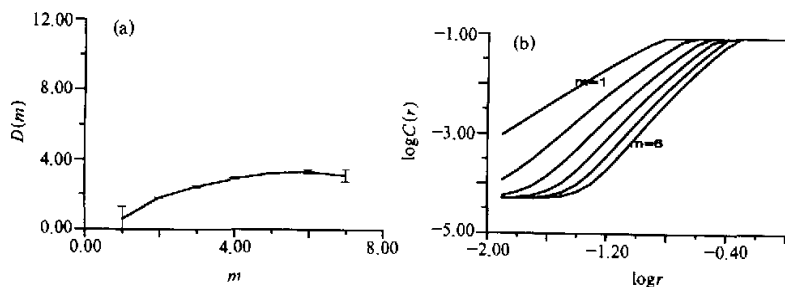


图2 由湍流动能序列(黑河)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)

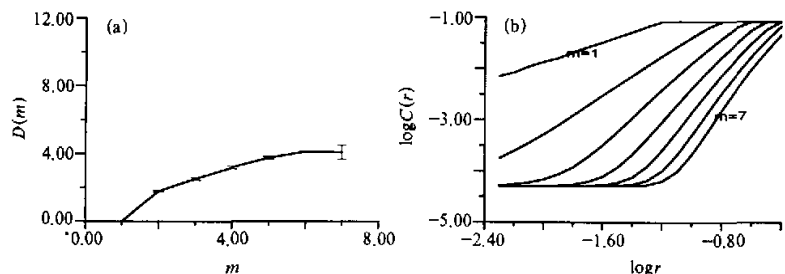


图3 由垂直风速序列(黑河)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)

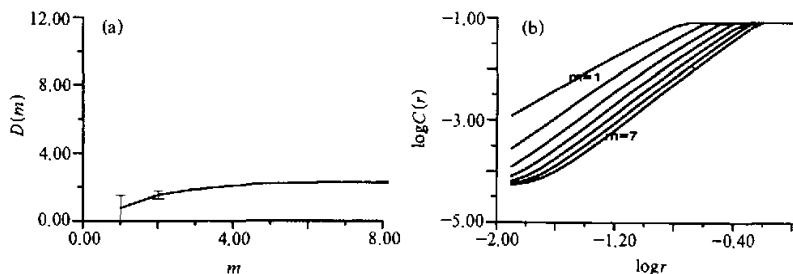


图4 由温度序列(黑河)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)

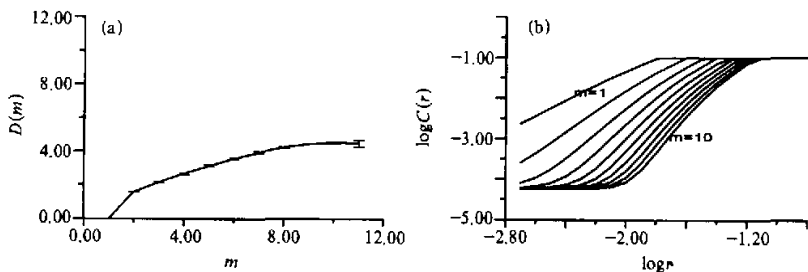
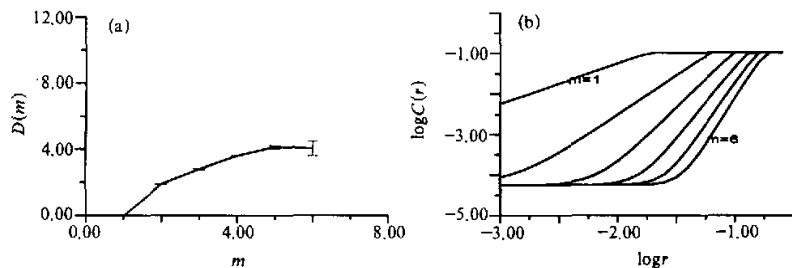
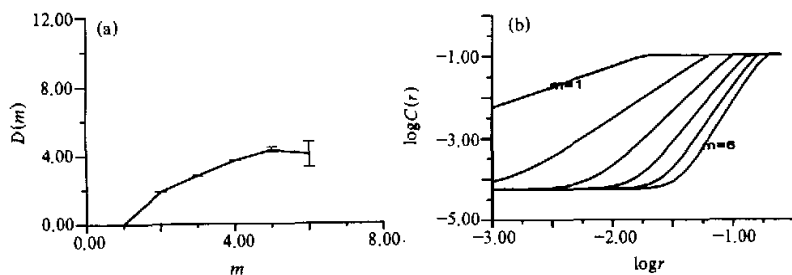
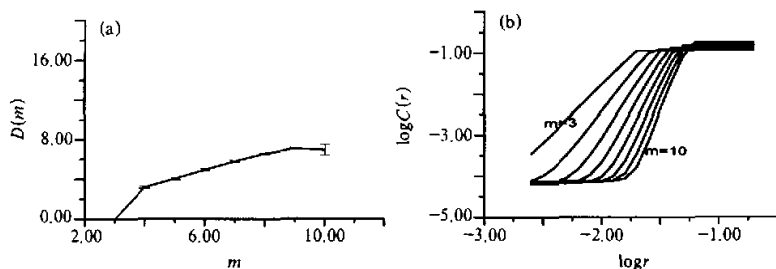


图5 由湍流动能序列(北京)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)

$\log r$ 在某段内呈直线关系), 图中 $D(m)$ 随 m 的变化均表现出饱和趋势。

以图 4a 和图 8a 为例, 温度的 $D(m)$ 随 m 的增加而达到饱和。图 4a 中饱和嵌入维

图6 由垂直风速序列(北京)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)图7 由温度序列(北京)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)图8 由湿度序列(北京)计算关联维得到的 $D-m$ 图(a)和双对数图(b)

$m=7$, 而相应的相关维 $D_2=3.26$; 图8a中饱和嵌入维 $m=10$, 相关维 $D_2=7.03$ 。说明大气湍流的确存在着低维的混沌吸引子, 这与国外其他作者运用其他资料的计算结果是一致的^[9]。表1给出了黑河地区8月13日11点45分、23点45分与北京地区12月15日14点、16日凌晨4点的四组代表性资料的具体数值。

根据表1及其他有关计算结果, 可以初步对大气湍流获得如下印象:

(1) 不同地区的资料得到的吸引子维数是不相同的, 但又没有很大的差别, 起码没有量级上的差别, 特别是用动力学变量(风速和动能)计算的吸引子(不妨称为动力学吸引子)维数都比

表1 大气湍流吸引子的相关维

变量	u	w	T	k	q
黑河(白天)	3.95	4.10	3.26	3.30	—
黑河(晚上)	4.06	4.23	3.98	3.73	—
北京(白天)	3.43	4.13	4.30	4.53	7.03
北京(晚上)	3.63	4.43	4.17	3.64	7.11

较接近, 在 3.5~4.5 之间。这意味着描写大气湍流单点吸引子的动力学行为可能只需要 4~5 个变量。

(2) 由非动力学变量(温度和湿度)估算的吸引子(不妨称为温度吸引子和湿度吸引子), 其维数变化较大。温度吸引子的维数有时大于动力学吸引子的维数, 有时小于, 有时则相当; 而湿度吸引子的维数总是大于动力学吸引子维数和温度吸引子维数。描写大气湍流单点的温度吸引子特征需要 4~6 个变量, 描写大气湍流单点的湿度吸引子特征则需要 7 个以上的变量。

(3) 大气稳定度对吸引子维数有影响, 但这种影响不是对所有边界层条件都是一样的, 也不是对所有变量都一样。一般说来, 对平坦下垫面上的边界层湍流影响大于对城市下垫面边界层湍流, 特别是在对湍流动能的影响方面。

(4) 湍流动能作为导出量而不是直接测量的量, 由它计算的吸引子维数与动力学吸引子维数是很接近的, 可见湍流动能也可以重建吸引子。其意义将在结论一节中阐述。

4.2 湍流吸引子的最大 Lyapunov 指数

图 9~12 给出了黑河和北京地区 4 组变量的计算结果。从图中可看出, 所得的湍流吸引子的最大 Lyapunov 指数 λ_1 收敛性是非常好的, 随着时序的增加 λ_1 逐渐趋于一个平台, 且发现在所有的情况下, 由所有的变量得到的 λ_1 都是大于零的。这从另一个侧面说明了大气湍流具有混沌特性。

表 2 列出了如上所述的 4 组代表性资料的结果。平均说来, 湍流动力吸引子的最大 Lyapunov 指数基本上处于 0.1~0.4 之间, 而非动力学吸引子的最大 Lyapunov 指数要

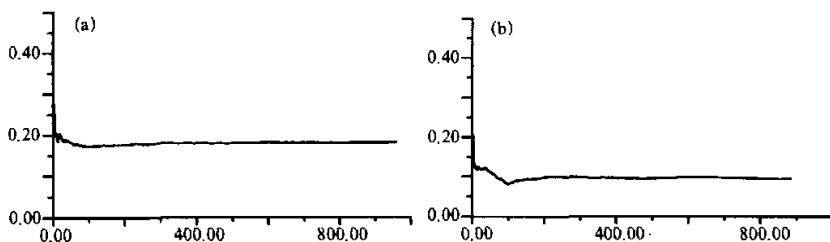


图 9 湍流动能序列的最大 Lyapunov 指数随时序的变化

(a) 黑河; (b) 北京

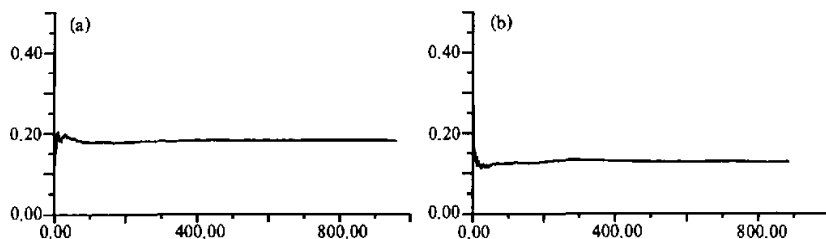


图 10 垂直风速序列的最大 Lyapunov 指数随时序的变化

(a) 黑河; (b) 北京

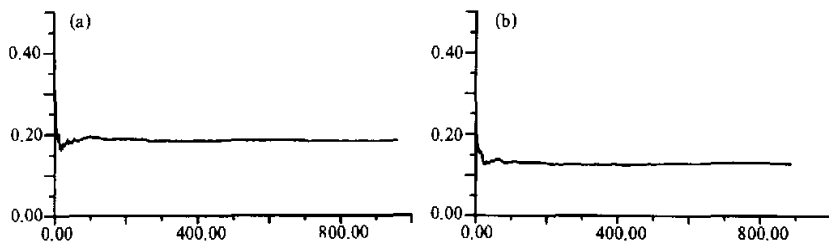


图 11 温度序列的最大 Lyapunov 指数随时序的变化
(a) 黑河; (b) 北京

表 2 大气湍流吸引子的最大 Lyapunov 指数

变量	u	v	w	T	k	q
黑河(白天)	0.175	0.182	0.182	0.184	0.180	—
黑河(晚上)	0.146	0.156	0.132	0.152	0.084	—
北京(白天)	0.120	0.137	0.128	0.129	0.095	0.049
北京(晚上)	0.132	0.155	0.128	0.108	0.101	0.047

小一些, 在 $0.01 \sim 0.2$ 之间。如果由此推测大气湍流的最大可预报性的话, 那么对风场而言为 $2.5 \sim 10$ s, 对于温度场或湿度场而言为 $5 \sim 100$ s。

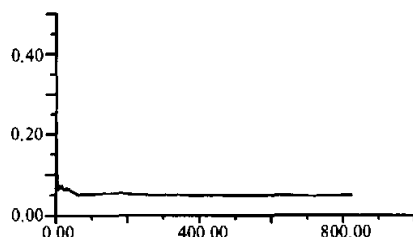


图 12 湿度序列(北京)的最大 Lyapunov 指数随时序的变化

5 结论

应用重构相空间的方法重建大气湍流的吸引子并估算了其分数维 D_2 和最大 Lyapunov 指数 λ_1 。结果表明, 大气湍流在相空间中的行为的确具有混沌特征。其奇怪吸引子维数在 $3 \sim 7$ 之间, 视不同的变量(动力变量还是非动力变量)而定, 也受大气稳定度影响。我们首次使用了湍流动能来重建湍流吸引子, 发现是可行的, 由此计算的有关结果与直接用风速分量来计算的结果比较一致。这为克服架设超声风速仪时保持水平(或垂直)不够而带来的问题提供了很大的方便。虽然超声风速仪的三个轴是相互垂直的, 但在实际测量时架设起来难以保证仪器的水平或垂直放置, 而且大气湍流的垂直速度一般比水平速度小一个量级, 变化规律也不一样(因为垂直方向更易受温度层结影响), 所以若安装得不符合理想要求, 势必给测量带来另一种误差^[16]。而这种误差的影响对于重建湍流吸引子而言, 恰恰可以通过选取湍流动能来克服。这是因为不论仪器怎样放置, 由相互垂直的三个轴所测的动能是不变的。

致 谢 本工作得到了杨培才研究员和刘式达教授的热情帮助, 在此谨致谢意

参考文献

- 1 杨培才、刘锦丽、杨硕文, 低层大气运动的混沌吸引子, 大气科学, 1990, 14(3), 335~341.
- 2 刘式达、刘式适, 非线性动力学和复杂现象, 北京: 气象出版社, 1989.
- 3 胡非, 湍流、间歇性与大气边界层, 北京: 科学出版社, 1995.
- 4 Packard, N. H., Geometry from a time series, *Phys. Rev. Lett.*, 1980, 45, 712.
- 5 Takens, F., Detecting strange attractor in turbulence, *Lecture Notes in Math.*, 1981, 898, 336.
- 6 Grassberger, P. and Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, 1983, 9, 189.
- 7 乔劲松, 不稳定大气近地面层湍流的精细结构, 北京大学博士学位论文, 1996.
- 8 Ababrbanel, H. D. I. and Kennel M. B., Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data, *Phys. Rev.*, 1993, E47, 3057.
- 9 Jaramillo, P. G. and Puente C. E., Strange attractor in atmosphere boundary-layer turbulence, *Boundary-Layer Meteorol.*, 1993, 64, 175.
- 10 Kantz, H., A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series, *Phys. Rev.*, 1994, A185, 77.
- 11 Theiler, J., Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points, *Phys. Rev.*, 1987, A36, 4456.
- 12 Wolf, A., J. Swift J., H. Swinney and J. Vastano, Determining Lyapunov exponents from experimental data, Department of Physics, University of Texas at Austin, Austin, TX., 1984.
- 13 Wolf, A., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica*, 1988, 16D, 285.
- 14 胡非、李昕、陈红岩、刘翌, 城市冠层中湍流运动的统计特征, 气候与环境研究, 1999, 4(3), 252~258.
- 15 Williams, G. P., *Chaos Theory Tamed*, Great Britain: Taylor & Francis, 1997.
- 16 Kaimal, J. C. and J. J. Finnigan, *Atmospheric Boundary Layer Flows*, New York: Oxford Uni Press, 1994.

Reconstructing the Attractors of Atmospheric Turbulence

Li Xin, Hu Fei and Liu Gang

(State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract The attractor of turbulent flow in the phase space was reconstructed by using the time delay technique with the observed data of atmospheric turbulence which include the high resolution temperature, humidity and three components wind speed data in Gansu and Beijing. The correlation dimension and the largest Lyapunov exponent are estimated. The results indicate that all the largest Lyapunov exponent in different conditions of time, site and atmospheric stability are greater than zero. This means that atmospheric turbulence system is really chaotic and has appropriate low dimension strange attractors, dimension numbers of which are found to be between 3 to 7 and vary with different variables (dynamical variables or non-dynamical variables) and atmospheric stability. The turbulent kinetic energy is first applied to reconstruct the attractor of turbulence, as is found to be feasible.

Key words: turbulence; chaos; strange attractor; correlation dimension; Lyapunov exponent